目　　录

第二部分　发展和应用

第十章 非标准有限元方法

第七章 有限元方法在工程中的一些应用

有限元方法和近代电子计算机相结合在工程科学中的应用已获得了历史性的成功。这一章，选择了一些工程中经常遇到的和我们在科学研究中已经得到实际应用的问题，作为应用有限元方法的实例，给予较详细的介绍。

这里所采用的是任意曲线坐标系，它的好处在于，无论是直角坐标系或根据研究对象的几何特性而选择的特殊坐标系，都是适用的。

设x^i为曲线坐标系，g_{ij}、g^{ij}分别为度量张量的协变分量和逆变分量，且$g=\det[g_{ij}]$；δ_{ij}，δ^{ij}、δ^i_j均为Kronecker记号；ε_{ijk}、ε^{ijk}、$\varepsilon_{ij}^{\ \ k}$分别为行列式张量的协变分量、逆变分量和混合分量；$\Gamma_{ij,k}$、Γ^k_{ij}分别为第一，第二类型Christoffel记号，它与度量张量有如下关系

$$\Gamma_{ij,k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

$$\Gamma^k_{ij}=g^{km}\Gamma_{ij,m}$$

任一向量$\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{e}_i=u_i\boldsymbol{e}^i$，它的协变导数为

$$\nabla_i u^j=\frac{\partial u^j}{\partial x^i}+\Gamma^j_{ik}u^k$$

$$\nabla_i u_j=\frac{\partial u_j}{\partial x^i}-\Gamma^k_{ij}u_k$$

这里，凡是上下标相同者均表示求和。这个约定以后均不再加以说明。

§ 1 连续介质力学中的微分方程

形变张量和形变速度张量

设可变形物体内一点M的矢径$\boldsymbol{r}_0(x^i)$，变形后矢径为$\boldsymbol{r}(x^i)$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{u}(x^i)$$

其中$\boldsymbol{u}(x^i)$称为位移向量。若点$M'(x^i+dx^i)$与M无限接近，$d\boldsymbol{r}_0=\overline{MM'}$，变形后记为$d\boldsymbol{r}$，那么

$$d\boldsymbol{r}=d\boldsymbol{r}_0+d\boldsymbol{u}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial x^i}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i}\right)dx^i$$

记$\boldsymbol{e}_i=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial x^i}$，它是局部标架向量。且

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}(u^j\boldsymbol{e}_j)=\frac{\partial u^j}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_j+u^j\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial x^i}=\frac{\partial u^j}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_j$$

$$+u^j\Gamma^k_{ji}\boldsymbol{e}_k=\nabla_i u^j\cdot\boldsymbol{e}_j \qquad (1.1)$$

其中u^j是位移向量$\boldsymbol{u}$的逆变分量，而$\nabla_i u^j$是一阶协变导数，故

$$d\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j\nabla_i u^j)dx^i=(\delta^j_i+\nabla_i u^j)\boldsymbol{e}_j dx^i$$

设$d\hat{x}^j$为变形后的向量$d\boldsymbol{r}$的逆变分量，那么

$$d\hat{x}^j=(\delta^j_i+\nabla_i u^j)dx^i \qquad (1.2)$$

(1.2) 说明，变形后，M点的无限小邻域受到仿射变换，

变换算子是单位张量和张量$\nabla_i u^j$之和。而$\nabla_i u_j$可分解为对称张量和斜对称张量之和。

$$\nabla_i u_j=\frac{1}{2}(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i)+\frac{1}{2}(\nabla_i u_j-\nabla_j u_i)$$

对称张量$e_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i)$ 是物体纯变形的度量，称为微小形变张量，而$c_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_i u_j-\nabla_j u_i)$ 则是描述物体转动的。

若记$\boldsymbol{v}$为可变形物体内任一点的位移速度向量，在无限小的时间内$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\Delta t$，那么$e_{ij}$称为形变速度张量，它是描述运动中微元纯粹变形的。

对有限变形可以这样来考虑，设在M点，变形前弧微分为

$$ds^2=d\boldsymbol{r}_0\cdot d\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{e}_i dx^i\cdot\boldsymbol{e}_j dx^j=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j dx^i dx^j$$
$$=g_{ij}dx^i dx^j$$

