随机过程引论

钱敏平 编著

北京大学出版社

随机过程引论

钱敏平　编著

北京大学出版社

内 容 提 要

本书是随机过程论的基础入门读物。主要讲授随机过程论的基本理论和方法，包括：基本概念、鞅论、马氏链、Q-过程、Brown 运动、马氏过程、相互作用粒子系、渗流与点过程的数学模型、扩散过程与随机分析、平稳过程与遍历理论等。

本书兼顾严格的数学论证与阐明理论的来源、背景及模型，反映了近年来的新成果、观点及倾向，对一些基本的经典问题采用了新的处理方法。

本书可供高等院校高年级学生、研究生及一般科技工作者学习参考。

随 机 过 程 引 论
钱敏平　编著
责任编辑：王明舟
*
北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
850×1168毫米　32开本　12.25印张　318千字
1990年10月第一版　1990年10月第一次印刷
印数：00001—3,000册
ISBN 7-301-01109-1/O·0192
定价：6.65 元

序　言

近三十年来，随机过程论在理论与应用两方面都发展迅速。学习、了解这个学科不仅对于概率统计方面的工作者是必要的，而且对数学的其他分支、自然科学、工程技术，乃至经济管理等方面的学者及科技工作者都是重要而有益的。这方面的有关教材无论中文的或外文的都已不少，它们各有特色。在这众多的教材出现之后，笔者又写本书奉献给读者，是希望在两个方面有所特点。其一是：过去的教材大都属于两类之一，一类是严格的数学论述；另一类偏重应用，但不求数学严格性。本书力图能兼顾二者，一方面尽量阐明理论的来源、背景及模型；另一方面，对基本的理论又给出严格的数学定义、定理及论证，以期适应理论与应用两方面读者的需要。读者可以根据自己的情况各择所好，各取所需。本书追求的另一点是：尽量使近年来随机过程发展的新成果、观点与倾向能在书中有所反应。对一些基本的经典问题，我们采用一些不同于传统的新处理方法。例如对马氏链转移阵的极限定理，我们采用“耦合”这一近年来应用较广的方法证明；又例如对 Brown 运动的许多性质，我们更多地利用了鞅方法去论证等等。对一些在随机过程论中近二十年来新发展的方向，如点过程相互作用粒子系统、渗流等问题，我们在第七章中作一点浅显的介绍，希望使读者对这些领域中研究的模型、思想、问题与方向的概貌有所了解。若它能引起一些读者的兴趣，并吸引他们进而去学习那里指出的参考文献，则我们将为达到了写作意图而欣慰。遍历论是近十几年来发展很快，既与随机过程紧密联系，又独立于后者的一个数学分支。本书第九章中讨论了遍历论的基本概念，并研究了熵与次可加遍历定理。我们认为这些对于随机过程的研究也是重要和有益的。

本书希望对熟悉初等概率论与测度论的读者尽量做到自封。附录中列出了一些最常用的测度论的事实。由于篇幅所限，我们略去个别定理的证明，或只指出其证明概要，读者可参考书中指出的有关文献。

本书是由笔者1982年以来在北京大学及1988年在清华大学讲授“随机过程”课程的讲义改写而成的。在此，我们要感谢北京大学概率统计系、数学系及清华大学数学系。由于他们的安排与鼓励，使笔者有机会完成本书的写作，并在教学实践中予以反复使用和修改。我们也要感谢各次参加听课的学生，由于他们仔细阅读原来的讲义，提出问题，使我们纠正了不少不妥之处。

