初中数学能力型题目解析

初中数学能力型题目解析

高分高能金钥匙丛书

天津科学技术出版社

编者说明

在长期教学实践中，我们发现不少学生解答题目仍停留在只注重答案正确与否方面，虽做了大量的习题但收效甚微。症结在哪里呢？研究表明，学生对题目缺乏深入的剖析，不了解命题者命题的意图，不善于总结、归纳解题的思路、方法和技巧，导致学生分析问题和解决问题的能力不高。为此，我们展开了研究，想通过解剖麻雀的方法，端正学生做题的目的，科学地训练学生的思维方法，达到学以致用，从根本上减轻学生的课业负担，创造有利于学生全面发展，有利于培养学生创新精神和实践能力的环境。

本书具有以下特点：

1.既遵循教学大纲，又体现教育部中考精神；既注重理论联系实际，又强调能力的培养。

2.依章节顺序循序渐进地安排了精选的例题和训练题。例题一般从以下三个方面进行分析：

思路点拨 主要侧重如何审题、解题思路和解题关键等几个方面；

题目解析 主要包括解题过程、方法、技巧和技能等；

思考拓宽 主要是归纳总结、拓宽和延伸；突出一题多解，一题多变等方面的内容。

3.注意渗透命题的意图，这是本书一大特色。以此提高学生的解题层次，有效遏止"题海战术"。

4.所选的例题和训练题典型精当，是编者研究的结晶、心得体会的汇总。

5.充分考虑了初中学段的特点，先具体分析，后概括总结。不断提高学生的学习兴趣。

本书可作为学生同步学习用书，也可作为中考复习用书，还可作为教师的教学参考资料。

不妥之处，恳请广大教师、专家指导和斧正。

编　者

《初中数学能力型题目解析》
《初中物理能力型题目解析》
《初中化学能力型题目解析》
《初中英语常见错误详解500例》
《初中英语考点详解500例》
《初中英语短语 · 惯用语详解500例》

ISBN 7-5308-2947-5
9 787530 829479 >

ISBN 7-5308-2947-5
O·123 定价:16.80元

目　录

第一部分

数与式

一、填空题

★ 1.$\sqrt{2}-1$ 与它的相反数、倒数三个数的和等于________.

思路点拨 (1)这道题主要考查求一个数的相反数、倒数及实数加减法则的应用.

(2)注意本题是要求三个数的和,常规解法是先求出$\sqrt{2}-1$ 的相反数和倒数,然后将三个数相加.

题目解析 $\because \quad -(\sqrt{2}-1)=1-\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1.$

$\therefore \quad (\sqrt{2}-1)+(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}+1.$

思考拓宽 (1)求一个数的相反数,只要将这个数乘以 -1 就可以了.如果这个数是若干个数的代数和,那么求它的相反数时要注意每一项都要变号.用 1 除以这个数就是这个数的倒数.如果一个数的倒数是一个分母中含有无理数的分数时,需要把分母有理化.

(2)对于本题,如果根据"互为相反数的两个数之和等于零",则容易确定其结果就等于"$\sqrt{2}-1$ 的倒数".

★ 2.三个数 a、b、c 在数轴上的对应点如图所示,则化简 $|a+b|+|c-a|+|b+c|$ 得________.

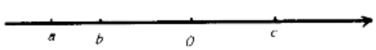

图 1-1

思路点拨 (1)这道题主要考查用数轴上的点表示实数及绝对值的代数意义:
$|a|=\begin{cases} a(a>0) \\ 0(a=0) \\ -a(a<0) \end{cases}$ 的应用.

(2)先观察数轴.①由对应三个数的点在原点的右边或左边,确定三个数的正负;②由对应三个数的点到原点的距离大小,确定三个数的绝对值的大小,从而判断 $a+b$、$c-a$、$b+c$ 的符号,然后去掉绝对值符号进行化简.