变形后，弧微分为

$$\delta s^2=d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=(\delta_i^j+\nabla_i u^j)\boldsymbol{e}_j dx^i\cdot(\delta_m^k+\nabla_m u^k)\boldsymbol{e}_k dx^m$$
$$=g_{jk}(\delta_i^j\delta_m^k+\delta_i^j\nabla_m u^k+\delta_m^k\nabla_i u^j$$
$$+\nabla_i u^j\cdot\nabla_m u^k)dx^i dx^m=(g_{im}+g_{ik}\nabla_m u^k$$
$$+g_{jm}\Delta_i u^j+g_{jk}\nabla_i u^j\cdot\nabla_m u^k)dx^i dx^m$$

由于度量张量g_{ij}的协变导数为零，即$\nabla_m g_{jk}=0$，且注意到$u_i=g_{ij}u^j$，故

$$\delta s^2-ds^2=(\nabla_m u_i+\nabla_i u_m+\nabla_i u_k\cdot\nabla_m u^k)dx^i dx^m$$

二阶协变张量

$$D_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i+\nabla_i u_m\cdot\nabla_j u^m) \qquad (1.3)$$

称为有限形变张量

应力张量 弹性体中，企图反抗变形而产生的内力，用应力张量来刻划它。在流体中，其运动过程，由于全压力和内摩擦也会产生一种内力，同样可用应力张量来描述它。

设 $d\boldsymbol{s}$ 为介质内任一有向无限小面元，在变形过程中，$d\boldsymbol{s}$一侧的介质通过$d\boldsymbol{s}$以一定的力作用于另一侧。同样，另一侧则以大小相等，方向相反的力作用于这一侧，这个力称为作用于已知有向面元的全应力。若用$\boldsymbol{F}$表示作用于$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}ds$上的全压力，则$\boldsymbol{F}$视为$d\boldsymbol{s}$的函数，而且是线性函数

$$\boldsymbol{F}=\mathscr{F}(d\boldsymbol{s})=\mathscr{F}(\boldsymbol{n}ds)=\mathscr{F}(\boldsymbol{n})ds=\boldsymbol{P}ds \qquad (1.4)$$

$\boldsymbol{P}$就是作用在有向单位面元上之全应力。引用连续介质力学中的已知结果，$\boldsymbol{P}=\mathscr{F}(\boldsymbol{n})$ 是由$\boldsymbol{n}$的仿射变换而得到的，$\mathscr{F}$是对应的应力仿射量，仿射量可由一个二阶张量来描述

$$\boldsymbol{P}=\{\tau^{ij}n_j\}$$

n_j为$\boldsymbol{n}$的协变分量，τ^{ij}称为应力张量，且

$$P^i=\tau^{ij}n_j \qquad (1.5)$$

当$\boldsymbol{n}=\{1, 0, 0\}$时，$\tau^{i1}$表示作用在垂直于局部仿射标架向量$\boldsymbol{e}_1$之单位面积上的全应力。因此，$\tau^{ij}$表示作用在垂直于$\boldsymbol{e}_j$之单位面元上全应力之第 i 个分量。易证应力张量是对称的

$$\tau^{ij}=\tau^{ji}$$

协变应力张量可以通过指标下降而得到

$$\tau_{ij}=g_{il}g_{jm}\tau^{lm}$$

其中g_{ij}为度量张量。

线性弹性力学中应力张量和形变张量之依存关系 应力和形变，是外部原因作用下介质内部发生的现象，Hooke定律揭示了在微小变形理论中，应力张量线性地依赖于形变张

量的关系

$$\tau^{ij} = E^{ijkm}e_{km}, \qquad \tau_{ij} = E_{ijkm}e^{km} \tag{1.6}$$

其中 E^{ijkm}, E_{ijkm} 称为弹性系数，它们分别是4阶逆变张量和协变张量。它们之间可以通过指标上升或指标下降相互转换。

$$E^{ijkm} = g^{ip}g^{jq}g^{kl}g^{mt}E_{pqlt},$$

$$E_{ijkm} = g_{ip}g_{jq}g_{kl}g_{mt}E^{pqlt}$$

对于各向同性的均匀介质，弹性系数可以通过 Lamè 常数λ，μ和度量张量来表示

$$\begin{cases} E^{ijkm} = \lambda g^{ij}g^{km} + \mu(g^{ik}g^{jm} + g^{jk}g^{im}) \\ E_{ijkm} = \lambda g_{ij}g_{km} + \mu(g_{ik}g_{jm} + g_{jk}g_{im}) \end{cases} \tag{1.7}$$

