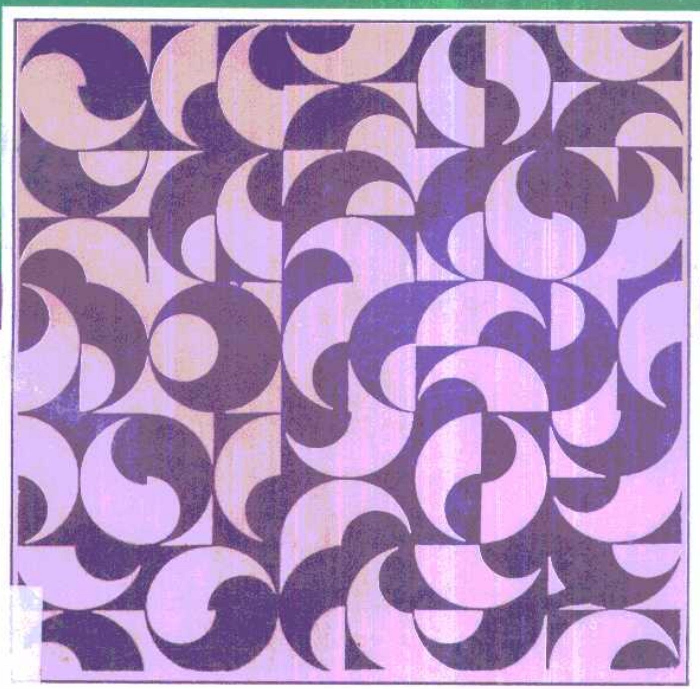
中学教师继续教育丛书

中学数学解题方法

樊恺　编著



杭州大学出版社

中学数学解题方法

樊　恺　编著

杭州大学出版社

□绪　　论

撰写本书的目的是研究解数学问题的一般规律和方法。为此，全书将把不同类型的数学问题的解法统一起来讨论。

我们知道，数学问题按它的要求可区分为两大类：一类是要求判定某个给定结论的真实性，属于“求证题”；一类是要求寻找出某个未知对象①，属于“求解题”。对于解决前一类问题，通常叫做“证题”；解决后一类问题，通常叫做“解题”。这两类问题表面上似乎大不相同，其实它们同样都有一个按要求要达到的“目标”，如前者是所要求判定的给定结论，后者是所要求寻找的未知对象。不同的仅仅是，求证题明确地给出了要达到的目标，而求解题只给出了目标的大致范围。读者在后面将可以看到，解决数学问题的一般思维方法通常同时适用于这两类问题，因此本书将不严格区分使用“证题”与“解题”这两个术语，而用“解题”这个术语泛指解决数学问题。

当然，为了探讨解题的一般规律和方法，只从字面上来理解“解题”这个术语的含义还是不够的。我们必须搞清楚解题的实质和过程。

① 这里的“对象”不一定就是数，也可以是某个图形、某个结论，甚至是某种程序、某种方法。

为此我们来考察一下读者很熟悉的几个简单问题的解法。

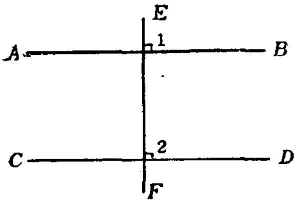


图 1

首先，看一个几何证明题的解答过程：

已知 $AB \parallel CD, EF \perp AB$（图 1）。

求证 $EF \perp CD$.

证明

(1) $\because$ $AB \parallel CD$，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是同位角（已知），

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$（两直线平行，则同位角相等）。

(2) $\because$ $EF \perp AB$（已知）。

$\therefore$ $\angle 1 = 90^\circ$（互相垂直的定义）。

(3) $\because$ $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 1 = 90^\circ$（已证），

$\therefore$ $\angle 2 = 90^\circ$（等量代换）。

(4) $\because$ $\angle 2 = 90^\circ$（已证），

$\therefore$ $EF \perp CD$（互相垂直的定义）。

如果读者注意分析上面的解法，就会发现：解答是由一个一个的步骤组成的，其中的每一个步骤都是把数学的一般原理① 运用于问题的条件（或条件的推论）的推理；至于整个解答则是把条件与结论串接起来的若干步骤所组成的序列。而所谓“解题”，实质上就是给出这个序列（尽管我们可以在写法上简化得多）。

上述观点一般是否适用于求解题呢？下面，再看一个代

① 包括定义、公理、定理及法则、定律、公式等.

