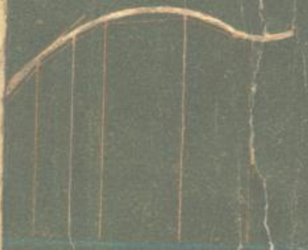

微積分

雷 垣　陈昌平编著

上海科学技术出版社

微 积 分

雷 垣 陈昌平 编著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是微积分学的基础。全书共分六章，第一章叙述一些预备概念，第二、三章介紹微分的基本运算和初步应用，后面三章介紹积分运算的基本原理及其各种应用。书中附有很多例題及习題，书末并有詳細的答案。

本书是一本自学用书，也可供函授部作为微积分学的教材

微 积 分

雷 垣 陈昌平 編著

*

上海科学技术出版社出版

（上海南京西路2004号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 10 2/32 字数 236,000

1960年1月第1版 1960年1月第1次印刷

印数 1—18,000

統一书号：13119·280

定 价：(十) 1.15 元

前　　言

微积分这門数学，簡单地說，就是无穷小量的計算理論和計算方法。譬如在濃度80%的100升酒精中連續均匀地加水，每小时加进20升，則从开始加水时起，一小时一小时地看濃度变化，应有下面的关系：

时間(以小时为单位)	0(开始时)	1	2	……	n	……
酒精濃度：$\frac{\text{純酒精体积}}{\text{溶液总体积}}$	$\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$	$\frac{80}{120}=\frac{4}{6}$	$\frac{80}{140}=\frac{4}{7}$	……	$\frac{80}{100+n\cdot 20}=\frac{4}{5+n}$	……

如果要求出濃度的变率(即每小时濃度变多少)，就必須用微分法。因为我們看到在第一小时中濃度由$\frac{4}{5}$变到$\frac{4}{6}$，即一小时減小$\frac{4}{5}-\frac{4}{6}=\frac{4}{30}$，而在第二小时中濃度由$\frac{4}{6}$变到$\frac{4}{7}$，即一小时減小$\frac{4}{6}-\frac{4}{7}=\frac{4}{42}$；因此我們不能用初等数学运算来得到整个过程中的一个濃度变率，就由于这变率本身也时时刻刻在变；不仅每一小时不同，每一分鈡、每一秒鈡、甚至每一瞬間，都不相同$\Big($例如在第一小时中已知一小时濃度減小$\frac{4}{30}$，那末半小时是否減小$\frac{2}{30}$呢？容易推算出在开头半小时中濃度由$\frac{80}{100}$变到$\frac{80}{110}$，即半小时減小$\frac{80}{100}-\frac{80}{110}=\frac{4}{55}$，大于$\frac{2}{30}\Big)$。我們用微分法就能够得到反映整个过程中每一瞬間的濃度变化的一个函数，即所謂瞬間变率，它要求我們不是一小时一小时而是一瞬間一瞬間看濃度变化，也就是把演算要施行于无穷小量之上。

再譬如要計算一張長方形紙的面积，只須把相邻两边的长度相乘就可以了；但若在这張紙上要剪出几个扇面并算出这些扇面的面积或剩料的面积，那就不能依靠量长度和四则运算了。对一般的曲边平面或曲面的面积，以及一些立体形的体积，我們就要用积分运算来求。当然微积分的用处是非常广泛的，許多初等数学运算所不能解决的它都能解决，初等数学运算能解决的它也能解决，而且解决得更簡捷、更透彻（如极大极小問題）。在生产建設的許多方面，如建筑、桥梁、公路，制造飞机、火箭、卫星等等，都有微积分的足迹。

本书内容只是微积分学的基础，把微分积分这两个基本运算，包括基本理論和性质以及一些初等应用，介紹給讀者。在提出这两个运算以前，必須提供一些預备知識，那就是对实数、复数性质的認識，以及对变量、函数、极限、連續等概念的了解。当然，解析几何是讀者事先应已具备的知識。在学习本书时要多多連系具体例題来研讀，并勤做練习，这样就較易了解和消化理論部分；遇到看不懂的地方多看几遍，連系前后，反复玩味，努力思考；有的时候可以把一时难于理解的部分暂时放过，先看下去，等看完整个单元后回过来再讀；用具体例子来比拟体驗理論总是帮助理解的最好方法。做好复习討論題对巩固所学内容是非常重要的。