而Lamè常数λ，μ和杨氏模量E，剪切模量G，Poisson 比ν有如下的关系

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.8}$$

若将(1.7)代入(1.6)的第一式，则得

$$\tau^{ij} = \lambda g^{ij}g^{km}e_{km} + \mu(g^{ki}g^{jm}e_{km} + g^{jk}g^{im}e_{km})$$

由于

$$g^{km}e_{km} = \frac{1}{2}g^{km}(\nabla_k u_m + \nabla_m u_k) = \frac{1}{2}(\nabla_k u^k + \nabla_m u^m)$$

$$= \nabla_k u^k = \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$$

即$g^{km}e_{km}$是个不变量，它表示位移向量的散度。又由g^{ij}、e_{km}的对称性，有

$$\tau^{ij} = \lambda g^{ij}\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} + 2\mu g^{ik}g^{jm}e_{km} \tag{1.9}$$

进而由

$$g^{ik}g^{jm}e_{km}=\frac{1}{2}g^{ik}g^{jm}(\nabla_k u_m+\nabla_m u_k)$$

$$=\frac{1}{2}(g^{ik}\nabla_k u^j+g^{jm}\nabla_m u^i)=\frac{1}{2}(\nabla^i u^j+\nabla^j u^i)$$

$$=e^{ij} \qquad (1.10)$$

代入（1.9）得

$$\tau^{ij}=\lambda g^{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{u}+2\mu e^{ij} \qquad (1.11)$$

同理有

$$\tau_{ij}=\lambda g_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{u}+2\mu e_{ij} \qquad (1.12)$$

为使用上的方便，形变张量也可以通过下列式子来表示：

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(g_{jm}\frac{\partial u^m}{\partial x^i}+g_{im}\frac{\partial u^m}{\partial x^j}+u^m\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right) \qquad (1.13)$$

$$e^{ij}=\frac{1}{2}\left(g^{jm}\frac{\partial u^i}{\partial x^m}+g^{im}\frac{\partial u^j}{\partial x^m}-u^m\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^m}\right) \qquad (1.14)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u}=\frac{\partial u^i}{\partial x^i}+\frac{\partial\ln\sqrt{g}}{\partial x^i}u^i \qquad (1.15)$$

实际上

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i)=\frac{1}{2}(g_{jm}\nabla_i u^m+g_{im}\nabla_j u^m)$$

$$=\frac{1}{2}\left(g_{jm}\frac{\partial u^m}{\partial x^i}+g_{im}\frac{\partial u^m}{\partial x^j}+g_{jm}\Gamma^m_{ik}u^k\right.$$

$$\left.+g_{im}\Gamma^m_{jk}u^k\right)=\frac{1}{2}\left(g_{jm}\frac{\partial u^m}{\partial x^i}+g_{im}\frac{\partial u^m}{\partial x^j}\right.$$

$$+(\Gamma_{ik,j}+\Gamma_{jk,i})u^k\Big)=\frac{1}{2}\Big(g_{jm}\frac{\partial u^m}{\partial x^i}$$

$$+g_{im}\frac{\partial u^m}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}u^m\Big)$$

$$e^{ij}=g^{ip}g^{jq}e_{pq}=\frac{1}{2}\Big(g^{ip}\frac{\partial u^j}{\partial x^p}+g^{jp}\frac{\partial u^i}{\partial x^p}$$

$$+g^{ip}g^{jq}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}u^m\Big)$$

由于$g^{ip}g_{pj}=\delta^i_j$，得$g^{ip}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}=-g_{pq}\frac{\partial g^{ip}}{\partial x^k}$，故得(1.4)。

