GAODENG JIHE

高等几何

（第 二 版）

梅向明　刘增贤　王汇淳　王智秋　编

高 等 学 校 教 材

高等几何

（第 二 版）

梅向明　刘增贤　王汇淳　王智秋　编

高等教育出版社

第一章　仿射坐标与仿射变换

本章将阐明仿射变换的概念，并在仿射坐标系下研究图形经仿射变换后的不变量和不变性质.

§1　透视仿射对应

定义 1.1　共线三点 P_1, P_2, P 的单比表示为(P_1P_2P)，我们定义

$$(P_1P_2P)=\frac{P_1P}{P_2P}$$

其中 P_1P, P_2P 是有向线段的(数量)，称 P_1, P_2 为基点，P 为分点.

显然，当 P 在 P_1、P_2 之间时，$(P_1P_2P)<0$，否则$(P_1P_2P)>0$.

当 P 与 P_1 重合时，$(P_1P_2P)=0$；P 与 P_2 重合时，(P_1P_2P)不存在.

当 P 为线段P_1P_2 的中点时，$(P_1P_2P)=-1$.

如果已知 P_1, P_2 两点，且(P_1P_2P)为定值时，则 P 点在直线 P_1P_2 上的位置唯一确定.

定义 1.2　在一平面上设有直线 a 和a'，l 为此平面上与a，a'均不平行的另一直线，通过直线 a 上各点$A, B, C, \cdots$分别作与 l 平行的直线，顺次交 a' 于 $A', B', C', \cdots$，这样便得到直线 a 上点到a'上点的一个一一对应，称为透视仿射对应，如图 1－1.

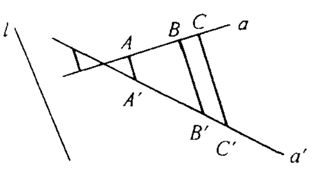

图 1－1

如果直线 a 和a'相交，则交点是

自对应点或称不变点(二重点).

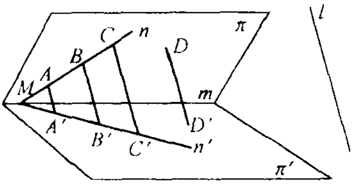

图 1－2

仿此,可得空间二平面 π 和 π' 间的透视仿射对应,如图 1－2.

如果平面 π 和 π' 相交于直线 m,则 m 上的每个点都是自对应点,并且在平面 π 和 π' 间的透视仿射对应下的所有自对应点都在其交线 m 上,直线 m 叫做透视轴,简称轴. 如果平面 π 和 π' 平行则无自对应点,也不存在透视轴了.

透视仿射对应的性质:

(1) 透视仿射对应保持同素性.

透视仿射对应使点对应点,直线对应直线,我们称这个性质为同素性.

(2) 透视仿射对应保持结合性.

如图 1－2 上,点 A,B,C 在直线 n 上,经过透视仿射对应后,其对应点 A',B',C' 在对应直线 n' 上,这就是说,透视仿射对应保持点和直线的结合关系.

(3) 透视仿射对应保持共线三点的单比不变.

在图 1－2 中,平面 π 内的共线三点 A,B,C,经过透视仿射对应后变为平面 π' 内的共线三点 A',B',C',由于 AA',BB',CC' 互相平行,所以有

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}$$

即

$$(ABC)=(A'B'C')$$

因此得到，透视仿射对应保持共线三点的单比不变.

(4) 透视仿射对应保持二直线的平行性.

如图 1－3，在平面 π 内，直线 $a \parallel b, c \parallel d$，经过平面 π 和 π' 间的透视仿射对应后，a 对应 a'，b 对应 b'，c 对应 c'，d 对应 d'，容易证明 $a' \parallel b', c' \parallel d'$.