我们特别要感谢郭懋正同志，他以异常的耐心，反复阅读了原稿，提出了许多非常宝贵的修改意见。邓迎春同志整理并抄写了原稿。在此我们对他们辛苦而细致的工作深表谢意。

由于笔者的水平所限，本书的错误、缺点、不妥之处在所难免。我们衷心欢迎读者批评指正。

编　者

1988年10月于北大

目　录

第一章　引　论

§1　随机过程的概念与例子

1. 随机过程的概念

考虑一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，其中Ω是一个集合，$\mathscr{F}$是由Ω的某些子集所组成的一个σ-代数，P是在可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上定义的一个概率测度.设T是一个指标集,又设有一族$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量$\xi=\{\xi(t,\cdot);\ t\in T\}$,形式地,我们称$\xi$是一个参数取值于$T$的随机过程．通常$T$代表时间，它可取为实数集$\boldsymbol{R}$，非负实数集$\boldsymbol{R}^+$，整数集$\boldsymbol{Z}$，或非负整数集$\boldsymbol{Z}^+$等．当$T$取为$\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^+$或$[a,b]$(区间)时，称$\xi$为连续参数的随机过程；当$T$取为$\boldsymbol{Z}$或$\boldsymbol{Z}^+$时，称$\xi$为离散参数的随机过程；当$T$取为$\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{Z}^n,(\boldsymbol{R}^+)^n$或$(\boldsymbol{Z}^+)^n(n\geqslant 2)$时，就称$\xi$为随机场．在本书中，我们主要是研究前二类情况．一般地，可以将随机过程的定义推广，也就是说$\xi(t,\omega)$并不一定取实值，也可以取复值、向量值，甚至可以取值于抽象的可测空间$(\mathscr{S},\Sigma)$，这里$\mathscr{S}$称为随机过程ξ的状态空间．这样随机过程可以一般地定义为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一族以T为指标集的随机元$\xi=\{\xi(t,\cdot);\ t\in T\}$，其中对固定的$t$，$\xi(t,\cdot)$是一个随机元,(即$\xi(t,\cdot)$是$(\Omega,\mathscr{F})$到某个可测空间$(\mathscr{S},\Sigma)$的一个可测映射)．作为特例$\mathscr{S}=\boldsymbol{R}$，$\Sigma=\mathscr{B}_1$(一元 Borel 集类)与$\mathscr{S}=\boldsymbol{C}$($\boldsymbol{C}$为复数集)，$\Sigma=\mathscr{B}_C$(复数的 Borel 域)分别是$\xi(t,\cdot)$为实的随机变量与复的随机变量的情况．

有时从另一个角度来看随机过程是很有益的，这就是把ξ当成$T\times\Omega$到$\mathscr{S}$的映射，使得对固定的$t\in T$，$\xi(t,\cdot)$是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathscr{S},\Sigma)$的可测变换；而固定$\omega\in\Omega$时，$\xi(\cdot,\omega)$是一个

T上的函数。若令X是T上取值于$\mathscr{S}$的函数所组成的空间，ξ也是$(\Omega,\mathscr{F})$到X的映射。在不同的条件下，X可以是各种不同的函数空间。在一定的意义下，随机过程的基础理论可以说是函数空间上的测度论。当然，离开了概率思想和模型，忽视随机过程的物理、工程、经济等实际背景，片面地把它当作纯测度论，随机过程的研究就会失去动力、方向及直观启发的光华。

2. 例

在实际问题中，往往一开始并不清楚有一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，而只是从直观上看到一族"随机地"变化的量。这并非意味着我们已经有了一族随机变量，或者随机过程，因为随机变量与随机过程都必须在一个概率空间中来谈。然而，通过分析，往往可以知道上述那族"随机地"变化的量中任意有限个的联合分布。当T是有限集，这意味着已知这族"随机量"的联合分布。这时，由标准的处理方法，容易构造一个概率空间及其上的一族以T为参数集(有限)的随机变量，使得它们的联合分布正是前面说的那个由直观得到的分布。这样，我们就将直观上看到的那族"随机量"纳入严格的数学模型，因而可以由此进一步作数学的演绎与论证。但是，一般我们真正有兴趣的T是无限集，这时构造概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$就不那么简单了。下面我们先来考察一些例子，以期使读者能对上述将实际问题如何化为随机过程的模型的过程有所感受；然后，再在理论上论证这种做法的可能性与合理性。

例1(Bernoulli 序列)　某人从装有M个红球与N个白球的袋中，重复作放回抽取。若将抽到红球记为0，白球记为1，那么每次的抽取结果是随机的。不难看出第$n_1,n_2,\cdots,n_s$次的结果依次是$a_1,a_2,\cdots,a_s$($a_i=0$或1)的概率为

$$p^{a_1+a_2+\cdots+a_s}q^{s-(a_1+a_2+\cdots+a_s)}, \tag{1.1}$$

其中

$$p=\frac{N}{N+M},\quad q=1-p.$$

要把这个问题纳入上述框架，就是要由此定义一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，及其上的随机变量序列 $\xi(1,\cdot),\xi(2,\cdot),\cdots,\xi(n,\cdot),\cdots$，使得对任意 s 个整数 $n_1,n_2,\cdots,n_s$，$\xi_{n_1},\xi_{n_2},\cdots,\xi_{n_s}$①的联合分布如(1.1)所规定。为此，令

$$\Omega=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots);\ a_i=0,1,i\geqslant 1\}.$$