流体力学中应力张量和形变速度张量之间的依从关系

当是理想流体时，没有内摩擦，而ds上的全应力仅仅是作用在ds上的全压力。它在每个方向的数值都一样，这时

$$\tau^{ij}=-pg^{ij} \tag{1.16}$$

其中p为通常的压力。

当流体是粘性的时，τ^{ij}可以分解为两部分

$$\tau^{ij}=-pg^{ij}+t^{ij} \tag{1.17}$$

其中第一项表示不存在粘性时的应力张量，第二项表示流体微元在运动过程中由于形状改变而引起的阻力，称它为粘性应力张量。粘性应力张量t^{ij}是形变速度张量e_{ij}的函数

$$t^{ij}=t(e_{ij})$$

在一级近似里，认为t^{ij}是e_{ij}的线性函数，满足这种关系的流动称为Newton流。即Newton流有

$$t^{ij}=E^{ijkm}e_{km} \tag{1.18}$$

系数E^{ijkm}是一个4阶张量。和弹性力学一样，对各向同性的均匀流体，张量E^{ijkm}取以下形式

$$E^{ijkm}=\lambda g^{ij}g^{km}+\mu(g^{ik}g^{jm}+g^{im}g^{jk}) \qquad (1.19)$$

这里$\lambda=-2\mu/3$．将（1.19）代入（1.18），利用g^{ij}的对称性及$g^{km}e_{km}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=\theta$得

$$t^{ij}=\lambda g^{ij}\theta+2\mu g^{ik}g^{jm}e_{km}=\lambda g^{ij}\theta+2\mu e^{ij} \qquad (1.20)$$

同理可得

$$t_{ij}=\lambda g_{ij}\theta+2\mu e_{ij} \qquad (1.21)$$

将（1.20）代入（1.17）得

$$\tau^{ij}=-(p-\lambda\theta)g^{ij}+2\mu e^{ij} \qquad (1.22)$$

同样有

$$\tau_{ij}=-(p-\lambda\theta)g_{ij}+2\mu e_{ij} \qquad (1.23)$$

任意二阶张量T^{ij}之Gauss公式 设$\{\lambda_i\}$为任意一个单位平行向量场，则$S^i=T^{ij}\lambda_j$为一向量，利用通常的Gauss公式：

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega}T^{ij}\lambda_j n_i ds=\iiint_\Omega\nabla_i(T^{ij}\lambda_j)d\Omega$$

由于$\{\lambda_i\}$是一单位平行向量场，$\nabla_i\lambda_j=0$，故有

$$\iiint_\Omega\lambda_j\nabla_i T^{ij}d\Omega=\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega}T^{ij}\lambda_j n_i ds \qquad (1.24)$$

连续介质力学中的平衡方程 考察连续介质中任一体积元Ω，它受到的外力有：惯性力$\rho\boldsymbol{a}$，体积力$\rho\boldsymbol{f}$，面应力合力$\tau^{ij}n_j$。它们在任一固定方向上都应平衡。设$\{\lambda_i\}$为任一固定的单位平行向量场，则

$$\iiint_\Omega(-\rho a^i\lambda_i+\rho f^i\lambda_i)d\Omega+\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega}\tau^{ij}n_j\lambda_i ds=0$$

利用Gauss公式（1.24）得

$$\iiint_{\Omega}\left[-\rho a^{i}+\rho f^{i}+\nabla_{j}\tau^{ij}\right]\lambda_{i}d\Omega=0$$

由Ω和λ_i的任意性，得到平衡方程

$$-\rho a^{i}+\rho f^{i}+\nabla_{j}\tau^{ij}=0 \tag{1.25}$$

弹性力学中的Lamè方程和弹性势能 利用弹性力学中应力张量和形变张量之间的关系（1.11），则（1.25）变成

$$-\rho a^{i}+\rho f^{i}+\lambda g^{ij}\nabla_{j}(\mathrm{div}\boldsymbol{u})+\mu\nabla_{j}(\nabla^{i}u^{j}$$
$$+\nabla^{j}u^{i})=0$$