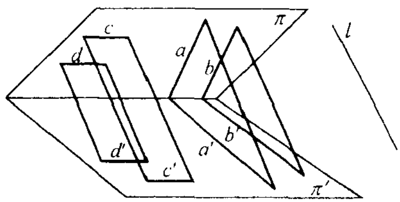

图 1－3

§2 仿射对应与仿射变换

定义 2.1 设同一平面内有 n 条直线 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，如图 1－4. $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}$ 顺次表示 a_1 到 a_2，a_2 到 a_3，$\cdots$，a_{n-1} 到 a_n 的透视仿射对应，经过这一串透视仿射对应，使 a_1 上的点与 a_n 上的点建立了一一对应，这个对应称为 a_1 到 a_n 的仿射对应，用 φ 表示，于是有

$$\varphi = \varphi_{n-1} \cdot \varphi_{n-2} \cdot \cdots \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1$$

如果直线 a_1 与 a_n 重合，则 a_1 到 a_n 的仿射对应叫做直线 a_1 到自身的仿射变换.

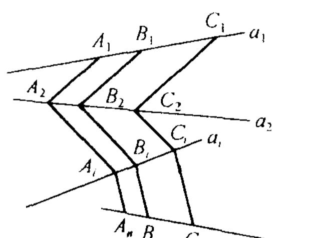

图 1－4

仿此可以得到二平面间的仿射对应，如图 1－5. 平面 π_1 到 π_n 的仿射对应 $\varphi = \varphi_{n-1} \cdot \varphi_{n-2} \cdot \cdots \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1$.

所以两平面间的仿射对应也是有限次透视仿射对应的结果.

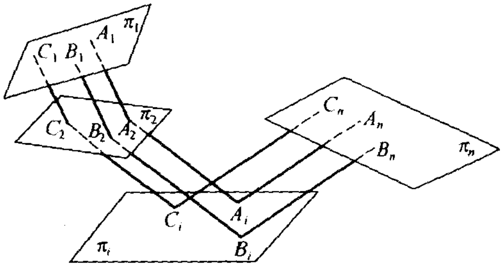

图 1－5

当 π_1 与 π_n 重合时，φ 称为平面 π_1 到自身的仿射变换.

由于仿射对应和仿射变换都是一串透视仿射对应的乘积（称为透视仿射对应链），因此不难证明它们具有下列性质：

(1) 保持同素性和结合性；

(2) 保持共线三点的单比不变；

(3) 保持直线的平行性.

但对两个点集来讲，在仿射对应下，对应点连线不一定平行.

我们也可以直接用前两个性质定义仿射对应（变换）.

定义 2.2 若两个平面间（平面到自身）的一个点对应（变换）保持同素性，结合性和共线三点的单比不变，则这个点对应（变换）称为仿射对应（变换）.

注意 在这个定义下，可以证明仿射对应（变换）保持两直线的平行性.

据此还可以证明，平行四边形经仿射对应（变换）后，对应图形仍为平行四边形；两条平行线段经仿射对应（变换）后，其长度之比不变.

§3 仿射坐标

3.1 仿射坐标系

设 $O-xy$ 为平面内一笛卡儿坐标系（直角或斜角），E 为单

位点,其坐标为(1,1),则平面上任一点 P 的坐标(x,y),可以表示为

$$x=\frac{OP_x}{OE_x}=(P_xE_xO),\quad y=\frac{OP_y}{OE_y}=(P_yE_yO)$$

如图 1-6,E_x,E_y,P_x,P_y 分别为过E,P 所作 y 轴和 x 轴的平行线与 x 轴和 y 轴的交点.

经过一个仿射变换(或对应),坐标系 $O-xy$ 在同一平面(另一平面)内的对应图形为 $O'-x'y'$,E,E_x,E_y,P,P_x,P_y 的对应点顺次为 $E',E'_{x'},E'_{y'},P',P'_{x'},P'_{y'}$,于是 $O'E'_{x'}E'E'_{y'}$ 和 $O'P'_{x'}P'P'_{y'}$ 均为平行四边形 . 如图 1-7.