数计算题的解答过程：

化简 $5x+9x^2-10x$。

解 $5x+9x^2-10x$，

$= 9x^2+5x-10x$ （交换律）， (1)

$= 9x^2+(5x-10x)$ （结合律）， (2)

$= 9x^2+(5-10)x$ （分配律） (3)

$= 9x^2-5x$。 (4)

上面的解答是用简便的连等形式表示的，因此读者容易忽略下述几点：

第一，这个问题的已知条件虽是一个明确给出的整式，但问题的要求却是"化简"，这只给出了要求的未知对象的大致范围，即一个与已知整式恒等的不含同类项的整式。

第二，解答仍可分解为一个一个的步骤。例如，(2) 其实是：

由"结合律"得

$$9x^2+5x-10x=9x^2+(5x-10x)。$$

至于(3)还可以分解为两个更基本的步骤(当然在实际解答时是不用这样做的)：

由"分配律"得

$$5x-10x=(5-10)x,$$

由"等量加等量和相等"得

$$9x^2+(5x-10x)=9x^2+(5-10)x。$$

如果由给定整式到最后的结果，还要利用等式的传递性。

第三，数的计算方法也是推理论证得来的，只是人们从小开始都用熟了，也就不再追究它的理论根据。所以(4)依然是

运用一般原理得到的结果。

注意到了以上几点，就不难发现：每一个步骤仍是把数学的一般原理运用于已知条件（或中间的结果）的推理；而整个解答则是把已知与未知串接起来的若干步骤所组成的序列。

当然，我们实际上遇到的问题可能要比上面举出的两个例子复杂得多。但一般来说，解决它们的实质都是相同的，即给出一个把问题的条件和目标串接起来的步骤序列；而每一个步骤都是把数学的一般原理运用于条件或条件的推论（中间的结果）的推理。

由此看来，我们不能认为解题就是写出解答。在写出解答之前，应有一个分清条件与目标，并找到它们联系的过程；在写出解答之后，如果是采取认真负责的态度，那还应有一个检验与讨论所得到的解答的过程。