由于在欧氏空间中Riemann张量为零，从而协变导数的求导顺序可交换。故

$$\nabla_{j}\nabla^{i}u^{j}=\nabla^{i}\nabla_{j}u^{j}=\nabla^{i}(\mathrm{div}\boldsymbol{u})=g^{ij}\nabla_{j}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}) \tag{1.26}$$

于是有

$$-\rho a^{i}+\rho f^{i}+(\lambda+\mu)g^{ij}\nabla_{j}(\mathrm{div}\boldsymbol{u})+\mu\nabla_{j}\nabla^{j}u^{i}=0$$

在直角坐标系中可以写成向量形式

$$-\rho\boldsymbol{a}+\rho\boldsymbol{f}+(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}+\mu\Delta\boldsymbol{u}=0 \tag{1.27}$$

（1.27）就是弹性力学中的Lamè方程。

如果用任一位移向量v_i和（1.25）缩并，积分后得

$$-\iiint_{\Omega}\rho a^{i}v_{i}d\Omega+\iiint_{\Omega}\rho f^{i}v_{i}d\Omega+\iiint_{\Omega}\nabla_{j}\tau^{ij}\cdot v_{i}d\Omega=0$$

利用τ^{ij}的对称性，且由于 $v_i\nabla_j\tau^{ij}=\nabla_j(\tau^{ij}v_i)-\tau^{ij}\nabla_j v_i$，故

$$\tau^{ij}\nabla_{j}v_{i}=\tau^{ij}e_{ij} \tag{1.28}$$

再由Gauss公式，则得

$$\iiint_{\Omega}\rho a^{i}v_{i}d\Omega+\iiint_{\Omega}\tau^{ij}e_{ij}d\Omega=\iiint_{\Omega}\rho\boldsymbol{f}\boldsymbol{v}d\Omega$$
$$+\oiint_{\partial\Omega}\tau^{ij}n_{j}v_{i}ds \tag{1.29}$$

在（1.29）中，左端第一项是惯性力所作的功，右端第一项是外力所作的功，第二项是表面压力所作的功。所有这些力作的功，使得内部弹性势能

$$W(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\iiint_{\Omega}\tau^{ij}(\boldsymbol{u})e_{ij}(\boldsymbol{v})d\Omega \qquad (1.30)$$

发生变化。

流体力学中的微分方程组 描述流体流动的物理量，有速度$\boldsymbol{u}$，压力p，密度ρ，温度T等6个量，必须建立6个方程。

动量方程 将（1.22）代入（1.25）得

$$-\rho a^i+\rho f^i-g^{ij}\nabla_j(p-\lambda\theta)+2\nabla_j(\mu e^{ij})=0$$

由于$a^i=\dfrac{\partial u^i}{\partial t}+u^j\nabla_ju^i$，$\lambda=-2\mu/3$，那么可压缩流体的动量方程为

$$-\rho\frac{\partial u^i}{\partial t}-\rho u^j\nabla_ju^i-g^{ij}\nabla_j\left(p+\frac{2}{3}\mu\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right)$$

$$+\nabla_j(\mu(\nabla^iu^j+\nabla^ju^i))+\rho f^i=0 \qquad (1.31)$$

如果粘性系数μ为常数，又由于欧氏空间中的协变导数顺序可以调换，故

$$\nabla_j(\mu(\nabla^iu^j+\nabla^ju^i))=\mu\nabla^i(\mathrm{div}\boldsymbol{u})+\mu\nabla_j\nabla^ju^i$$

代入（1.31）得

$$\rho\frac{\partial u^i}{\partial t}+\rho u^j\nabla_ju^i+g^{ij}\nabla_j(p-\frac{1}{3}\mu\mathrm{div}\boldsymbol{u})$$

$$-\mu\nabla_j\nabla^ju^i=\rho f^i \qquad (1.32)$$

连续性方程 通过任一体积之流量必须守恒

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,d\Omega=\oiint_{\partial\Omega}\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}ds$$

利用Gauss定理

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})\right)d\Omega=0$$

由Ω的任意性，得连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})=0 \tag{1.33}$$

如果流体是不可压缩的，那么由 $\rho=\text{const}$，(1.33) 变为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0 \tag{1.34}$$