题目解析 观察数轴,可知 $a<b<0, c>0, |b|>|c|$.

$\therefore \quad a+b<0, c-a>0, b+c<0.$

$$\begin{aligned} \therefore \quad |a+b|+|c-a|+|b+c| &= -(a+b)+(c-a)-(b+c) \\ &= -a-b+c-a-b-c \end{aligned}$$

$= -2(a+b)$.

思考拓宽 要化简带绝对值的式子，关键是在弄清绝对值符号内的数（或式）的符号（负、非负）后能正确去掉绝对值符号. 如果绝对值符号内的数（或式）是非负的，就直接去掉绝对值符号，如果绝对值符号内的数（或式）是负的，则必须在这个数（或式）的前面加“$-$”号，以保证去掉绝对值符号后的数（或式）是正的. 这也是解决化简形如$\sqrt{(a \pm b)^2}$型式子的基础.

★ 3. 将实数-2.4、$-\sqrt{6}$、π、3.3、$3\frac{1}{3}$用“<”连接起来，得________.

思路点拨 (1)这道题主要考查如何比较实数的大小.

(2)这道题的关键是比较-2.4与$-\sqrt{6}$，3.3与$3\frac{1}{3}$的大小.

题目解析 $\because \quad -2.4 = -\sqrt{2.4^2} = -\sqrt{5.76}$，而$\sqrt{5.76} < \sqrt{6}$，$\therefore \quad -\sqrt{5.76} > -\sqrt{6}$，即$-\sqrt{6} < -2.4$.

又$\because \quad 3\frac{1}{3} = 3.33\cdots > 3.3$，$\therefore \quad -\sqrt{6} < -2.4 < \pi < 3.3 < 3\frac{1}{3}$.

思考拓宽 有理数与无理数比较大小时，可以先把有理数化成与无理数的同次根式后再进行比较；小数与分数比较大小时，一般先把分数化成小数后再进行比较.

★ 4. 计算$(3a^2)^2 \cdot (a^2)^3 \div (-a)^3 \cdot a =$________.

思路点拨 (1)这道题重点考查正整数幂的运算性质的应用.

(2)先作乘方运算，再作乘除运算.

题目解析

$$\begin{aligned}(3a^2)^2 \cdot (a^2)^3 \div (-a)^3 \cdot a &= 9a^4 \cdot a^6 \div (-a)^3 \cdot a = 9a^{10} \div (-a)^3 \cdot a \\ &= -9a^7 \cdot a \\ &= -9a^8\end{aligned}$$

思考拓宽 式子中如有不同级运算，应先算高级的，再算低级的，同一级运算应从左到右依次进行，注意不要出现下面的错误：

原式$= 9a^4 \cdot a^6 \div (-a^3) \cdot a = 9a^{10} \div (-a^4) = -9a^6$.

★ 5. 在$3\sqrt{2}$、$\sqrt{24}$、$\sqrt{75}$、$\sqrt{\frac{1}{48}}$中是同类二次根式的是________.

思路点拨 (1)这道题重点考查运用同类二次根式的概念判断几个二次根式是否为同类二次根式.

(2)$\sqrt{24}$，$\sqrt{75}$，$\sqrt{\frac{1}{48}}$都不是最简二次根式，在没有化成最简时，不易判断哪些是同类二次根式，先化成最简后，再判断哪些是同类二次根式就容易了.

题目解析 $\because \quad \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$，$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$，$\sqrt{\frac{1}{48}} = \frac{1}{12}\sqrt{3}$.

$\therefore \quad \sqrt{75}$和$\sqrt{\frac{1}{48}}$是同类二次根式.

思考拓宽 要判断一些根式是否为同类,一般是先将不是最简的二次根式化成最简后再进行判断.注意:这里的"化成最简",是为了有利于判断几个根式是否为同类根式,但同类根式并不一定都是最简的,如 $5\sqrt{2}$、$\sqrt{8}$、$\sqrt{18}$是同类二次根式.