这就是说，解题过程一般应包括：

（1）**审题**：正确理解问题，分清问题的条件与目标；

（2）**分析**：寻找条件与目标的联系，探索解题途径；

（3）**解答**：写出解答过程；

（4）**校核**：检验与讨论所得到的解答。

其中，关键的是第二个环节。我们在本书中将要研究的解题方法，主要的就是探索解题途径的方法。

第一章

顺推法

由上面的讨论我们知道，问题的解答是由条件至目标的推理序列。因此在探索解题途径时，其中也相应有一个从条件出发进行推理，顺次逐步推向目标，直至达到目标的思考过程。

由条件至目标的定向思考方法，叫做顺推法①。

为了说明这种方法的意义和作用，我们先引用一个简单例子：

【范例 1】 试证：平行四边形的对角线互相平分。

已知 $\square ABCD$，O 是对角线 AC 和 BD 的交点（图2）。

求证 $OA=OC$，$OB=OD$。

证明 $\because$ $ABCD$ 是平行四边形（已知），

$\therefore$ $AB \parallel DC$，$AB=DC$（平行四边形的对边平行且相等）。

又由 $AB \parallel DC$（已证），

可得 $\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$（两直线平行，则内错角相

① 在有的数学书籍中，“顺推法”也叫做“综合法”。但“综合法”在另外的场合还有各种很不相同的意义，因此本书不予引用。

等)。

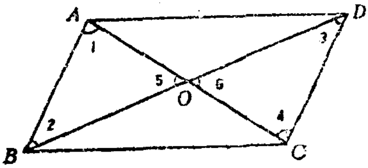


图 2

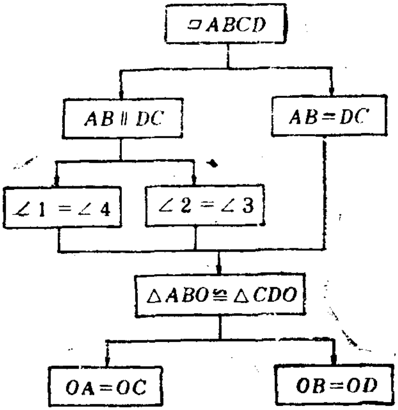
在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle CDO$ 中，$\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$，$AB=DC$（已证），

$\therefore$ $\triangle ABO \cong \triangle CDO(ASA)$。

$\therefore$ $OA=OC$，$OB=OD$（全等三角形的对应边相等）。

证毕。

上面的解答，就是按由条件至目标的方式写出的。因此在写出解答前，就应该形成如下的思路：



为了简明地表示出这种由条件至目标的顺推的思路，也常用下面的格式写出前面的证明过程：

$$\square ABCD \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} AB \parallel DC \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \angle 1=\angle 4 \\ \angle 2=\angle 3 \end{array}\right. \\ AB=DC \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \triangle ABO \cong \triangle CDO \Rightarrow \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD. \end{cases}$$

正是由于解答的书写与顺推法的思路具有一致性，所以读者无论用什么方法探索解题途径，不仅思考过程中都要用到顺推，而且最后原则上都要把思路整理成与顺推相同的程式. 由此可以看到，掌握顺推法是进一步学习其他解题方法的基础.

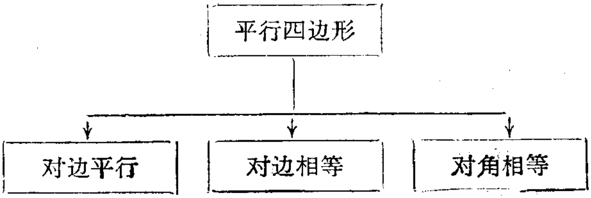
怎样才能熟练运用顺推法呢？首要的是要能正确地进行每一步推理，或者说要能正确地把数学的一般原理运用于条件(或条件的推论). 例如在范例 1 的起步中，就有如下两个推理：

(1) 因为平行四边形的对边平行(大前提)，
而 AB 和 DC 是 $\square ABCD$ 的对边(小前提)，
所以 $AB \parallel DC$(结论).

(2) 因为平行四边形的对边相等(大前提).
而 AB 和 DC 是 $\square ABCD$ 的对边(小前提).
所以 $AB = DC$(结论).

上面这种以某类事物的一般判断为前提，作出这类事物的个别特殊事物的判断的思维形式，叫做“演绎推理”，或“演绎法”.其中提供一般原理的判断叫做“大前提”；指出特殊场合的判断叫做“小前提”；反映一般原理与特殊场合联系的判断叫做“结论”. 如果在演绎推理中，大前提所提供的一般原理是真实的，小前提所指出的特殊场合也是真实的，那么所得的结论必然是真实的. 正是由于每个步骤所得结论的真实性，才保证了步骤序列最终达到的目标的可靠性. 因此，用顺推法思考并写出解答，可以说是以演绎法作基础的. 由此看来，我