由下节的定理可知：存在唯一的一个概率测度P，使得对一切$s\geqslant 1$，$a_i=0$ 或 1 的各种可能，下式成立：

$$\begin{aligned}&P(\{\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_s,\cdots);\ \omega_i=a_i,\ i=1,2,\cdots,s\})\\&=p^{a_1+a_2+\cdots+a_s}q^{s-(a_1+a_2+\cdots+a_s)}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

令$\mathscr{F}$是Ω的全体柱集生成的σ-代数。于是，若在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上定义

$$\xi(t,\omega)=\omega_t\quad(t\in\boldsymbol{Z}^+),$$

则$\xi=\{\xi(t,\cdot);\ t\in\boldsymbol{Z}^+\}$就是用来表达各次抽取结果的随机变量族。

例2(随机徘徊) 在上例中，若有某人在一个直线格子点上，从原点出发，按每次抽取的结果是白或红而决定向前或向后走一步，我们则称此人在作随机徘徊。若将此人在时刻 t 所在的格点的坐标记为$X(t,\cdot)$，易知

$$X(t,\omega)=\sum_{n=1}^{t}(2\xi(n,\omega)-1)\ (t\geqslant 1),\qquad X(0,\omega)=0,$$

$X=\{X(t,\omega);\ t=0,1,2,\cdots\}$也是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个随机过程。

例3(Poisson 过程) 考虑盖克计数器接收随机的宇宙射线粒子，记在时间区间$(0,t]$中所接收到的粒子总数为ξ_t，可以看出$\{\xi_t,$

---

① $\xi_{n_1}=\xi(n_1,\cdot)$等，以后不再声明。

$t\in[0,\infty)\}(\xi_0\equiv 0)$是一族随机地变化的量，而且

1）在不相交的任意有限个区间中所接收到的粒子数是相互独立的；

2）在$(t,t+h]$中所接收的粒子数$\xi_{t+h}-\xi_t$的分布应与t无关；

3）在$(t,t+h]$中所接收的粒子数超过1的概率是$o(h)(h\to 0)$，而且有限时间只能接收有限个粒子。

下面，我们将由这三个基本假定出发来算出$p_m(t)\triangleq P(\xi_t=m)$。显然由1)，2)与3)，我们有：

$$\sum_{m=0}^{\infty}p_m(t)=1; \tag{1.3}$$

$$p_0(0)=1,\qquad p_m(0)=0\ \ (m\geqslant 1); \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}p_0(t+h)&=P(\xi_{t+h}=0)=P(\xi_t=0,\ \xi_{t+h}-\xi_t=0)\\&=P(\xi_t=0)P(\xi_{t+h}-\xi_t=0)=p_0(t)p_0(h);\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$p_m(t+h)=p_m(t)p_0(h)+p_{m-1}(t)p_1(h)+o(h). \tag{1.6}$$

由条件1)—3)，可以证明(见习题4)

$$0<\lambda\triangleq\lim_{h\downarrow 0}\frac{1-p_0(h)}{h}<+\infty.$$

于是，由(1.6)与(1.5)易得

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t}=-\lambda p_0(t), \tag{1.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_m}{\mathrm{d}t}=-\lambda p_m(t)+\lambda p_{m-1}(t). \tag{1.8}$$

解带初始条件(1.4)的微分方程(1.7)与(1.8)可得

$$p_0(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t},\qquad p_m(t)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\ \ (m\geqslant 1),$$

这里的λt称为Poisson分布$\left\{\frac{(\lambda t)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda t};\ m=0,1,\cdots\right\}$的强度参

数。从而由$\xi_{t_1},\xi_{t_2}-\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_s}-\xi_{t_{s-1}}$相互独立(即条件1)),容易求出$\xi_{t_1},\xi_{t_2},\cdots,\xi_{t_s}$的联合分布。由这些联合分布进一步构造概率空间与随机变量的问题将在§1.2中统一地解决。

例4(Brown运动) 一个粒子在直线上随机地运动，将其在时刻t的位置记为B_t。设

1) 粒子在任意有限个互不相交的时间区间上的位移都相互独立。不失一般性，不妨设$B_0=0$;