★ 6.若$\frac{x-y}{y}=\frac{1}{2}$,则$\frac{x}{y}=$________.

思路点拨 (1)这道题重点考查根据已知条件求分式的值、活用同分母分式加、减的法则及活用比例的合比性质.

(2)先变化已知,用一个字母表示另一个字母,然后代入$\frac{x}{y}$,求其值.这是这种题的常规解法.本题已知中隐含了 $y\neq0$ 的条件.

(3)显然从已知中不能同时求出 x 和 y 的值,根据分式$\frac{x-y}{y}$的特点可以逆用同分母分式减法的法则,从已知直接求出$\frac{x}{y}$.

(4)根据比例的合比性质,可直接求出$\frac{x}{y}$的值.

题目解析 解法一:$\because$ $\frac{x-y}{y}=\frac{1}{2}$, $x-y=\frac{1}{2}y$, $x=\frac{3}{2}y$.

$\therefore$ $\frac{x}{y}=\frac{\frac{3}{2}y}{y}=\frac{3}{2}$.

解法二:$\because$ $\frac{x-y}{y}=\frac{x}{y}-\frac{y}{y}=\frac{x}{y}-1=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

解法三:$\because$ $\frac{x-y}{y}=\frac{1}{2}$,

$\therefore$ $\frac{(x-y)+y}{y}=\frac{1+2}{2}$,

$\therefore$ $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

思考拓宽 (1)解法一是根据等式的性质,运用解方程的方法,解出一个字母,代入$\frac{x}{y}$中,再运用分式的基本性质消掉字母而得值.

(2)解法二中,由$\frac{x-y}{y}$推到$\frac{x}{y}-1$,是逆用了"同分母的两个分式相加减,分母不变,把分子相加减"的法则,这是在解决有关分式运算问题时常用的方法.解法二渗透了整体变换思想.

(3)因为$\frac{x-y}{y}=\frac{1}{2}$是比例式,利用比例的合比性质"如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$",很容易消掉左式分子中的 y,而直接得到$\frac{x}{y}$的值.

★ 7.把 0.04598 保留三位有效数字并用科学记数法表示为________.

思路点拨 (1)这道题考查了有效数字的意义和科学记数法.

(2)保留三位有效数字就是从 4 开始向右保留到 9,数字 8 作四舍五入处理.

题目解析 $0.04598 \approx 0.0460 = 4.60 \times 10^{-2}$.

思考拓宽 (1)在用保留有效数字的方法截取近似数时要注意：

①用四舍五入法截取近似数；

②要保留几位有效数字，就从左边第一个不为零的数字起数到第几个数字为止都是要保留的数字，把保留的最后一个数字的下一个数字进行四舍五入；

③如果需要保留的最后一位数字是零，且在小数部分，又它的下一位数不能进位时，就不能把这个零去掉；

④如果需要保留的最后一个数是9而它的下一位数又能进位，因而使保留的最后一个数字9进位变为零时，这个零哪怕在小数部分也应保留.

(2)在用科学记数法记数时要注意：第一个因数必须是小于10而不小于1的数，要保留几个有效数字，就应写出几个数字，后面的数字是零时不能去掉；第二个因数是10^n(n为整数).如将5999和54.01都保留三个有效数字并用科学记数法表示，分别为6.00×10^3和5.40×10.

★ 8.分式$\dfrac{x+3}{x^2-1}$、$\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+4x+3}$的最简公分母是________.

思路点拨 这道题重点考查求具有较复杂分母的两个分式的最简公分母.解此类题的关键是能把可以分解因式的分母进行因式分解后再找它们的最小公倍式.

题目解析 ∵ $x^2-1=(x+1)(x-1)$，$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$.

∴ 两个分式的最简公分母是$(x+1)(x-1)(x+3)$.