目 录

一、数，变量，函数

1. 自然数，有理数，无理数，实数，复数

表示东西的个数或件数的就是**自然数**，如 1, 2, 3, ……等。两个自然数相加或相乘仍得自然数。但两个自然数相减或相除就不一定得到自然数，如 $2-3$，$2\div3$ 都得不出自然数。倘使我們扩充单由自然数构成的数系，引进了負数：-1，-2，-3，……等和 0，就使减法在这范圍内通行无阻；再引进正負分数，则除法也能通行无阻了（当然用 0 来除任何数是被认为沒有意义的）。

自然数和它們的負数以及 0 合称为**整数**，整数与分数全体称为**有理数**。有理数就是可以用由整数作分子分母的分式来表示的这种数，如 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{1}=2$，$\frac{-2}{3}$，$\frac{3}{-2}$，……等$\left(0\text{ 当然也是，因为 }0=\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\cdots\cdots\right)$。

根据这个定义，$\sqrt{2}$ 就不是有理数。因为若是有理数，它就可用分式表示，而且經过約分可使这分式的分子分母成为互素（沒有大于 1 的公約数）的两个整数 p 和 q。現在不妨假定 $\sqrt{2}$ 是有理数，則 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$，即 $2q^2=p^2$。由于左方有因子 2（能被 2 整除），故 p 必为偶数（若是奇数，它的平方仍是奇数，就不能被 2 整除了）。設 $p=2m$，其中 m 也是整数，这样就有 $2q^2=(2m)^2=4m^2$，两方約去 2 得 $q^2=2m^2$，这表示 q 也必須是偶数，那就要和 p 有公約数 2 了，这与 p 和 q 互素的假定是矛盾的，所以 $\sqrt{2}$ 不能由分子分母为整数的分式来表示。这样的数我們称它为**无理数**。$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{2}$，$\sin1^\circ$，$\log2$，π，……等也是无理数，我們不在这里一一証明了。

无理数与有理数一样，可用数轴上的点或用綫段的长度来表示。例如註长度为一单位的綫段表示1，那末长度为二单位的綫段表示2。图1中的直角三角形，两直角边的长度各为一单位，因此斜边的长度应为$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$单位，这綫段的长度就表示着无理数$\sqrt{2}$。在图2中的数軸上，点P_1, P_2, P_3和P_4分别表示1，$\sqrt{2}, \frac{5}{2}, -2.5$等数。

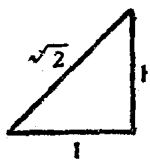

图1

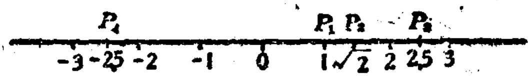

图2

无理数还和有理数一样可用小数来表示，只是有理数总是用有尽小数或循环小数来表示，而无理数则必須用非循环的不尽小数来表示。因此无理数具有与有理数一样的现实性，并且这两种数还有統一的关于大小次序的性質。由于这些理由，我們把有理数和无理数合称为实数，在这一个数系里加减乘除还是可以通行无阻（零不能作除数）。

在微积分学中所有的演算一般都是在实数范圍内进行的。这里要用到实数的两个最重要的基本性質，那就是稠密性和連續性。稠密性就是說在任二相异实数之間，不管它們相差得多么微小，总可找到另一个比小的一个大，比大的一个小的实数（这性質在有理数系內也存在）。連續性可用所有实数与数軸上的所有点一一对应（每点表示一实数，每一实数必有一点来表示它，不同的点表示不同的实数）这事实来說明，全部实数所对应的全部点恰好构成整个一条連續的无穷长直綫，其中毫无空隙。

由于我們把有理数系扩充为实数系，就使得开方运算的施行范圍得以扩大，如$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{2}$等在有理数系內沒有意义，而在实数系內它們都有确定的实数值。但是要把一个負数的平方根放

在实数系內还是沒有意义的，因为在实数系內是有"正乘正及負乘負都得正"这样一个法則，所以沒有任何实数的平方会得出負数。例如$\sqrt{-1}$就决不是一个实数，因为不存在一个实数自乘起来会等于-1的。我們若把$\sqrt{-1}$看作一个新的数，用i代表，而把数系扩充为所有可以表成$a+bi$形式的数的全体，这里a和b表示任何实数（当b是0时，$a+bi=a$就是实数），那末我們就得到所謂复数，在这数系內加減乘除（零不作除数）以及开平方、开立方一直到开任意次根都能通行无阻。例如：