2) $B_{t+h}-B_t$的分布与t无关，具有零均值，而且

$$\lim_{h\downarrow 0} E|B_{t+h}-B_t|^3/h=0; \tag{1.9}$$

3) 作为粒子的位置B_t，它应对t连续。

从上面的假设1)与2)，容易看出

$$E|B_t|^2\leqslant E(|B_t|\vee 1)^2\leqslant E(|B_t|\vee 1)^3$$
$$\leqslant 1+E|B_t|^3<+\infty.$$

然而，若记$\sigma(t)\equiv E|B_t|^2$，利用2)得到

$$|\sigma(t)-\sigma(s)|\leqslant E|(B_t-B_s)(B_t+B_s)|$$
$$\leqslant[E|B_t-B_s|^2(2E|B_t|^2+2E|B_s|^2)]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\sqrt{2}[(E|B_t-B_s|^{2(\frac{3}{2})}E|B_t-B_s|^{2(\frac{1}{2})})^{\frac{1}{2}}$$
$$\times(E|B_t|^2+E|B_s|^2)]^{\frac{1}{2}}$$
$$\to 0\quad(t-s\to 0).$$

这就得到了$\sigma(t)$对t的连续性。此外，我们还有

$$\sigma(t+s)=E|B_{t+s}|^2$$
$$=E|B_{t+s}-B_t|^2+2E[(B_{t+s}-B_t)(B_t-B_0)]+E|B_t|^2$$
$$=\sigma(s)+\sigma(t).$$

这样，我们就有

$$\sigma(t)=at.$$

取适当的单位，可得$a=1$，这就有$\sigma(t)=t$。

现在我们来考查$B_{t+s}-B_t$的分布。令

$$\varphi(s,\lambda)=E(e^{i\lambda(B_s-B_0)}).$$

由1)，我们有

$$\begin{aligned}
&\varphi(t+s,\lambda)-\varphi(t,\lambda)\\
&\quad=E[e^{i\lambda(B_t-B_0)}(e^{i\lambda(B_{t+s}-B_t)}-1)]\\
&\quad=E(e^{i\lambda B_t})E(e^{i\lambda(B_s-B_0)}-1)\\
&\quad=\varphi(t,\lambda)E(e^{i\lambda B_s}-1).
\end{aligned}$$

由于

$$e^{iv}=1+iv-\frac{v^2}{2}+c(v),$$

其中

$$|c(v)|\leqslant 常数\cdot|v|^3,$$

我们可以看出

$$\begin{aligned}
E(e^{i\lambda B_s}-1)&=i\lambda EB_s-\frac{1}{2}\lambda^2EB_s^2+E(c(\lambda B_s))\\
&=0-\frac{1}{2}\lambda^2s+E(c(\lambda B_s)).
\end{aligned}$$

但由(1.9)可以得到

$$\frac{E(c(\lambda B_s))}{s}\longrightarrow 0,$$

从而

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\lambda)&=\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}(\varphi(t+s,\lambda)-\varphi(t,\lambda))\\
&=-\frac{1}{2}\lambda^2\varphi(t,\lambda).
\end{aligned}$$

可见

$$\varphi(t,\lambda)=\varphi(0,\lambda)e^{-\frac{\lambda^2t}{2}}.$$

又由于

$$\varphi(0,\lambda)=E(e^{i\lambda(B_0-B_0)})=1$$

就有

$$\varphi(t,\lambda)=e^{-\frac{\lambda^2t}{2}},$$

即 $B_{t+s}-B_s$ 的分布为$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}$。

这样，我们便由1)，得到 $B_{t_1},\cdots,B_{t_n}$ 的联合分布密度是

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(2\pi(t_k-t_{k-1}))^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\cdots+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right)\right),$$

其中 $t_0=0$，$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$。

Brown 运动是一个十分重要的连续时间与连续状态空间的随机过程的例子。很多重要的随机过程都可以看成是它在某种意义下的泛函或推广，因而，在第四章中，我们将进一步研究它。