思考拓宽 (1)能找出两个或几个分式的最简公分母是分式通分的基础，能简化通分运算，最简公分母就是几个分式分母的最小公倍式，如果分母是多项式时，能分解因式的应先分解，然后再找几个分母的最小公倍式.

(2)应重视因式分解在求几个分式的最简公分母时的作用.

★ 9.将语句"m的绝对值的相反数与n的和的平方的倒数"，用代数式表示为________.

思路点拨 (1)这道题重点考查用代数式表示用语言叙述的数量关系.

(2)"m的绝对值"写成$|m|$，"m的绝对值的相反数"写成$-|m|$，"m的绝对值的相反数与n的和"写成$-|m|+n$，"m的绝对值的相反数与n的和的平方"表示成$(-|m|+n)^2$，"m的绝对值的相反数与n的和的平方的倒数"表示为$\dfrac{1}{(-|m|+n)^2}$.以上可叫做"正向推出"法，也可用"逆向填空"法写出表示式：语句所叙述的数是某数的"……倒数"，表示为$\dfrac{1}{__}$，"……和的平方的倒数"，表示为$\dfrac{1}{(__+__)^2}$，"……绝对值的相反数与n的和的平方的倒数"表示为$\dfrac{1}{(-|__|+n)^2}$，"m的绝对值的相反数与n的和的平方的倒数"表示为$\dfrac{1}{(-|m|+n)^2}$.

题目解析 $\dfrac{1}{(-|m|+n)^2}$.

思考拓宽 把用语言叙述的数量关系和实际问题中的数量关系用代数式表示出来，是训练数学语言表达、列方程解应用题、找变量之间的函数关系等知识的基础，在列代数式时，要注意题目中的语言叙述所表达的运算顺序问题，需要加括号的要加括号.

二、选择题

★ 1. 以下运算中结果正确的是(　　)

A. $x^3+x^3=x^6$　　B. $(x^3)^4=x^{12}$　　C. $x^6\div x^2=x^3$　　D. $x^5\cdot x^3=x^{15}$

思路点拨 (1)这道题主要考查正确运用正整指数幂的运算性质及整式加法运算.

(2)题中四个选项中只有B符合幂的乘方法则是正确的.

题目解析 ∵　$x^3+x^3=2x^3\neq x^6$,

$x^6\div x^2=x^4\neq x^3$,

$x^5\cdot x^3=x^8\neq x^{15}$.

只有$(x^3)^4=x^{12}$正确.

∴　选B.

思考拓宽 选项A、C、D是在整式加法及正整指数幂运算中容易出现的错误，应特别注意.

★ 2. 若实数m、n满足$|2m-1|+(n+2)^2=0$，则mn的值等于(　　)

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

思路点拨 这道题重点考查：如果几个非负数之和为零，那么这几个非负数必都是零. 解本题的关键是由已知挖掘出隐含条件$2m-1=0$且$n+2=0$.

题目解析 由题意，得$|2m-1|=0$，$(n+2)^2=0$.

∴　$2m-1=0$，　$m=\dfrac{1}{2}$；

$n+2=0$，　$n=-2$.

∴　$mn=-1$.

∴　选A.

思考拓宽 (1)常见的非负数有：一个数的绝对值、偶数次幂及算术根等.

(2)如"若x、y为实数，且$\dfrac{1}{3}(x+3)^{36}+5\sqrt{y-\dfrac{1}{3}}=0$，求$xy$的值."也属于本题类型.

★ 3. 已知，a、b、c是三角形的三条边的长，则代数式$a^2-2ab+b^2-c^2$的值是(　　)

A. 正数　　B. 负数　　C. 非负数　　D. 0

思路点拨 (1)本题综合考查了三角形三边关系，分组分解法，公式法分解因式及有理数乘法法则等知识的灵活运用.

(2)应先将代数式进行因式分解，根据"三角形中两边之和大于第三边，两边之差小于第三边"，确定每个因式的符号，从而判断代数式值的正负情况.