将 (1.34) 代入 (1.32) 得

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}+u^j\nabla_j u^i+g^{ij}\nabla_j(p/\rho)+\nu\nabla_j\nabla^j u^i=0\text{，}\quad \nu=\mu/\rho \tag{1.35}$$

(1.34) 与 (1.35) 是不可压缩流体流动的 Navier-Stokes方程。

能量方程 能量守恒在这里的表现形式是，任一体积内的动能和内能变化率等于应力作功率、外力作功率及由外界传进的传热率。即若记动能变化率

$$\dot{K}=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\rho\frac{d}{dt}(g_{ij}u^iu^j)d\Omega \tag{1.36}$$

内能变化率

$$\dot{E}=\iiint_{\Omega}\rho\,\dot{\varepsilon}\,d\Omega \tag{1.37}$$

其中e是单位质量内能，则有

$$\dot{K}+\dot{E}=W_1+W_2+Q \tag{1.38}$$

这里W_1为应力作功率，W_2为外力做功率

$$\begin{aligned}W_1&=\oint_{\partial\Omega}\mathscr{F}(\boldsymbol{n})\boldsymbol{u}ds=\oint_{\partial\Omega}\mathscr{F}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}ds\\&=\iiint_\Omega \operatorname{div}(\mathscr{F}(\boldsymbol{u}))d\Omega=\iiint_\Omega\nabla_i(\tau^{ij}u_j)d\Omega\\&=\iiint_\Omega(\nabla_i\tau^{ij}\cdot u_j+\tau^{ij}\nabla_i u_j)d\Omega\end{aligned}$$

由τ^{ij}的对称性，故有

$$\tau^{ij}\nabla_i u_j=\tau^{ij}e_{ij}$$

再利用动量方程，得

$$W_1=\iiint_\Omega(\rho a^i-\rho f^i)u_i d\Omega+\iiint_\Omega\tau^{ij}e_{ij}d\Omega$$

所以

$$W_1+W_2=\iiint_\Omega\tau^{ij}e_{ij}d\Omega+\iiint_\Omega\rho a^j u_j d\Omega$$

但是

$$\rho a^j u_j=\rho\frac{d}{dt}u^j\cdot u^i g_{ij}=\frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}(g_{ij}u^i u^j)$$

于是可得

$$W_1+W_2=\iiint_\Omega\tau^{ij}e_{ij}d\Omega+\dot{K} \tag{1.39}$$

$$Q=\iiint_\Omega\rho h d\Omega+\oint\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}ds=\iiint_\Omega(\rho h+\operatorname{div}\boldsymbol{q})d\Omega \tag{1.40}$$

其中h为单位质量上的热源，$\boldsymbol{q}$是通过$\partial\Omega$的热流。

将（1.39），（1.40）代入（1.38）得

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}-\tau^{ij}e_{ij}-\rho h-\operatorname{div}\boldsymbol{q}=0 \tag{1.41}$$

设K为热传导系数，$\boldsymbol{q}=K\operatorname{grad}T$

$$\tau^{ij}e_{ij}=-pg^{ij}e_{ij}-\frac{2}{3}\mu\theta g^{ij}e_{ij}+2\mu e^{ij}e_{ij}$$

$$=-p\theta-\frac{2}{3}\mu\theta^2+2\mu e^{ij}e_{ij}$$

引入不变量

$$\Phi=\lambda\theta^2+2\mu e^{ij}e_{ij}=-\frac{2}{3}\mu\theta^2+2\mu e^{ij}e_{ij} \tag{1.42}$$

那么

$$\tau^{ij}e_{ij}=-p\theta+\Phi$$

于是（1.41）可表为

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\rho u^j\nabla_j\varepsilon-\operatorname{div}(K\operatorname{grad}T)+p\theta-\Phi-\rho h=0$$

对理想气体$\varepsilon=c_VT=c_pT-p/\rho$，所以

$$\rho c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u^j\nabla_jT\right)-\operatorname{div}(K\operatorname{grad}T)+p\theta-\Phi-\rho h=0 \tag{1.43}$$

状态方程　若是理想流体，则

$$p=\rho RT$$

因此，可压缩气体的完全动力学方程组