们必须学好数学基础知识，或者说切实掌握数学中的一般因果关系。例如，对于范例1中的问题，根据条件就要知道如下因果关系：



否则起步的推理就无法进行。大致说来，只要读者熟知了这类因果关系，对于一个简单问题，分清了条件和目标(包括隐含的或没有明确陈述的)，解题途径通常也就清楚了。

尽管如此，读者应该认识到，用顺推法探索不熟悉问题的解题途径，往往不是轻而易举的。事实上，由范例1我们已经可以看出，由一个条件可以推出的推论通常有若干个，而由这些推论可以推出的推论又可能有若干个。如此形成的众多思路中，有的思路可能是“直路”，例如前面的解答所显示的那样；有的思路也可能是“弯路”，例如由对边平行不必要地多推出了一些其他角的关系，由平行四边形的性质推出了一些对角的关系，甚至由两对角线相交推出了一些隐含的角的关系(如$\angle 5=\angle 6$)等；还有的思路可能是“死路”，例如推去推来只在角的关系中绕圈子，而未接触到线段的关系。由上述情况可以看出用顺推法寻找解题思路的缺陷，那就是去路不清，歧路众多，难以一下找到通达目标的直路。

另外，上述情况也表明了用逻辑方法(特别是演绎法)思考问题的局限性。那就是思考过程虽然是严谨的、有条理的，

但过于固定的程式也妨碍了迅速找到解决问题的症结。因此要能灵活地运用顺推法，作为逻辑方法的补充，还要能结合运用非逻辑方法进行思考。假如读者解题时能按下面建议去做，一般将是有成效的：

第一，从整体上把握问题。例如对于范例1，我们不一定开始就集注于解决问题的细微的步骤分析，而可以对要解决的问题作一番战略性的审视，看出图形是一个被对角线剖分为若干个三角形的平行四边形，现在要推证的是线段相等的关系，这些线段位于对角线上，O 是它们的公共端点等等。这样我们就突破了审题的一般要求而大体掌握了问题的整体结构，与此同时还设计出了解决这个问题的总框架，即利用平行四边形对边的性质，得到对角线被 O 所分成的两线段相等。

第二，对解决问题的方向(与结果)作模糊估量。例如对于范例1，我们在作了战略性的审视后，也不一定马上动手进行推理，而可以根据已获得的信息大致地(或模糊地)估量一下，找到“利用全等三角形的对应边相等”这个可以解决问题的总方向。这里，思考方式可能有两种情况，一种是通常逻辑程序的压缩和简化，把它展开还是可以分解成一个个的演绎推理，例如范例1的解答所显示的那样；另一种是违反了通常逻辑程序而构成的跳跃式想象与猜测，例如由“轴对称图形一般用全等形处理”而直接作出上述判断(尽管平行四边形只具有中心对称性并不具有轴对称性)。总起来说，就是使思考问题的方式尽可能采取直接路径。

第三，对解题思路用图象表示。例如对于范例1，我们曾经用框图表示出解题思路，但那实际上只是解题的逻辑程

序的直观摹写。在寻找解题思路时，则可以运用具有某种程度抽象的、模式化了的图象，把它画出、部分画出或是就在脑子中构想。事实上，在对范例 1 的条件熟悉了以后就可设想为一个“点”，当进行了推理得到了推论后就可设想到达了另一个“点”，而要达到目标这个“点”，关键步骤就是达到“$\triangle ABO$ 与 $\triangle CDO$ 全等”这个“中途点”。利用这种图象有助于避免“弯路”与“死路”，从整体上把握住解题的方向。

读者将会看到，以上建议对于探索解题途径具有原则的意义[①]。下面我们再举一个例子，说明用顺推法寻找解题思路时，如何结合运用上述原则。

【范例 2】 如图 3 所示，自圆外一点 P 引切线，切点为 A。再由 PA 的中点 M 作圆的割线和圆交于 B、C 两点。连 PB、PC，分别交圆于 D、E 两点。试证：$DE \parallel PA$。

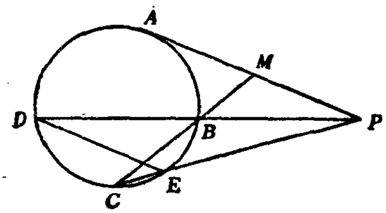


图 3

分析 这个问题的条件很多，有线段相等的关系，即 $MA=MP$；有圆的切线、割线和弦，以及它们的诸种相交关系。要证明的结论是单一的，即 $DE \parallel PA$，这可以由这两线与其他线相交形成的角的相等（或互补）关系确定，或由截割得到的线段的比例关系确定。