题目解析

$$a^2-2ab+b^2-c^2=(a-b)^2-c^2$$
$$=(a-b+c)(a-b-c)$$
$$=[(a+c)-b][a-(b+c)].$$

∵ a、b、c 是三角形三边的长，

∴ $(a+c)-b>0, a-(b+c)<0.$

∴ $a^2-2ab+b^2-c^2<0.$

∴ 选 B.

思考拓宽 (1)这道题综合性较强，考查知识点较多，代数与几何知识结合，有一定难度，解此题有利于培养综合分析问题的能力和联想能力.

(2)解题时要注意隐含条件的挖掘，这道题的已知隐含了解决问题的至关重要的条件：a、b、c 都是正数；这三个数中任意两个数之和大于第三个数，任意两个数之差小于第三个数.

(3)当一个代数式的值的正负直接判断受阻时，一般地，把这个代数式分解因式，就容易发现判断途径.

★ 4. 将 x^4-1 分解因式，结果为(　　)

A. $(x^2-1)(x^2+1)$　　B. $(x+1)^2(x-1)^2$

C. $(x-1)(x+1)(x^2+1)$　　D. $(x-1)(x+1)^2$

思路点拨 (1)这道题考查了运用平方差公式分解因式及分解到底原则.

(2)把 x^4 看成 $(x^2)^2$，用平方差公式直接将 x^4-1 分解因式(到不能再分解为止).

题目解析 ∵ $x^4-1=(x^2)^2-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1).$

∴ 选 C.

思考拓宽 (1)本题也可用下面的方法解：

运用公式和多项式乘法法则把选项中的因式积反化成多项式(注意分解到底原则)，从而选出正确的选项. 即

∵ $(x-1)(x+1)(x^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)=x^4-1,$

$(x+1)^2(x-1)^2=[(x+1)(x-1)]^2=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1,$

$(x-1)(x+1)^2=[(x-1)(x+1)](x+1)=(x^2-1)(x+1)$

$=x^3+x^2-x-1.$

又∵ A、C 虽都可得到 x^4-1，但 x^2-1 还可再分解，可见 A 没有分解到底.

∴ 选 C.

(2)在进行因式分解时，要注意在指定的数域内分解到不能再分的原则，已学过实数，如果题中没指定在什么范围内分解，就应该在实数范围内进行分解. 如果题目中已指定在什么范围内分解因式，那就按要求分解.

★ 5. 现有下列四个结论：①ax^2+bx+c 与 0 都是整式；②代数式 $(a+b)^2$ 与 $(-a-b)^2$ 的值一定相等；③$2m^2n$ 与 $2mn^2$ 是同类项；④若两个多项式的和是 0，则它们的差是其中一个多项式的二倍. 其中正确结论的个数是(　　)

A. 3 个　　B. 2 个　　C. 1 个　　D. 0 个

思路点拨　(1)在这道题的四个结论中，结论①考查了整式的概念；结论②考查了提取公因式方法、积的乘方法则及有理数平方的意义；结论③考查了同类项的概念；结论④主要考查分析问题、解决问题及简单的逻辑推理能力.

(2)ax^2+bx+c 是多项式，0 是单项式，根据"单项式和多项式统称整式"判断①正确. 因为 $(-a-b)^2=[-(a+b)]^2=(a+b)^2$，所以②正确. 因为"所含字母相同，并且相同字母的次数也相同的项叫做同类项"，$2m^2n$ 和 $2mn^2$ 中虽有相同字母，但相同字母的指数不同，所以它们不是同类项，③错误. 对于结论④，设有两个多项式 F 和 G，$F+G=0$，由此可得 $F=-G$ 或 $G=-F$. 所以 $G-F=G-(-G)=2G$，$F-G=F-(-F)=2F$. 前者是多项式 G 的二倍，后者是多项式 F 的二倍，④正确.

