# 内 容 提 要

本书系统介绍了组合数学的基本理论和计数方法，包括鸽巢原理、包含排斥原理、递推关系、生成函数、Polya定理等，同时还讨论了动态规划、回溯和启发式算法等重要的组合算法。书后附有部分习题的提示或解答。

此书适合于自学，并且可供高校计算机专业或数学专业，运筹专业的学生及有关科技工作者参考。

北京市高等教育自学考试用书

组 合 数 学

屈婉玲 编

责任编辑：刘 勇

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

850×1168毫米 32开本 8.125印张 200千字

1989年11月第一版 1989年11月第一次印刷

印数：0001—5,000册

ISBN7-301-00871-6/O·155

定价：4.20元

# 前　言

为了适应社会主义现代化建设的需要，我国实行了高等教育自学考试制度。它是个人自学、社会助学和国家考试相结合的一种新的教育形式，是我国社会主义高等教育体系的一个组成部分。实行这种高等教育自学考试制度，是实行宪法规定的“鼓励自学成才”的重要措施，也是造就和选拔人才的一种新途径。

本书是参照北京市计算机软件专业自学考试大纲编写的，它包括了组合数学和组合算法两部分内容。随着计算机的广泛使用，对计算机算法的研究变得日益重要。习惯上将计算机算法分成两大类。一类称为“计算方法”，主要解决数值计算问题，如解方程组，求积分等，它的数学基础是高等数学。另一类称为“组合算法”，解决搜索，排序，组合优化问题等，它的数学基础就是组合数学。在这本书中着重介绍了组合数学的基本理论和计数方法以及几种广泛使用的组合算法，包括以下内容：

组合数学（第1—第8章），主要研究组合计数的各种方法和技巧，有包含排斥原理和Polya定理的应用，递推关系和生成函数法等。这是分析算法复杂性的重要手段。

组合算法（第9—11章），主要研究动态规划法，回溯法和广泛用于智能领域的启发式算法。

本书选材比较精练，讲解较为详细，书中附有大量的例题和习题，书后附有部分习题的提示或解答，适合自学。书中一些打有*号的章节，其内容已超出大纲的基本要求，仅供参考。

本书不仅可以作为计算机软件专业的自学教材，也可以作为高等院校有关专业的学生和科技工作者的参考书。

本书的主要内容曾在北京大学计算机系作过多次讲授。由于编者水平有限，错误和疏漏在所难免，恳请读者指正。

编　者

1989年4月于北京大学

# 目　　录

# 第一章 引 言

组合数学也叫做组合学，它是一门古老的学科。在1666年，德国的莱伯尼兹发表了一篇“论组合数学”的文章，他预见到组合数学将会渗透到许多的学科并得到很大的发展。这篇文章开创了一门独立的学科——组合数学，但这并不是组合问题研究的开始，实际上的研究比这要早得多。

在欧洲曾经广泛流行过一种古老的数学游戏叫做幻方。给定 $1,2,\cdots,n^2$ 这些数字，要求把它们排列成 $n\times n$ 的方阵，并使得每一行、每一列、每条主对角线上的 $n$ 个数字之和都相等。我们把这样的方阵叫做 $n$ 阶幻方，每一行数字的和叫做幻方的和。例如

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

就是一个 3 阶幻方，它的和是15。幻方最早起源于我国的洛书河图。宋朝著名的数学家杨辉称幻方为纵横图，他研究过 3 阶幻方，并给出了构造方法。

不难证明，$n$ 阶幻方的所有数字之和是

$$1+2+\cdots+n^2=n^2(n^2+1)/2,$$

所以 $n$ 阶幻方的和应该是 $n(n^2+1)/2$。人们很容易想到以下的问题：

1. 对任意的正整数 $n$，$n$ 阶幻方是否存在？
2. 如果存在，那么应该有多少个不同的 $n$ 阶幻方？
3. 怎样构造 $n$ 阶幻方？

这些都是有趣的组合问题。组合数学就是研究按照一定的规则来安排一些离散个体的有关问题。首先要研究这样的安排是否

存在，这叫做存在性问题。问题1就是存在性问题。容易看到，并不是对任意的正整数$n$都有$n$阶幻方，2阶幻方就不存在。如果这种安排存在，我们接着就可以研究这样的安排可以有多少种，这叫做组合计数问题。问题2就是这一类问题。再下去就可以研究怎样构造出所需要的安排方案，这叫做构造问题或枚举问题。除了这几类问题以外，组合数学还研究优化问题，就是在给定的优化条件下从所有的安排方案中找出最优的安排方案。当然，对于不同的组合问题是会有所侧重的。如果安排的原则带有技巧性或比较复杂，那么存在性问题就成为主要的问题，而在实际应用中更多的是计数问题和优化问题。