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=\pm 2i;$$

$$\sqrt{1+2\sqrt{2}\,i}=\pm(\sqrt{2}+i)$$

$$\sqrt[3]{1}=1,\omega,\omega^2,\left(\omega=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

复数的四則运算法則如下：

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2\pm b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$$

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

复数$a+bi$与$a-bi$称为是相互共軛的（其一为另一的共軛数）。用平面直角坐标系也可把复数由几何点来表示。如图3以复数的实部a为横坐标，其虛单位i的系数b作为纵坐标，所得的点就表示复数$a+bi$。这个复数平面也称高斯平面。

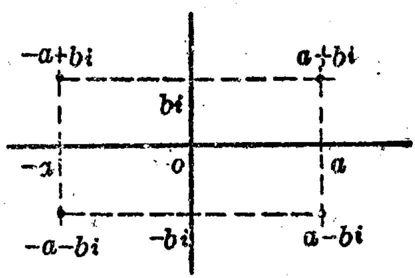

图 3

习 題 1-1

思考題：

1. 数π与数3，4三个数中，何者为有理数，何者为无理数？
2. 在哪些問題中需要接触到无理数？
3. 怎样用十进小数来表示有理数和无理数？

4. 实数的几何图形表示如何？

5 在数軸上的全部有理数点間是不是无空隙的？

6. 复数的几何图形表示如何？

7. 二个复数的和何时为实数，何时为純虛数（即实部为0）？一般的講，二复数的和是在什么数系內的数？

8. 二个共軛复数的几何图形表示是怎样的？

9. 二共軛复数的和、差、积是什么数系內的数？

演算題：

1. 以一厘米为长度单位，試用圓規直尺在数軸上表出数

$\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 2\frac{1}{3}$

2. 求下列各对复数点間的距离：

(1) $-2i$ 与 $6i$　　(2) $3i$ 与 $-3i$　　(3) $-4i$ 与 i

3. 計算：

$3(-4i)(-i)(-2i)=?$　　$2i\cdot3i\cdot4i\cdot0.2i=?$

$(3+4i)+(3-4i)=?$　　$(3+4i)-(3-4i)=?$

4. 計算：

$(3+4i)(3-4i)=?$　　$(3+4i)\div(3-4i)=?$

$(1-i)(1+i)+(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})-(3+2i\sqrt{2})(3-2i\sqrt{2})=?$

5. 解下列方程式：

(1) $(x^2-5)^2+(x^2-1)^2=40$　　(2) $10x^4-x^2-21=0$

(3) $6x^4-11x^2-35=0$

2. 变量与常量，极限，无限大

在数学的式子里，有些数量是确定不变的，不管它們是具体数字或代表某数的文字，它們都叫作**常量**；有些数量則可取得許多不同数值，可用一定的文字来代表，它們不固定地代表哪几个数，因此被称为**变量**。例如在圓柱体的表面积公式 $M=2\pi rh$ 中，数量2与 π 是常量，而数量 r，h 与 M 为变量，因为这公式适用于任意的圓柱体，我們可任意取不同的半徑 r 和不同的高度 h，而相应的圓柱体也就有不同的形状，也可以有不同的表面积 M。

若一个变量 x 可以取数 a 与数 b 之間的一切实数值，那末 x

称为在域或区間(a,b)内的連續变量。这种域称为开域或开区間，那就是說它的两端 a 与 b 是不在 x 所能取的数值之內的。若 a 与 b 也在 x 所能取的数值之內，則这域称作是閉域或閉区間，記作 $[a, b]$。用不等式表示就是：

开区間　　　$(a, b) \longleftrightarrow a<x<b$

閉区間　　　$[a, b] \longleftrightarrow a\leqslant x\leqslant b$

也可有半开半閉的区間：

$$(a, b] \longleftrightarrow a<x\leqslant b \quad \text{或} \quad [a, b) \longleftrightarrow a\leqslant x<b$$

在表示区間的括号中我們总是把較小的数写在左边，較大的数写在右边；这里我們是假定 a 小于 b 的，因此 a 左 b 右。

我們弄清了常量与变量的意义，就可以引进极限的概念了。前面已經說过，π 是一个常量，它是一个确定的无理数，是一个不尽的小数；我們在应用中只能用有限数字来写出 π 的近似值。那末我們怎样来挑取近似值呢？这近似值与 π 的真值有怎样的关系呢？