题目解析　选 A.

思考拓宽　(1)把结论④中的"多项式"改成单项式、分式、根式都能成立.

(2)在对④进行判断时要注意"它们的差"并没确定谁减谁，故应两种情况一并考虑，才能作出正确判断.

★　6. 当 $y<0$ 时，把根式 $\sqrt{-x^2y}\cdot\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 化简，得(　　)

A. $y\sqrt{x}$　　B. $-y\sqrt{x}$　　C. $y\sqrt{-x}$　　D. $-y\sqrt{-x}$

思路点拨　(1)本题考查了负数开方无意义、算术根、根式乘法法则等知识点.

(2)因为被开方的是非负数时，根式才有意义，所以 $-x^2y$ 与 $\dfrac{y}{x}$ 都非负，因为分母为零时分式无意义，所以 $x\neq0$，因为 $y<0$，所以 $x<0$. 由以上可知 $-x^2y>0$，$\dfrac{y}{x}>0$，$\sqrt{-x^2y}\cdot\sqrt{\dfrac{y}{x}}>0$. 因此可以从①根式是否有意义，②化简结果是否为正来判断各选项哪个正确. A、B 两个选项中含 $\sqrt{x}$，因 $x<0$，故无意义. C、D 中 $\sqrt{-x}$ 有意义，但因 $y<0$，所以 $y\sqrt{-x}<0$，C 错误. $-y\sqrt{-x}>0$，D 正确.

题目解析　选 D.

思考拓宽　(1)注意发现 $x<0$ 的隐含条件.

(2)对与本题类似的选项作判断时，可先从根式是否有意义入手，接着判断其正、负情况，不要出现有负号就一定是负数的错觉.

★　7. 下列结论正确的是(　　)

A. $\dfrac{-a-b}{c}=-\dfrac{a-b}{c}$　　B. $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=x-y$

C. $2x+\dfrac{y}{3}-\dfrac{2z}{3}$ 不是分式　　D. $\dfrac{1}{x-3}\times(3-x)\div\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{1}{x-3}$

思路点拨　这道题选项 A 考查分式的变号法则，选项 B 考查了应用平方差公式分解因式和分式的基本性质，选项 C 考查了分式的定义，选项 D 考查分式乘除运算

法则.

题目解析 因为 $\frac{-a-b}{c}=\frac{-(a+b)}{c}=-\frac{a+b}{c}$，所以 A 错误；因为 $\frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{(x+y)(x-y)}{x-y}=x+y$，所以 B 错误；因为 $\frac{1}{x-3}\times(3-x)\div\frac{1}{3-x}=(-1)\div\frac{1}{3-x}=(-1)\times\frac{3-x}{1}=x-3$，所以 D 错误，故 C 正确.

∴ 选 C.

思考拓宽 (1)A 的错误主要是忽略了分子 $-a-b$ 是一个整体，这是学生很容易犯的错误，应特别注意.

(2)C 式中两项 $\frac{y}{3}$ 与 $\frac{2z}{3}$ 的分母中都不含字母，都不是分式，所以 $2x+\frac{y}{3}-\frac{2z}{3}$ 是多项式不是分式，如果将这个多项式化简，得到 $\frac{6x+y-2z}{3}$，也不是分式. 其实在几个代数式求和时，如果各项都是整式，其结果也一定是整式.

(3)D 出现的错误再次提醒我们，在作同一级运算时，从左到右依次进行.

三、解答题

★ 1. 计算 $1\frac{2}{3}-\{5\frac{4}{5}-(-2)^2\div[(-\frac{1}{2})^3+3\times(-\frac{3}{8})]\times\frac{1}{16}\}$.

思路点拨 (1)这道题重点考查有理数的混合运算，培养准确而迅速的运算能力.

(2)这是一个有理数混合运算的题目，计算时要注意运算顺序.