本书包含了这四方面的内容，但重点是讨论组合计数问题。在第二章给出了组合数学中最主要的存在性定理——鸽巢原理和Ramsey定理，从第三章到第八章着重讨论组合计数的各种方法和技巧，最后三章简单介绍一些生成所有的组合配置方案或找出最优配置方案的算法——组合算法。

学习组合数学并不需要高深的数学基础，但是组合学有它特有的技巧和方法，请看下面的例子。

**例1.1** 有101名选手参加羽毛球比赛，如果采用单循环淘汰制，问要产生冠军需要进行多少场比赛？

通常可以采用下面的方法来计算：每两个选手一组，先进行第一轮比赛，要赛50场。得胜的50人与轮空的1人进入第二轮，第二轮要安排25场比赛。…照这样分析总共要进行

$$50+25+13+6+3+2+1=100$$

场比赛。

下面我们介绍一种新的方法。

**解** 因为每场比赛都要产生一个失败者，而每个失败者只能失败一次，所以比赛的场数与失败者的人数相等。又因为冠军是唯一的胜利者，其它100个人都失败过，所以要比赛100场。

**例1.2** 有一个边长为3的立方体木块，要把它切割成27个

边长为1的小立方体。如果在切割的过程中可以重新排列被切割木块的位置，问至少需要多少次才能完成整个切割？

设具有最少切割次数的方案是最优的，如果我们先列出所有可能的切割方案，然后从中找出最优的方案，这是相当麻烦的。我们采用另一种解法。

**解** 首先可以看到6次是可以完成整个切割的。图1.1就给出了这样的一种方案。

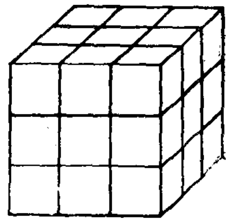

图1.1 一种切割方法

其次，我们来证明少于6次是不能完成整个切割的。因为在27个小立方体中有一个处在原来大立方体的中心，它的每一个面都是由切割而产生的。又因为每切一次只能产生一个面，所以切割次数不能少于它的面数，因此至少要6次切割才能完成。

在以上两个例子里我们都使用了一种技巧，这就是在两个事物之间构造一一对应，从而把一个组合问题转化成另一个组合问题。这是解决组合计数问题常用的技巧，希望大家在阅读本书时注意学习和掌握这种技巧和方法。

## 习 题 一

1.1 证明不存在2阶幻方。

1.2 设$n$为奇数，用下面的算法可以构造$n$阶幻方。

1) $a \leftarrow 1, x \leftarrow 1, y \leftarrow \frac{n+1}{2}$.

2) 若$a = n^2 + 1$则算法结束，否则把$a$填入$(x, y)$的方格。

3) 若$x = 1$且$y = n$，则$x \leftarrow x + 1, a \leftarrow a + 1$，转2)。

4) 若$x = 1$且$y \neq n$，则$x \leftarrow n, y \leftarrow y + 1, a \leftarrow a + 1$，转2)。

5) 若$x \neq 1$且$y = n$，则$x \leftarrow x - 1, y \leftarrow 1, a \leftarrow a + 1$，转2)。