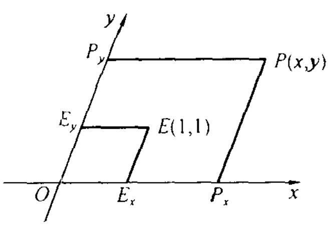

图 1-6

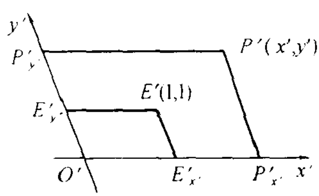

图 1-7

在新坐标系 $O'-x'y'$中,取 E'为单位点(1,1). 对于这个坐标系,点 P'的坐标为(x',y'),于是

$$x'=\frac{O'P'_{x'}}{O'E'_{x'}}=(P'_{x'}E'_{x'}O'),\quad y'=\frac{O'P'_{y'}}{O'E'_{y'}}=(P'_{y'}E'_{y'}O')$$

由于仿射变换保持单比不变,所以有

$$x'=x,\quad y'=y.$$

定义 3.1 笛卡儿坐标系在仿射对应(变换)下的象叫做仿射坐标系 .(x',y')叫做点 P'的**仿射坐标**,记为 $P'(x',y')$.

用 $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2$ 表示$\overrightarrow{O'E'_x}$,$\overrightarrow{O'E'_y}$,则仿射坐标系表示为$O'-\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2$,如果 P'的仿射坐标为(x',y'),则

$$\overrightarrow{O'P'}=x'\boldsymbol{e}'_1+y'\boldsymbol{e}'_2$$

由此可见仿射坐标系是笛卡儿坐标系的推广,两坐标轴上的测量单位$|O'E'_x|$和$|O'E'_y|$不一定相等,而笛卡儿坐标系是仿射坐标系当两轴上的测量单位相等时的特殊情况.

现在我们将共线三点的单比用坐标表示.

定理 3.1 设共线三点 P_1,P_2,P_3 的仿射坐标顺次为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$,则单比

$$(P_1P_2P_3)=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} \tag{3.1}$$

证明 如图 1-8

$$\begin{aligned}&(P_1P_2P_3)\\&=\frac{P_1P_3}{P_2P_3}=\frac{P_{1x}P_{3x}}{P_{2x}P_{3x}}\\&=\frac{OP_{3x}-OP_{1x}}{OP_{3x}-OP_{2x}}\\&=\frac{\dfrac{OP_{3x}}{OE_x}-\dfrac{OP_{1x}}{OE_x}}{\dfrac{OP_{3x}}{OE_x}-\dfrac{OP_{2x}}{OE_x}}\\&=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}\end{aligned}$$

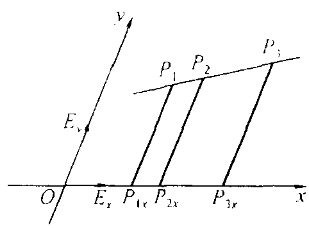

图 1-8

同理,

$$(P_1P_2P_3)=\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}$$

定理 3.2 在仿射坐标系下,经过两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$的直线方程为

$$\begin{vmatrix}x & y & 1\\x_1 & y_1 & 1\\x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0$$

证明 在直线 P_1P_2 上任取一点 $P(x,y)$,则有

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{y-y_1}{y-y_2}$$

即
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{3.2}$$

反之,凡满足方程(3.2)的 x,y,所对应的点 $P(x,y)$ 必在直线 P_1P_2 上.

所以方程(3.2)为经过两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 的直线方程.由此可知,在仿射坐标系下,直线的方程是一次方程

$$Ax+By+C=0 \quad (A^2+B^2\neq 0) \tag{3.3}$$

反之一次方程 $Ax+By+C=0 \quad (A^2+B^2\neq 0)$ 的图形一定是直线

我们称(3.3)为直线的一般式方程.

下面我们将仿射变换用坐标表示.

3.2 仿射变换的代数表示

在平面内给定仿射坐标系 $O-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$,经过一个仿射变换 T,将平面上的点 $P(x,y)$,变为 $P'(x',y')$,现在求出 (x,y) 与 (x',y') 间的关系.