从上面各例，可以看到，要把实际问题纳入我们在本节一开始提出的随机过程这一概率模型，首先就必须设法建立一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及其上的一族随机元，使得这族随机元中的任何有限个的联合分布都与我们在初步直观分析中所得到的那些相同。一般来说，Ω 并不难得到，(例如取 $\Omega=\mathscr{S}^T$)，主要难点在 P 的构造。再则，由于在实际问题中，象前面所举的那些例子一样，一般我们只能知道一些有限维分布，为了保证P由这些有限维分布唯一决定，我们常取 Ω 中有限维柱集所张成的最小 σ-代数(记为 σ(柱集))作为$\mathscr{F}$。

§2 Kolmogorov 定理

本节的定理从理论上证明了上段所希望找到的概率测度P的存在性。

设有$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于状态空间 $(\mathscr{S},\Sigma)$ 的随机过程$\xi=\{\xi(t,\cdot);\ t\in T\}$。对任意的正整数$n$及$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$,随机元$(\xi(t_1,\cdot),\cdots,\xi(t_n,\cdot))$的概率分布(或者说$\xi(t_1,\cdot),\xi(t_2,\cdot)$,

$\cdots,\xi(t_n,\cdot)$的联合分布)就是$(\mathscr{S}^n,\Sigma^n)$上的概率测度$p_{t_1,\cdots,t_n}(\cdot)$:

$$p_{t_1,\cdots,t_n}(B)\triangleq P(\{\omega:(\xi(t_1,\omega),\cdots,\xi(t_n,\omega))\in B\}),$$

其中$B\in\Sigma^n$. 我们称$p_{t_1,\cdots,t_n}(\cdot)$为$\xi$在"时刻"$t_1,t_2,\cdots,t_n$的边缘测度. 显然, 边缘测度族$\{p_{t_1,\cdots,t_n}(\cdot);\ n\geqslant1,\ t_1,\cdots,t_n\in T$ 且互不相同$\}$具有以下性质:

$K.1)$ $p_{t_1,\cdots,t_n,\cdots,t_{n+m}}(B\times\mathscr{S}^m)=p_{t_1,\cdots,t_n}(B)$, 其中$B\in\Sigma^n$;

$K.2)$ 设有$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列$\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$, 令ρ为如下集合变换:

$$\rho B\triangleq\{(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n});\ (x_1,\cdots,x_n)\in B\},$$

则
$$p_{t_1,\cdots,t_n}(B)=p_{t_{i_1},\cdots,t_{i_n}}(\rho B).$$

我们称条件1)与2)为 Kolmogorov 相容性条件. 我们现在要讨论问题的反面: 给定了满足$K.1)$与$K.2)$的一族分布是否一定可以找到概率测度P使$K.1)$与$K.2)$在P下满足呢? 下面的定理对此问题作了肯定的回答.

设$\mathscr{S}$是一个可分度量空间, Σ是由$\mathscr{S}$的开子集所生成的最小σ-代数($(\mathscr{S},\Sigma)$也称 Polish 空间, Σ^n是$\mathscr{S}^n$的开集所生成的σ-代数.

我们称下面这样的集合为柱集:

$$C_{t_1,\cdots,t_n}(B)\triangleq\{\omega=(\omega_t;t\in T)\in\mathscr{S}^T;\ (\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n})\in B\},$$

其中$B\in\Sigma^n$, 而$t_1,\cdots,t_n\in T$且彼此不同. 令

$$\mathscr{C}=\{C_{t_1,\cdots,t_n}(B);\ B\in\Sigma^n,\ t_1,\cdots,t_n\in T\text{ 彼此不同},\ r\geqslant1\}.$$

取
$$\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{C}).$$

下面的 Kolmogorov 定理给出了由有限维联合分布族构造$(\Omega,\mathscr{F})$上测度P的方法.

定理1.1(Kolmogorov) 设$\mathscr{S}$是一个完备可分可测度量空间即 Polish 空间,概率分布族$\{p_{t_1,\cdots,t_n}(\cdot);n\geqslant1,t_1,\cdots,t_n\in T$彼此不同$\}$满足$K.1)$与$K.2)$,则存在$(\Omega,\mathscr{F})$上唯一的概率测度$P$,使得

$$P(\omega=(\omega_t;t\in T);\ (\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n})\in B)=p_{t_1,\cdots,t_n}(B)\quad(1.10)$$