6) 若$(x-1, y+1)$的方格为空，则$x \leftarrow x - 1, y \leftarrow y + 1$,

$a \leftarrow a+1$,转2)。

7) 若$(x-1, y+1)$的方格不空,则 $x \leftarrow x+1, a \leftarrow a+1$,转2)。

本章给出的 3 阶幻方就是按照这个算法构造的。请按算法构造 5 阶幻方和 7 阶幻方。

# 第二章　鸽巢原理和Ramsey 定理

## §1　鸽巢原理的简单形式及其应用

鸽巢原理也叫做抽屉原理，是组合数学的基本原理。它的简单形式可以叙述如下：

**定理2.1(鸽巢原理)**　把 $n+1$ 个物体放入 $n$ 个盒子里，则至少有一个盒子里含有两个或两个以上的物体。

**证明**　假设每个盒子里至多含有一个物体，则 $n$ 个盒子里的物体总数小于等于 $n$，与物体总数是 $n+1$ 矛盾。▌

下面举例说明这个定理的应用。

**例2.1**　13个人中至少有两个人是同一个月出生的。

**例2.2**　在边长为 2 的正三角形中任意放 5 个点，证明至少有两个点之间的距离不大于 1。

**证明**　如图2.1所示，在三角形三条边的中点之间连线，把整个三角形划分成四个边长为 1 的小三角形。由鸽巢原理，5 个点中至少有两个点落入同一个小三角形里，而这两个点之间的距离一定小于等于 1。

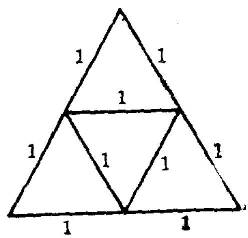

图2.1　边长为 2 的正三角形

**例2.3**　在 $n+1$ 个小于等于 $2n$ 的不相等的正整数中，一定存在两个数是互素的。

**证明**　先证明以下的事实：

任何两个相邻的正整数是互素的。

用反证法。假设 $n$ 与 $n+1$ 有公因子 $q(q\geqslant2)$，则有

$$n=qp_1,\quad n+1=qp_2,\quad p_1,p_2\text{ 是整数。}$$

因此得 $qp_1+1=qp_2$，即$q(p_2-p_1)=1$，这与$q\geqslant 2, p_2-p_1$是整数矛盾。

把$1,2,\cdots,2n$分成以下 $n$ 组：

$$\{1,2\},\{3,4\},\cdots,\{2n-1,2n\},$$

从组中任取 $n+1$个不同的数，由鸽巢原理可知至少有两个数取自同一组，它们是相邻的数，所以它们是互素的。

**例2.4** 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是 $n$ 个正整数，证明其中存在着连续的若干个数，其和是 $n$ 的倍数。

**证明** 令$S_i=x_1+x_2+\cdots+x_i, i=1,2,\cdots,n$。我们把 $S_i$ 除以 $n$ 的余数记作 $r_i$，$0\leqslant r_i\leqslant n-1$。

如果存在 $i$，使得 $r_i=0$，则 $x_1+x_2+\cdots+x_i$ 可以被 $n$ 整除。如果对于所有的 $i$，$i=1,2,\cdots,n$ 都有 $r_i\neq 0$，那么 $n$ 个 $r_i$ 只能有 $1,2,\cdots,n-1$种可能的取值，由鸽巢原理可知必存在 $j$ 和 $k$ 满足 $r_j=r_k, j>k$。因此有

$$S_j-S_k=x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_j$$

可以被 $n$ 整除。

**例2.5** 在$1,2,\cdots,2n$中任取 $n+1$个不同的数，证明至少有一个数是另一个数的倍数。

**证明** 任何的正整数 $n$ 都可以表成 $n=2^{\alpha}\cdot\beta$ 的形式，其中 $\alpha$ 是自然数(包括0)，$\beta$ 为奇数。

设选出的 $n+1$个数为 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$，把它们依次表为：$2^{\alpha_1}\cdot\beta_1, 2^{\alpha_2}\cdot\beta_1,\cdots,2^{\alpha_{n+1}}\cdot\beta_{n+1}$，其中$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n+1}$是 $n+1$个奇数，它们的取值只有 $n$ 种可能，即$1,3,\cdots,2n-1$。由鸽巢原理必存在 $i$ 和 $j$ 使得 $\beta_i=\beta_j$。我们考虑$a_i=2^{\alpha_i}\cdot\beta_i$和 $a_j=2^{\alpha_j}\cdot\beta_j$，不妨设$a_i<a_j$，则有

$$\frac{a_j}{a_i}=\frac{2^{\alpha_j}\cdot\beta_j}{2^{\alpha_i}\cdot\beta_i}=2^{\alpha_j-\alpha_i}.$$

这就证明了$a_j$是 $a_i$ 的倍数。

例2.5中的 $n+1$是使得命题成立的最小的数，如果把已知条

件改为“在$1,2,\cdots,2n$中任取$n$个不同的数，…”，结论就不对了。我们只要选取$n+1,n+2,\cdots,2n$这$n$个数，那么其中任何一个数都不是别的数的倍数。