设仿射变换 T 将坐标系 $O-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ 变为 $O'-\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2$,且 $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2$ 在 $O-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ 中的坐标分别为 (a_{11},a_{21}),(a_{12},a_{22}),点 O' 在 $O-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ 中的坐标为 (a_{13},a_{23}),如图 1-9 所示.

由于仿射变换保持平行性不变,所以平行四边形 OP_xPP_y 的对应图形 $O'P'_xP'P'_y$ 仍为平行四边形,又由于仿射变换保持单比不变,所以点 P' 在 $O'-\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2$ 中的坐标仍为 (x,y).

因为

$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P'}$$

所以

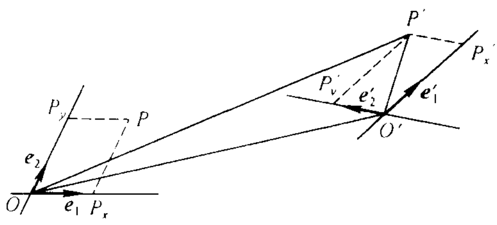

图 1－9

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= (a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2) + (x\boldsymbol{e}_1' + y\boldsymbol{e}_2') \\ &= (a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2) + x(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2) + y(a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2) \\ &= (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\boldsymbol{e}_1 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})\boldsymbol{e}_2 \qquad ①\end{aligned}$$

但是

$$\overrightarrow{OP'} = x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2 \qquad ②$$

比较以上两个等式，得

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{cases} \qquad (3.4)$$

由于 $\boldsymbol{e}_1'$ 与 $\boldsymbol{e}_2'$ 不平行，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

因此，我们得到以下定理：

定理 3.3 平面上的仿射变换在仿射坐标系下的代数表示式为(3.4)，其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

由于(3.4)式中有六个未定系数，所以只要有不共线的三对对应点便可唯一确定一个仿射变换.

例 1 求使三点 $O(0,0)$，$E(1,1)$，$P(1,-1)$顺次变到点 $O'(2,3)$，$E'(2,5)$，$P'(3,-7)$的仿射变换.

解 设所求仿射变换为

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{cases}$$

于是有

$$2 = a_{13}$$

$$3 = a_{23}$$

$$2 = a_{11} + a_{12} + a_{13}$$

$$5 = a_{21} + a_{22} + a_{23}$$

$$3 = a_{11} - a_{12} + a_{13}$$

$$-7 = a_{21} - a_{22} + a_{23}$$

解此方程组,得

$$a_{13} = 2,\ a_{23} = 3,\ a_{11} = \frac{1}{2},\ a_{12} = -\frac{1}{2},\ a_{21} = -4,\ a_{22} = 6$$

故所求的仿射变换为

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \\ y' = -4x + 6y + 3 \end{cases}$$

在(3.4)式中,因为 $\Delta \neq 0$,所以可解出 x, y,用象点的坐标表示原象点的坐标,即

$$\begin{cases} x = a'_{11}x' + a'_{12}y' + a'_{13} \\ y = a'_{21}x' + a'_{22}y' + a'_{23} \end{cases} \tag{3.5}$$

其中

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

例 2 试确定仿射变换,使 y 轴,x 轴的象分别为直线 $x + y + 1 = 0, x - y - 1 = 0$,且点(1,1)的象为原点.

解 设(3.5)式为所求变换的逆变换表示式,于是有

$x = 0$ 的象为 $a'_{11}x' + a'_{12}y' + a'_{13} = 0$

$y = 0$ 的象为 $a'_{21}x' + a'_{22}y' + a'_{23} = 0$

但由题设，$x=0$ 对应直线 $x'+y'+1=0$

$y=0$ 对应直线 $x'-y'-1=0$，

所以

$a'_{11}x'+a'_{12}y'+a'_{13}=0$ 与 $x'+y'+1=0$ 表示同一直线，即

$$\frac{a'_{11}}{1}=\frac{a'_{12}}{1}=\frac{a'_{13}}{1}=h$$

因此，有

$$x=hx'+hy'+h \qquad ①$$

同理，由于 $a'_{21}x'+a'_{22}y'+a'_{23}=0$ 与 $x'-y'-1=0$ 表同一直线，所以有

$$y=kx'-ky'-k \qquad ②$$

又因为$(1,1)$的象为$(0,0)$，所以

$$h=1,\quad k=-1$$

代入①、②得所求变换式的逆变换式为

$$\begin{cases} x=x'+y'+1 \\ y=-x'+y'+1 \end{cases}$$

解出 x'，y'，得所求变换式为

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}y \\ y'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y-1 \end{cases}$$