由于 π 等于任何一个圓的周长与直徑之比，π 的真值与近似值的关系，可以从圓周的长与圓的內接及外接正多边形的周长的关系中看出，而这种关系恰好体現了极限的概念。例如我們从圓內接正三角形 $\triangle ABC$ 及外接正三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 开始（图 4 左），若圓的半徑为 r（直徑为 $2r$），圓心为 O，則 $\triangle ABC$ 的周长应为：

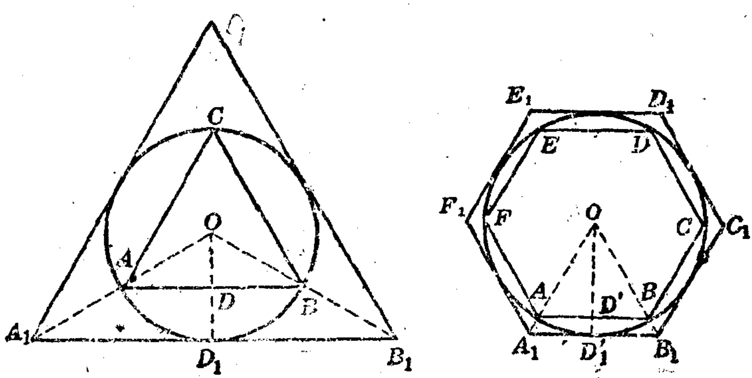

图 4

$$u_3=3\overline{AB}=3\cdot 2\overline{DB}=3\cdot 2\overline{OB}\sin\angle BOD$$
$$=3\cdot 2r\sin\frac{360^\circ}{6}=2r\cdot 2.59808\cdots\cdots$$

$\triangle A_1B_1C_1$ 的周长应为：

$$U_3=3\,\overline{A_1B_1}=3\cdot 2\overline{D_1B_1}=3\cdot 2\overline{OD_1}\,\mathrm{tg}\angle B_1OD_1$$
$$=3\cdot 2r\,\mathrm{tg}\frac{360^\circ}{6}=2r\cdot 5.19615\cdots\cdots$$

而圓的周长 u 应大于 u_3 而小于 U_3，即 $u_3<u<U_3$。若把三角形的边数加倍而考虑圓的内接正六边形 $ABCDEF$ 与外接正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$（图 4 右），則其相应的周长应为：

$$u_6=6\cdot 2r\sin\frac{360^\circ}{12}=2r\cdot 3,\quad U_6=6\cdot 2r\,\mathrm{tg}\frac{360^\circ}{12}=2r\cdot 3.46410\cdots\cdots$$

而 $u_6<u<U_6$。显然 u_6 与 U_6 比 u_3 与 U_3 更为接近 u。这样的繼續增加多边形的边数，可以得到下面一系列的数值：

	内接正 n 边形周长	外接正 n 边形周长
$n=12$	$u_{12}=2r\cdot 3.10583\cdots\cdots$	$U_{12}=2r\cdot 3.21539\cdots\cdots$
24	$u_{24}=2r\cdot 3.13263\cdots\cdots$	$U_{24}=2r\cdot 3.15966\cdots\cdots$
48	$u_{48}=2r\cdot 3.13935\cdots\cdots$	$U_{48}=2r\cdot 3.14609\cdots\cdots$
96	$u_{96}=2r\cdot 3.14103\cdots\cdots$	$U_{96}=2r\cdot 3.14271\cdots\cdots$
192	$u_{192}=2r\cdot 3.14145\cdots\cdots$	$U_{192}=2r\cdot 3.14187\cdots\cdots$
384	$u_{384}=2r\cdot 3.14156\cdots\cdots$	$U_{384}=2r\cdot 3.14166\cdots\cdots$
768	$u_{768}=2r\cdot 3.14158\cdots\cdots$	$U_{768}=2r\cdot 3.14161\cdots\cdots$
……	…………………………	…………………………
n	$u_n=2r\cdot n\cdot\sin\frac{360^\circ}{2n}$	$U_n=2r\cdot n\cdot\mathrm{tg}\frac{360^\circ}{2n}$

由于 u_{768} 与 U_{768} 只相差 $2r\cdot 0.00004$ 弱，我們若取 u_{768} 与 U_{768} 間的任一数，例如 $2r\cdot 3.14159$，作为 u 的近似値，其誤差决不超过 $2r\cdot 0.00004$（因为 u 的眞値也在 u_{768} 与 U_{768} 之間）。用数軸来表示，大致如下图：