对一切 $n\geqslant1$，彼此不同的 $t_1,\cdots,t_n\in T$，以及 $B\in\Sigma^n$ 都成立。

证明 事实上，$K.1)$ 与 $K.2)$ 保证了(1.10)式可以无矛盾地在 $\mathscr{C}$ 上定义唯一一个有限可加集合函数，我们仍将它记为 $P(\cdot)$。又因为 $\mathscr{C}$ 是半环，如果我们能证明这个集合函数是 σ-可加的，那么由测度的扩张定理，立即可以得到 $\sigma(\mathscr{C})$ 上唯一的概率测度，使得(1.10)成立。

为证明 σ-可加性，只需证明：若有 $C_n\in\mathscr{C}$，$C_n\downarrow\varnothing$，则

$$\lim_{n\to\infty}P(C_n)=0. \tag{1.11}$$

事实上，由于 $\{C_n\}$ 的全体最多只涉及可列个 T 中的指标，设它们是 $(t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots)$；又由于低维柱集也是高维柱集，不失一般性，我们不妨设

$$C_n=\{\omega=(\omega_t;t\in T);\quad(\omega_{t_1},\omega_{t_2},\cdots,\omega_{t_n})\in B_n\}.$$

设(1.11)不成立，则不妨设

$$P(C_n)\geqslant\varepsilon>0\ (\forall n\geqslant1),$$

我们将证明 $\bigcap\limits_n C_n\neq\varnothing$。若 C_n 是紧集，显然 $\bigcap\limits_n C_n\neq\varnothing$。由于 B_n 是 n 元 Borel 集，因而存在紧集 $K_n\subset B_n$，使

$$p_{t_1,\cdots,t_n}(B_n-K_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \tag{1.12}$$

（这是定理6.16（见239页）的特例）。

令 $D_n=\{\omega=(\omega_t;t\in T);\ (\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n})\in K_n\}$，为了使 D_n 单调，令

$$\tilde{D}_n=\prod_{k=1}^{n}D_k=\prod_{s=1}^{n}\{\omega;(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_s})\in K_s\}$$

$$=\left\{\omega;(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n})\in\prod_{s=1}^{n}(K_s\times\mathscr{S}^{n-s})\right\},$$

那么，$P(\tilde{D}_n)>\dfrac{\varepsilon}{2}>0$。这是因为由(1.12)，我们有

$$P(C_n-D_n)\leqslant\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

$$P(C_n-\tilde{D}_n)\leqslant\sum_{k=1}^{n}P(C_n-D_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}P(C_k-D_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\ (\text{当}\,k\leqslant n\,\text{时，}\,C_n\subset C_k).$$

于是

$$P(\tilde{D}_n)\geqslant P(C_n)-P(C_n-\tilde{D}_n)\geqslant\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}>0,$$

这样由紧集列 $\tilde{D}_n\downarrow$，就得到 $\bigcap_n C_n\supset\bigcap_n\tilde{D}_n\neq\varnothing$.另一方面，由于$\mathscr{C}$是一个半环，$\mathscr{F}$是它所张成的最小$\sigma$-代数，由半环到$\sigma$-代数测度扩张的唯一性，就知道本定理中的测度$P$是唯一的。∎

由 Kolmogorov 定理立刻可知：由例1—4中所得到的各有限维分布族，都可以分别定义概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$.为此只需在例1中取$\Omega=\{0,1\}^T$；在例2中取$\Omega=\boldsymbol{Z}^T$；例3中取$\Omega=(\boldsymbol{Z}^+)^T$；而在例4中取$\Omega=\boldsymbol{R}^T$(前二例中$T=\boldsymbol{Z}^+$，后二例中$T=\boldsymbol{R}^+$)。再取$\mathscr{F}$为相应的柱集生成的$\sigma$-代数就可按 Kolmogorov 定理得到$P$，进而令

$$\xi(t,\omega)=\omega_t\quad(\omega=\{\omega_t;t\in T\}),$$

就得到了所要求的随机过程，它们的有限维分布族分别符合直观分析所得到的结果。这样，我们就将要研究的实际问题纳入了严格的概率模型。

注： 如$(\Omega,\mathscr{F})$可测同构于 Polish 空间的一个普遍可测集(对开集生成的σ-代数的任意一个概率测度的完备化σ-代数都可测的集)，则定理仍然成立[Ynl].

§3 独立增量过程与鞅

1. 独立增量过程

在§1.1的例子中，随机徘徊、Poisson 过程、Brown 运动都有一个共同特点，那就是：在互不相交的若干个参数区间上，过