题目解析
$$\begin{aligned}原式&=1\frac{2}{3}-[5\frac{4}{5}-4\div(-\frac{1}{8}-\frac{9}{8})\times\frac{1}{16}]\\&=1\frac{2}{3}-[5\frac{4}{5}-4\div(-\frac{5}{4})\times\frac{1}{16}]\\&=1\frac{2}{3}-(5\frac{4}{5}+\frac{16}{5}\times\frac{1}{16})\\&=1\frac{2}{3}-(5\frac{4}{5}+\frac{1}{5})=1\frac{2}{3}-6=-4\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

思考拓宽 这种题目属容易题之列，但学生往往容易出错，其主要原因是：①错误使用运算律或弄错了运算顺序；②平时忽视练习，没有形成准确而迅速的运算能力.

★ 2. 已知 $x=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$y=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，求 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 的值.

思路点拨 (1)这道题重点考查根据已知条件求代数式的值.

(2)把 x、y 的值直接代入 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 中，再化简求值，是这种题的常规解法. 但这种方法有时会使运算很繁，容易出现计算错误.

(3)由于 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$，再由已知容易求出 $x+y$ 和 xy 的值，代入前式，这种解法是把已知条件及代数式的特点综合考虑的结果，有时会使计算简化，有利于培养分析、综合及联想能力和整体思想.

题目解析　解法一：$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$

$$=\frac{5+2\sqrt{5}\sqrt{3}+3+5-2\sqrt{5}\sqrt{3}+3}{2}=8.$$

解法二：∵　$x+y=(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2\sqrt{5}.$

$xy=(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2=2.$

∴　$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(2\sqrt{5})^2-2\times2}{2}=\frac{20-4}{2}=8.$

思考拓宽　此题后面一种解法可以推广到求解关于一元二次方程根与系数关系中的一类题目，如"设 α、β 是方程 $x^2+8x+4=0$ 的两个根，求①$(\alpha+1)(\beta+1)$，②$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$，③$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$，④$\alpha^2+\beta^2$，⑤$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$，⑥$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$，⑦$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$，⑧$\alpha^3+\beta^3$，⑨$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$，⑩$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$，⑪$(\alpha+\frac{1}{\beta})(\beta+\frac{1}{\alpha})$的值."

★　3. 计算$\frac{2}{3}x\sqrt{9x}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^3\sqrt{\frac{1}{x^3}}$.

思路点拨　(1)这道题重点考查二次根式加减运算及化最简根式、合并同类项等知识的应用.

(2)先把非最简根式化成最简根式，再合并同类根式.题目中隐含了 $x>0$ 的条件.

题目解析　原式$=\frac{2}{3}x\cdot3\sqrt{x}+6x\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x}-x^3\cdot\frac{1}{x^2}\sqrt{x}$

$$=2x\sqrt{x}+3x\sqrt{x}-x\sqrt{x}=4x\sqrt{x}.$$

思考拓宽　把一个二次根式化成最简二次根式是作二次根式加减法的基础，应注意训练.

能力检测

一、填空题

1. 一项工程单独干完甲需 10 天，乙需 15 天，现在乙先干 x 天，甲再参加，用代数式表示合干完剩下的工程所需的时间________.

2. 近似数 0.01907 精确到________分位，它的有效数字是________，用科学记数法可表示为________.

3. 在$\sqrt{9}$、$-\pi$、$0.4\dot{2}\dot{3}$、$\frac{\sqrt{3}}{2}$、tan60°、0.618 中属于有理数的是________，属于无理数的是________.

4. $[(x-y)+5][(x-y)^2-5(x-y)+25]-125$ 的立方根是________.

5. 如果$(m+1)^2x^2y^{n-1}$是一个关于 x、y 的六次单项式，系数为 0.25，则 $m=$________，$n=$________.

6. 若$(a+b)^2=6$，$(a-b)^2=2$，则 $a^3+b^3=$________.