在§2中，我们从仿射变换的定义出发已经证明了仿射变换的基本性质，即它保持同素性，结合性，平行性和单比．这些性质也可以利用仿射变换的代数表达式证明．

现在，我们来证明仿射变换保持共线三点的单比不变．而将利用代数表达式证明仿射变换保持同素性和结合性的问题留作练习，由读者自己完成．

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$是共线三点，经过变换(3.4)后，它们的对应点顺次为共线三点 $P'_1(x'_1,y'_1)$，

$P_2'(x_2', y_2'), P_3'(x_3', y_3')$.

由(3.1)

$$(P_1P_2P_3)=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=\lambda$$

$$(P_1'P_2'P_3')=\frac{x_3'-x_1'}{x_3'-x_2'}=\frac{y_3'-y_1'}{y_3'-y_2'}$$

再根据(3.4),

$$\begin{aligned}(P_1'P_2'P_3')&=\frac{x_3'-x_1'}{x_3'-x_2'}\\&=\frac{(a_{11}x_3+a_{12}y_3+a_{13})-(a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13})}{(a_{11}x_3+a_{12}y_3+a_{13})-(a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13})}\\&=\frac{a_{11}(x_3-x_1)+a_{12}(y_3-y_1)}{a_{11}(x_3-x_2)+a_{12}(y_3-y_2)}=\lambda\end{aligned}$$

所以

$$(P_1P_2P_3)=(P_1'P_2'P_3')$$

由于仿射变换(3.4)保持同素性,结合性和单比,所以我们可以直接用代数的方法来定义仿射变换如下:

定义 3.2 平面上点之间的一个线性变换

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}\\y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{3.4}$$

叫做**仿射变换**.

3.3 几种特殊的仿射变换

当变换式(3.4)的系数又满足一些特殊条件时便可得到几种特殊的仿射变换.

(1) 正交变换

当(3.4)式的系数满足正交条件时,即

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

时,(3.4)是正交变换,所以正交变换是特殊的仿射变换.

(2) 位似变换

当变换式(3.4)的系数满足下列条件时,变换为位似变换,k为位似比.

$$\begin{cases} x' = kx + a_{13} \\ y' = ky + a_{23} \end{cases} \tag{3.7}$$

$$k \neq 0$$

(3) 相似变换

当变换式(3.4)的系数满足下列条件时,变换为相似变换.

$$\begin{cases} x' = a_1 x - \lambda b_1 y + d_1 \\ y' = b_1 x + \lambda a_1 y + d_2 \end{cases} \qquad \lambda = \pm 1 \tag{3.8}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & -\lambda b_1 \\ b_1 & \lambda a_1 \end{vmatrix} = \pm(a_1^2 + b_1^2) \neq 0$$

实际上,相似变换总能分解为一个正交变换与一个位似变换的乘积.

(4) 压缩变换

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases} \quad ab \neq 0 \tag{3.9}$$

仿射变换的特殊情况很多,不只以上几种,这里不再一一列举了.

§4 仿射性质

定义 4.1 图形经过任何仿射变换后都不变的性质(量),称为图形的仿射性质(仿射不变量).

由以上可知同素性，结合性是图形的仿射性质，单比是仿射不变量．关于图形的仿射性质，利用仿射变换的代数表示式(3.4)亦可证明．例如：

定理 4.1 两条平行直线经过仿射变换后仍变为两条平行直线.

推论 1 两条相交直线经仿射变换后仍变成两条相交直线.

推论 2 共点直线经仿射变换后，仍变为共点直线.

定理 4.2 两条平行线段之比是仿射不变量.