**例2.6** 一个棋手为参加一次锦标赛将进行77天的练习，如果他每天至少下一盘棋，而每周至多下12盘棋，证明存在着一个正整数$n$使得他在这77天里有连续的$n$天共下了21盘棋。

**证明** 设$a_i$是从第1天到第$i$天下棋的总盘数，$i=1,2,\cdots,77$。因为他每天至少下一盘棋，所以

$$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{77}.$$

又因为每周至多下12盘棋，77天中下棋的总数$a_{77}$不超过

$$12\times\frac{77}{7}=132,$$

做序列：

$$a_1+21,a_2+21,\cdots,a_{77}+21,$$

这个序列也是严格单调上升的，且有$a_{77}+21\leqslant 153$。考察下面的序列：

$$a_1,a_2,\cdots,a_{77},a_1+21,a_2+21,\cdots,a_{77}+21,$$

该序列有154个数，每个数都是小于等于153的正整数。由鸽巢原理必存在$i$和$j$使得$a_i=a_j+21(j<i)$。令$n=i-j$，则该棋手在第$j+1,j+2,\cdots,j+n=i$的连续$n$天中下了21盘棋。

## *§2 鸽巢原理的加强形式

**定理2.2(鸽巢原理的加强形式)** 设$q_1,q_2,\cdots,q_n$都是正整数，若$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$个物体放入$n$个盒子里，则第一个盒子里至少含有$q_1$个物体，或者第二个盒子里至少含有$q_2$个物体，…，或者第$n$个盒子里至少含有$q_n$个物体。

**证明** 对于$i=1,2,\cdots,n$，假设第$i$个盒子里至多含有$q_i-1$个物体，则$n$个盒子里物体数的总和不超过

$$q_1+q_2+\cdots+q_n-n,$$

与已知条件矛盾。▌

**推论1** 若 $n(r-1)+1$ 个物体放入 $n$ 个盒子里，则至少有一个盒子里含有 $r$ 个或者更多的物体。

**证明** 在定理2.2中取 $q_1=q_2=\cdots=q_n=r$ 即可。▌

**推论2** 设 $n$ 个正整数 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 满足不等式

$$\frac{1}{n}(m_1+m_2+\cdots+m_n)>r-1,$$

证明 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 中至少有一个不小于 $r$。

**证明** 由 $\frac{1}{n}(m_1+m_2+\cdots+m_n)>r-1$ 得

$$m_1+m_2+\cdots+m_n\geqslant(r-1)n+1.$$

由推论 1 可知存在着 $m_i$ 使得 $m_i\geqslant r$。▌

鸽巢原理的简单形式只是加强形式的一个特例。如果在定理2.2的推论1中令 $r=2$，就可以得到鸽巢原理的简单形式了。

**例2.7** 有大小两个圆盘，把它们各分成200个相等的扇形。从大盘上任选100个扇形涂上红色，其余的涂上蓝色，而在小盘的每个小扇形中任意涂上红色或蓝色，然后把小盘放到大盘上，并使两个盘的圆心重合。证明在旋转小盘时可以找到某个位置使得至少有100个小扇形落在同样颜色的大扇形内。

**证明** 任取一个小扇形，当它落入某个大扇形的内部以后，这两个扇形的颜色就构成一组颜色组合。在小盘旋转一周的过程中，这个小扇形与大盘上所有的扇形共构成200组颜色组合，其中同色的有100组.因为小盘上有200个不同的扇形,所有的小扇形与所有的大扇形构成的同色的颜色组合总共有 $100\times200=20000$ 组，而小盘与大盘的相对位置有200种，每个位置平均具有 $20000/200=100$ 组同色的颜色组合，由定理2.2的推论2，必存在着某个位置使得至少有100个小扇形落在同色的大扇形内。

**例2.8** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}$ 是 $n^2+1$ 个不同实数的序列，证明

一定可以从这个序列中选出$n+1$个数的子序列$a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_{n+1}}$，使得这个子序列为递增序列或递减序列。例如序列10,4,13,8,21中可以选出3个数的递增子序列10,13,21或者4,8,21.