如果从三条不同的割线，即 MBC、PBD、PEC 出发，由切割线定理可得到三种线段的等量关系。但从合并利用条件

① 不论是运用顺推法，还是以其为基础的其他解题方法，都是如此。

$MA=MP$ 的全局考虑，我们很自然想到应从前一种线段的等量关系，即 $MA^2=MB\cdot MC$ 出发，进而得到 $MP^2=MB\cdot MC$，或 $\frac{MP}{MB}=\frac{MC}{MP}$. 显然，由线段的上述比例关系还不能确定我们所要得到的两线平行的关系；但由这些线段所在的位置却能确定 $\triangle MPB$ 与 $\triangle MCP$ 的相似关系，由此就可得到对应角相等的关系。至此，我们已可估量到，如果取"$\triangle MPB$ 与 $\triangle MCP$ 相似"这个中途点，将可得到某种使结论成立的角的关系. 循着这个方向，我们就不难得到解决这个问题的下述思路：

$$\left.\begin{array}{r} MA^2=MB\cdot MC \\ MA=MP \end{array}\right\}\Rightarrow MP^2=MB\cdot MC\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\frac{MP}{MB}=\frac{MC}{MP} \\ \angle PMB=\angle CMP\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\triangle MPB\backsim\triangle MCP\Rightarrow\angle MPB=\angle C \\ \angle C=\angle D\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\angle MPB=\angle D\Rightarrow DE\parallel PA.$$

在这章里，我们从解题的实质出发，讨论了解题的一种基本方法——顺推法. 应该说，只要读者通晓了数学的基础知识，对于简单的、常规的数学问题，用这种方法已足以应付；但是，对于复杂的、生僻的问题，由于这种方法的缺陷（尽管它是基本的），那就显得无能为力了。为此，我们有必要以顺推法为基础进而研究解题的一般规律和方法，这将构成全书的主题。

第二章

倒推法

在绪论和第一章中我们已看到，所谓探索解题途径，其实就是寻找联系问题的条件和目标的推理序列。由于在寻找这种联系时，条件和目标都可以作为我们思考的出发点，因而沟通两者的推理序列的“方向”相应也有两种：由条件至目标，或由目标至条件。

由目标至条件的定向思考方法，叫做倒推法。它是与顺推法仅仅思考方向相反，而其他并无本质差别的直接解题方法。

初学者在解题时通常习惯于从头开始，并且认定开头就是已知条件。但读者在第一章中已看到，解题时这个习惯并不合适，如果不把视线转向目标，从整体上把握问题，那问题总是难以解决的。实际上，在探索解题途径时目标往往是比条件更好的出发点。对目标的性质了解得越多，对达到目标的方式和方法就看得越清楚①。至于倒推的形式，则可以根据它是从目标出发索果还是索因，又具体分为两种。我们暂且把它们分别称为第一种倒推法与第二种倒推法，而用熟了

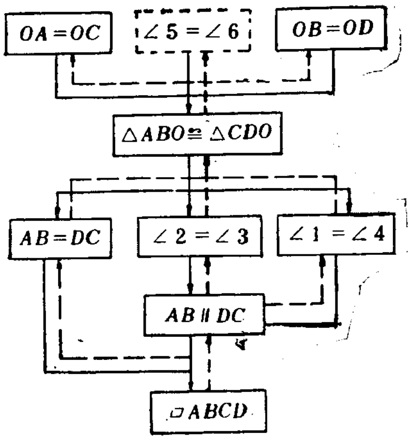
① 这里，读者最熟悉的例证就是解应用题：如果从未知数出发，把它们设为x、y等，这样求出未知数将比算术方法简单得多。对此，我们不必举例说明。