还可以证明图形的一些其它不变性.例如：

定理 4.3 两个三角形面积之比是仿射不变量.

我们只证明定理 4.3，其它留作练习题.

证明 设在笛卡儿坐标系下，已知不共线三点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ 经过仿射变换(3.4)后，对应点为 $P_1'(x_1', y_1')$, $P_2'(x_2', y_2')$, $P_3'(x_3', y_3')$，于是

$$S_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值} \qquad ①$$

$$S_{\triangle P_1'P_2'P_3'} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值} \qquad ②$$

将(3.4)代入②，得

$$S_{\triangle P_1'P_2'P_3'} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} & a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} & 1 \\ a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13} & a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23} & 1 \\ a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13} & a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23} & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

$$= S_{\triangle P_1P_2P_3} \left| a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \right|$$

所以

$$\frac{S_{\triangle P_1' P_2' P_3'}}{S_{\triangle P_1 P_2 P_3}} = |a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}|$$

同理,任一其它三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 经变换(3.4)后,得对应三角形 $Q_1'Q_2'Q_3'$.其面积之比仍为

$$\frac{S_{\triangle Q_1' Q_2' Q_3'}}{S_{\triangle Q_1 Q_2 Q_3}} = |a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}|$$

所以

$$\frac{S_{\triangle P_1 P_2 P_3}}{S_{\triangle Q_1 Q_2 Q_3}} = \frac{S_{\triangle P_1' P_2' P_3'}}{S_{\triangle Q_1' Q_2' Q_3'}}$$

即两三角形面积之比是仿射不变量.

推论 1 两个多边形面积之比是仿射不变量.

推论 2 两个封闭图形面积之比是仿射不变量.

例 1 求一仿射变换,将椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

变成一个圆.

解 设 $x' = \frac{x}{a}, y' = \frac{y}{b}$,则变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{a} \\ y' = \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

是一个仿射变换.椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 经过这个仿射变换后的象为

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

这是一个圆.

当然也可以经过一个仿射变换将圆变为椭圆.

由于圆和椭圆为仿射对应图形,所以可以从圆的某些性质导

出椭圆的一些性质.如图 1－10(a),已知△ABC 及其内切圆,内切圆与三边的切点顺次为 L,M,N,则 AL,BM,CN 三线共点,经过仿射变换,圆的象为椭圆,三角形的象仍为三角形.又由于仿射变换保持结合性,所以图 1－10(a)的对应图形为图 1－10(b).显然有 $A'L',B'M',C'N'$ 三线共点.

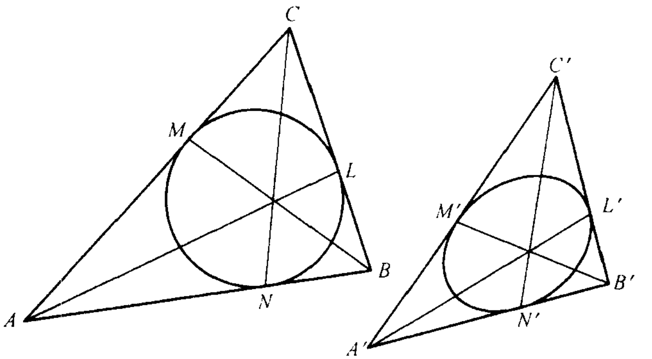

图 1－10

例 2 求椭圆的面积.

解 设在笛氏直角坐标系下椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

经过仿射变换

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=\dfrac{a}{b}y \end{cases}$$

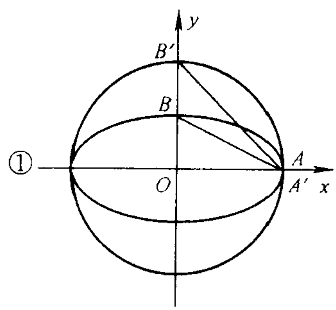

图 1－11

其对应图形为圆.

$$x'^2+y'^2=a^2$$

如图 1－11,在仿射变换①之下,$A\to A'$,$B\to B'$,$O\to O'$,所以△AOB