**证明** 假设不存在长为$n+1$的递增子序列，我们来证明必存在长为$n+1$的递减子序列。

对每个$k$, $k=1,2,\cdots,n^2+1$，令$m_k$表示从$a_k$开始的递增子序列的最大长度。由假设可知$1\leqslant m_k\leqslant n$。考虑数$m_1,m_2,\cdots,m_{n^2+1}$，这$n^2+1$个数的值只能是$1,2,\cdots,n$。由定理2.2的推论1可知一定有$\lceil(n^2+1)/n\rceil$① $=n+1$个$m_k$的取值相等，设$m_{k_1}=m_{k_2}=\cdots=m_{k_{n+1}}=l$，其中$1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_{n+1}\leqslant n^2+1$。如果存在着某个$i$使得$a_{k_i}<a_{k_{i+1}}$，由于$k_i<k_{i+1}$，在从$a_{k_{i+1}}$开始的最长的递增子序列的前边加上$a_{k_i}$，就得到了长为$l+1$的从$a_{k_i}$开始的递增子序列，与$m_{k_i}=l$矛盾。因此对所有的$i$，$i=1,2,\cdots,n$, $a_{k_i}>a_{k_{i+1}}$，即$a_{k_1}>a_{k_2}>\cdots>a_{k_{n+1}}$。这$n+1$个数构成了长为$n+1$的递减子序列。

## *§3 Ramsey 定理

Ramsey 定理是鸽巢原理的推广，它的一般形式比较复杂，已超出了本书的范围。本节只讨论某些特殊情况下的Ramsey定理及其应用。先看几个简单的例子。

**定理2.3** 设$G$是具有6个顶点的完全图$K_6$，如果我们对它的边任意涂以红色或蓝色，则$G$中一定包含一个红色的三角形，或者包含一个蓝色的三角形。

**证明** 请看图2.2，我们以实线表示涂蓝色，虚线表示涂红

① $\lceil x\rceil$表示大于等于$x$的最小整数。

色。任取一个顶点，我们把它记为$P_1$，其它5个顶点与$P_1$的连线不是实线就是虚线，由鸽巢原理可知至少有3个顶点与$P_1$的连线是一样的。不妨设这3个顶点为$P_2, P_3, P_4$，且它们与$P_1$的连线为实线。如果$P_2, P_3, P_4$之间的连线都是虚线，则$P_2P_3P_4$构成一个虚线三角形；如果$P_2, P_3, P_4$之间的连线有一条实线，则这条实线的两个端点与$P_1$构成一个实线三角形的顶点。▎

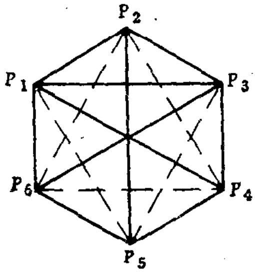


图2.2 $K_6$

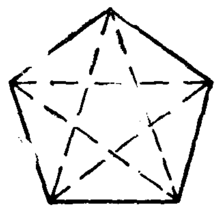

图2.3 $K_5$

不难看出，对于$K_n$，$n\geqslant6$，上述结论也是正确的，但对于$K_3, K_4$和$K_5$，上述结论就不成立了。图2.3给出了$K_5$的一种涂色方案，其中既没有实线三角形，也没有虚线三角形，可见6是使得结论成立的图$G$的最少的顶点数。

**定理2.4** 设$G$是具有10个顶点的完全图$K_{10}$，如果我们对它的边任意涂以红色或蓝色，则$G$中一定包含一个红色的三角形或者一个蓝色的完全四边形。

**证明** 任取$G$的一个顶点，我们把它记作$P_1$。如果其它的9个顶点中至少有4个和$P_1$以红线相连，我们把其中的4个顶点记作$P_2, P_3, P_4, P_5$。若这4个顶点之间的连线都是蓝线，刚$P_2P_3P_4P_5$构成一个蓝色的完全四边形；若其中有一条连线是红线，则这红线的两个端点与$P_1$构成红三角形的顶点。如果$P_2, \cdots, P_{10}$这9个顶点之中至多有3个顶点和$P_1$以红线相连，则至少有6个顶点

和$P_1$以蓝线相连。这6个顶点的子图是$K_6$，由定理2.3可知其中一定包含一个红三角形或蓝三角形。若包含一个红三角形，则为所求；若包含一个蓝三角形，则这个三角形的3个顶点与$P_1$构成一个蓝色的完全四边形的顶点。 ▎