以后就没有区分的必要了。

第一节　第一种倒推法

如果我们假定目标已达到，把它作为条件倒过来进行推理获得结果，直至得到已知事实为止。这种倒推法就是我们要讲的第一种倒推法。

下面，我们对范例1进行这种倒推：



显而易见，从结论 $OA=OC$，$OB=OD$ 开始（加上隐含的 $\angle5=\angle6$），我们毫不费气力就得到了推论“$\triangle ABO$ 与 $\triangle CDO$ 全等”。而在第一章中已看到，这正是从出发点导向终点的关键的中途点。

然而，这种倒推不能代替我们对范例1的证明。这是因

为，按这种倒推方式得到的不过是范例1的逆命题。我们还得看看上面的推导是否步步可逆；如果确系步步可逆，我们才能把整个过程倒过来整理为顺推的程式，并进而写出解答。显然，对于范例1来说，这都是简单不过的事。逆推的过程我们已用虚线箭头在原图上加以标明，至于解答在第一章已写过了。

从上面的讲述可以看到，用第一种倒推法探索解题途径，除了把条件和目标颠倒以外，整个推导过程类似于顺推法，因而易于掌握。但是，这种倒推法有两点明显的局限：

第一，既然是把目标作为条件开始推理，那么目标应是明确的。但求解题的目标却是未知对象，因此这种倒推法一般不适用于求解题，而只适用于求证题。

第二，这种倒推法只能用于解决那些逆命题同样也是成立的问题。而且就是在逆命题成立时，如果把推导逆命题的过程倒过来，也不一定能推出原命题，例如，我们看下面的命题：

如果凸四边形 $ABCD$ 的两组对边的平方和相等，则凸四边形 $ABCD$ 的对角线互相垂直。

如图4所示，若以结论作为条件倒推，很容易得到它的逆命题：

$$AC\perp BD\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AB^2=OA^2+OB^2\\DC^2=OD^2+OC^2\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}AB^2+DC^2=OA^2\\ \quad +OB^2+OC^2+OD^2\end{array}\\ \left.\begin{array}{l}BC^2=OB^2+OC^2\\AD^2=OA^2+OD^2\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}BC^2+AD^2=OA^2\\ \quad +OB^2+OC^2+OD^2\end{array}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow AB^2+DC^2=BC^2+AD^2.$$

但若将上述推导过程反过来，则最后一步即不可逆，因而不能

作为证明原命题的思路①。

另外，我们还知道，当一命题的条件是多个时，则它的逆命题也将是多个的。因此，当用第一种倒推法探索解题途径时，与顺推法一样，除了“死路”以外，可行的途径也不是唯一的。如何选择倒推的终点，以及选择一条通向终点的“直路”，这里同样也需要先从整体上把握住解题方向，然后再循着方向一步步推下去。

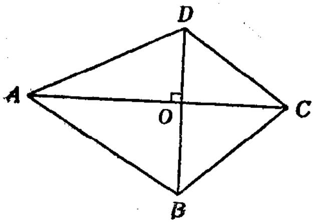


图 4

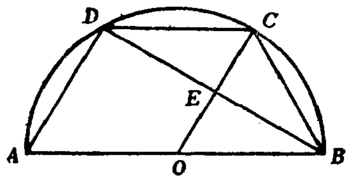


图 5

【范例 3】 如图 5，$\overset{\frown}{ADCB}$ 是以 O 为圆心的半圆，其中 $AD \parallel OC$，且 $\triangle BCD$ 的面积是四边形 $AOCD$ 的面积的一半。试证：$\triangle OBC$ 是正三角形。

分析 在这个问题的条件中，除 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{AOCD}$ 以外，由其他条件都易于导出新的性质。如由 $AD \parallel OC$，就可推出“同位角相等”、“内错角相等”及“同旁内角互补”等。又由问题的结论即“$\triangle OBC$ 是正三角形”，也易于导出结果。因此，我们考虑以 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{AOCD}$ 为终点进行倒推，即

① 这个问题我们将作为范例 20，在第三章中讲述解决它的思路。