图 5

当 n 逐漸增大时(卽多边形边数逐漸加多)，u_n 逐漸增大而 U_n 逐漸減小，因此 U_n 与 u_n 的差也逐漸減少；而且我們可以挑定适当的正数 N，使所有符合 $n>N$ 的 U_n 与 u_n 的差，卽 U_n-u_n，都小于預先給出的任意小量 $\varepsilon(\varepsilon>0)$，卽 $U_n-u_n<\varepsilon$。由于 ε 可以給得任意的小，因此 U_n-u_n 可以无限止的迫近 0，只要 n 无限止的增大好了。这样的情形我們称为：当 n 趋向无限大时 U_n-u_n 的极限等于 0，用符号表示如下：

$$\lim_{n\to\infty}(U_n-u_n)=0$$

这里 0 为常量，而 n, u_n, U_n, 以及 U_n-u_n 都是变量。由于 $u_n<u<U_n$，卽 u 总是在 u_n 与 U_n 之間，因此差 $u-u_n$ 及差 U_n-u 也可以无限止的迫近 0，只要 n 无限止的增大好了。所以我們有

$$\lim_{n\to\infty}(u-u_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}(U_n-u)=0$$

这里 u 是常量(代表固定圓周的长度)，而 n, u_n, 及 U_n 是变量；我們也可以改写为：

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u,\ \lim_{n\to\infty}U_n=u$$

就是説，当 n 趋向无限大时，u_n 与 U_n 的极限都等于 u；也就是説，当圓的內接和外接正多边形的边数无限加多时，它們的周长就无限止地迫近圓周的周长。現在我們只要把 u_n 代以 $\frac{u_n}{2r}=n\cdot\sin\frac{360^\circ}{2n}$，把 U_n 代以 $\frac{U_n}{2r}=n\cdot\mathrm{tg}\frac{360^\circ}{2n}$，把 u 代以 $\frac{u}{2r}=\pi$；根据不等式的性質，从 $u_n<u<U_n$ 推出

$$\frac{u_n}{2r}<\frac{u}{2r}<\frac{U_n}{2r},\ \text{卽}\ n\cdot\sin\frac{360^\circ}{2n}<\pi<n\cdot\mathrm{tg}\frac{360^\circ}{2n}$$

按照前述的情况，同样有 $\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\mathrm{tg}\frac{360^\circ}{2n}-n\cdot\sin\frac{360^\circ}{2n}\right)=0$，从而得出

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin\frac{360^\circ}{2n}=\pi,\quad \lim_{n\to\infty}n\cdot\mathrm{tg}\frac{360^\circ}{2n}=\pi$$

用 $n=768$，我們可取在区間 $\left(768\sin\frac{360^\circ}{1536},768\,\mathrm{tg}\frac{360^\circ}{1536}\right)$ 內的任意

数,例如 3.14159,作为 π 的近似值,其誤差不超过 0.00004(事实上必小于此数)。用更大的 n 就可以得到精确度更高的 π 的近似值。

与极限有关的另一个概念是数列。数列就是一組按照自然数的順序排列起来的数。若数列中的数只有有限个,則称有限数列;若数列中的数有无穷多个,則称无限数列。上面的多边形周长:

$$u_3,\ u_6,\ u_{12},\ u_{24},\ u_{48},\ u_{96},\ u_{192},\ u_{384},\ u_{768},\ \cdots\cdots,\ u_n,\ \cdots\cdots \quad (1)$$

及 $U_3,\ U_6,\ U_{12},\ U_{24}U_{48},\ U_{96},\ U_{192},\ U_{384},\ U_{768},\ \cdots\cdots U_n,\ \cdots\cdots$ (2)

都是无限数列;若从 u_3 到 u_{768} 止,后面的数列不要,那就是有限数列。全部自然数:$1, 2, 3, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots$ 及它們的倒数 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots \frac{1}{n}, \cdots\cdots$ 也构成两个无限数列。

若数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$ 中每一項总小于其后一項,即 $a_{i+1}>a_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n,\ \cdots\cdots$,則称为单調遞增;反之,若每一項总大于其后一項,即 $a_{i+1}<a_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n,\ \cdots\cdots$,則称单調遞減。数列(1)及自然数列都是单調遞增的,而数列(2)及自然数的倒数列都是单調遞減的。