类似地可以证明以下的定理：

**定理2.5** 设$G$是具有10个顶点的完全图$K_{10}$，对$G$的边任意涂以红色或蓝色，则在$G$中一定存在一个蓝色的三角形或红色的完全四边形。

**定理2.6** 设$G$是具有20个顶点的完全图$K_{20}$，对$G$的边任意涂以红色或蓝色，则在$G$中一定存在一个蓝色的完全四边形或红色的完全四边形。

以上两个定理的证明留给读者完成。

设$G$是具有$r$个顶点的完全图$K_r$，我们简称$G$为完全$r$边形．当使用红、蓝两色对$G$的边任意涂色的时候，要使得$G$中包含一个蓝色的完全$q_1$边形或红色的完全$q_2$边形，我们把满足这一条件的最小的正整数$r$记作$N(q_1,q_2)$．这些数就是Ramsey数。

由定理2.3可知$N(3,3)\leqslant 6$，由定理2.4可知$N(4,3)\leqslant 10$，由定理2.5和2.6可知$N(3,4)\leqslant 10$，$N(4,4)\leqslant 20$。这些定理只给出了几个Ramsey数的上界，并不一定是最好的结果。图2.3的涂色方案证明了$N(3,3)>5$，把这一结果与$N(3,3)$的上界结合起来就得到$N(3,3)=6$。用类似的方法可以证明$N(3,4)=9$，$N(4,4)=18$。

下面我们给出关于Ramsey数$N(q_1,q_2)$的一些性质。

**定理2.7** (1) $N(q_1,q_2)=N(q_2,q_1)$；

(2) $N(q,2)=q$。

**证明** (1) 由对称性得证。

(2) 设$G$是一个完全$q$边形，如果用红、蓝两色对$G$的边涂色，则$G$中或有两个顶点之间连红线，或者所有的连线都是蓝线．因此$N(q,2)=q$。 ▎

**定理2.8** 对任意的正整数 $q_1,q_2\geqslant 2$，$N(q_1,q_2)$是有限数，且满足

$$N(q_1,q_2)\leqslant N(q_1-1,q_2)+N(q_1,q_2-1)\ .$$

**证明** 只要证明以上的不等式成立，则 $N(q_1,q_2)$显然为有限数。设$G$是具有$N(q_1-1,q_2)+N(q_1,q_2-1)$个顶点的完全图，用红、蓝两色对$G$的边任意涂色，然后在$G$中任取一个顶点$P_1$。可以断定，与$P_1$连蓝线的顶点至少为$N(q_1-1,q_2)$个或者与$P_1$连红线的顶点至少为$N(q_1,q_2-1)$个。否则与$P_1$连线的顶数总数是$N(q_1-1,q_2)+N(q_1,q_2-1)-2$个，与$G$中的顶点数矛盾。

若与$P_1$连蓝线的顶点为$N(q_1-1,q_2)$个，则这些顶点构成的完全子图中存在着蓝色的完全$q_1-1$边形或红色的完全$q_2$边形。如是前者，则这$q_1-1$个顶点与$P_1$构成$G$中的蓝色完全$q_1$边形；如是后者，这个红色的完全$q_2$边形也是$G$中的完全$q_2$边形。

对于与$P_1$连红线的顶点是$N(q_1,q_2-1)$个的情况同样可以证明结论成立。综上所述有

$$N(q_1,q_2)\leqslant N(q_1-1,q_2)+N(q_1,q_2-1)\ .\ \blacksquare$$

由这个定理和定理2.7可以得到：

$$\begin{aligned}N(3,4)&\leqslant N(2,4)+N(3,3)\\&\leqslant N(2,4)+N(2,3)+N(3,2)\\&=4+3+3=10,\\N(4,4)&\leqslant N(3,4)+N(4,3)\\&\leqslant N(3,4)+N(3,4)\\&\leqslant 10+10=20.\end{aligned}$$

这恰好就是定理2.4和定理2.6的结果。

定理2.8所给出的上界不一定是最好的上界，可以证明$N(3,4)\leqslant 9$这一更好的结果（参考习题2.11），同时也可以举出反例证明在$K_8$中存在着一种涂色方案，它既不包含蓝色的三角形，也