现在我們可把前面关于圓周与內接外接正多边形周长的研討概括为下面的定理。

定理: 設已知一个数量在两个数列之間,就是說,它大于一个数列中所有的数而小于另一个数列中所有的数;而这两个数列的一个是单調遞增的,另一个是单調遞減的,并且它們对应項(第一項与第一項,第二項与第二項,……)的差可达到任意的微小,只要把对应項取在数列的适当多的項以后。那末这个数量就可以用根据这两个数列的数所挑选出来的数来近似地代表,其誤差可任意的压小。这样我們就說这个数量是該二数列的共同极限。在前例中 u 就是数列(1)与数列(2)的共同极限,因为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \lim_{n\to\infty} U_n = u$$

一般的講,若規定一个变量 x 可依次取无限多个值 $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n,\ \cdots\cdots$,而当 n 适当的大时,x_n 与一个定量 a 的差可达到任意

的微小，那末我們說：x 趋向 a，或 x 收斂到 a，或 x 迫近于极限値 a，写作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$（讀作：$n$ 趋向无限大时 x_n 的极限等于 a，或 x_n 趋向 a）。我們也可以說：x 趋向 a（記为 $x\to a$）卽絕对値 $|x_n-a|$ 最終將达到小于預先給出的任意小量 ε（$\varepsilon>0$），且从此将永远如此。用不等式表示如下：

$$0<|x_n-a|<\varepsilon \text{ 或 } a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

例：x_n 为数列 0.3, 0.33, 0.333, ……，而 $a=\frac{1}{3}$

$$\text{則}\quad |x_n-a|=a-x_n=\frac{1}{3}-0.3\overbrace{3\cdots33}^{n\text{个}3}=\frac{1}{3}-\frac{\overbrace{33\cdots3}^{n\text{个}3}}{10^n}$$

$$=\frac{10^n-\overbrace{99\cdots9}^{n\text{个}9}}{3\cdot10^n}=\frac{1}{3\cdot10^n}=\delta$$

显見当 n 充分大时 δ 可达任意微小，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{3}$$

也就是

$$\lim_{n\to\infty} 0.\overbrace{33\cdots3}^{n\text{个}3}=\frac{1}{3}$$

若变量 x 的値趋近极限値 0，則 x 称为无穷小量，这就是

$$x\to0 \quad \text{或} \quad \lim x=0$$

但这里 x 实际取得的値可以是非 0 的有限数，每一个値本身都非无穷小，須知无穷小量不是一个确定的数，而是一个变量，它的极限値是 0。例如变量 x 依次取値 $\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10^2}$，$\frac{1}{10^3}$，……，$\frac{1}{10^n}$，……，則其极限値 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0$，故它是一个无穷小量，但它取的値 $\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10^2}$，$\frac{1}{10^3}$，……等却都是非 0 的有限常数。

在微分运算中无穷小量占着重要的地位。与无穷小相仿，我們来下无穷大的定义：若变量 x 的絕对値 $|x|$ 可以超过任意大的数 a（$a>0$），則 x 称为无穷大，写作 $x\to\infty$ 或 $\lim x=\infty$。同样要注意：无穷大 ∞ 决不是一个确定的数値。例如取値 1, 2, 3, ……的

变量 n 就是。

习　題　1-2

思考題：

1. 何謂常量与变量？
2. 怎样計算数 π？
3. 何謂数列？
4. 何謂一个变量 x 收斂到 a？
5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 是什么意思？

演算題：

若变量 x 依次取値 0.6, 0.66, 0.666, ……, 証明：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$$

3. 函数的概念与例

一个圓柱形鍋子的周圍长度是 $U=2\pi r$，其底的面积是 $F=\pi r^2$，这里 r 代表鍋子的半徑。我們若变半徑 r 的大小，就相应的得到不同大小的鍋子，它們有不同的周长 U 和不同的底面积 F。例如下表：

$r=$	1	2	3	4	5	6	……	10	……
$U=$	2π	4π	6π	8π	10π	12π	……	20π	……
$F=$	1π	4π	9π	16π	25π	36π	……	100π	……

由此可見，U 与 F 的値是依 r 的値而定。对这样的相依关系，我們就説：U 与 F 各为 r 的**函数**，而記作 $U=f(r)$，$F=\varphi(r)$，其中 f 与 φ 分别表示 U 与 F 是怎样依賴 r 的各关系。也可以这样説：U 按規定的方式依系于 r，或 U 是依 r 而变的变量，这与 U 是 r 的函数都是同义的。我們若在等式 $U=2\pi r$ 中解出 r 来，则得

$$r=\frac{U}{2\pi}=\psi(U)$$

这样就表示 r 依 U 而变，也就是説 r 是 U 的函数。