7. $2^{-(2k+1)}-2^{-(2k-1)}+2^{-2k}=$________.

8. 一条公路全长 a 千米，骑自行车 b 小时可以到达终点，若要提前 20 分钟到达终点，自行车每小时应行________千米.

9. 分式$\frac{2x}{x^2-9}$、$\frac{x-1}{x^2+x-6}$、$\frac{x+2}{x^2+5x+6}$的最简公分母是________.

10. 若 $1\leqslant x\leqslant 3$,则化简 $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}=$ ________.

11. 如果最简根式 $\sqrt[5a+b]{3a-b}$ 与 $\sqrt[4-a]{7a+b}$ 是同类根式,则 $a=$ ________, $b=$ ________.

12. x、y 是实数,且 $y=\sqrt{x-5}+\sqrt{5-x}+3$,则 $x^y=$ ________.

13. $2^{10}-1$ 的因数是________.

14. 如果 $x^2-mx+4n$ 是一个完全平方式,那么,用含 m 的代数式表示 n 的结果是________.

15. 如果一个正方形的面积是 $x^2+6x+9(x>0)$,那么这个正方形的边长是________.

16. 如果把 $x^4+x^2y^2+y^4$ 中的 x^2y^2 换成 $2x^2y^2-x^2y^2$,那么 $x^4+x^2y^2+y^4$ 可以分解成__________.

二、选择题

1. b 千克盐完全溶解在 a 千克的水中,这时盐水的浓度是(　　)

A. $\frac{b}{a}\times 100\%$　　B. $\frac{a}{b}\times 100\%$　　C. $\frac{a}{a+b}\times 100\%$　　D. $\frac{b}{a+b}\times 100\%$

2. p 是一个两位数,q 是一个一位数,把 q 放在 p 的左边组成一个三位数,那么这个三位数是(　　)

A. qp　　B. $10q+p$　　C. $100q+p$　　D. $q+p$

3. m 是一个整数的平方数,那么和 m 相邻且比它大的那个平方数是(　　)

A. $m+2\sqrt{m}+1$　　B. $m+1$　　C. m^2+1　　D. 以上都不对

4. 若 $a^m=9, a^n=6, a^p=2$,则 a^{m-2n+p} 等于(　　)

A. 6　　B. 3　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. n 是自然数,则 $\frac{[-1-(-1)^n](n^2-1)}{16}$ 的值(　　)

A. 一定是零　　B. 一定是不为零的偶数

C. 不一定是整数　　D. 是整数但不一定是偶数

6. 若除式为 x^2-2x+1,商式为 x^2+2x-1,余式为 $4x$,则被除式为(　　)

A. x^2-4x^2+1　　B. x^4+4x^2+8x+1

C. $x^4+4x^3-12x^2+8x-1$　　D. x^4-4x^2+8x-1

7. 若 $3^{|2x-1|}=9^0$,那么 x 等于(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 0　　D. 1 或 0

8. 下列计算:

(1) $(a^{n+1}b^n)^2=a^{2n+1}b^{2n}$; (2) $(-x^2)^3=-x^6$; (3) $a^6\div 2a^4=2a^2$; (4) $(-a^{m-1})^2=-2a^{2m-2}$; (5) $(a^n+b^n)^2=a^{2n}+2a^nb^n+b^{2n}$; (6) $(x-y)^3\div(y-x)=(x-y)^2$;其中,结果错误的有(　　)

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

9. 若 a、b 都是实数,且满足 $a^2+b^2=4a-2b-5$,则 $(a+b)^{2000}$ 的值等于(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. -2^{2000}

10. 一种商品单价原为 a 元$(a>0)$,先按原价提高 10%,再按新价降低 10%,得到商品新单价为 b 元.那么 a、b 的大小关系是(　　)

A. $a>b$　　B. $a=b$　　C. $a<b$　　D. 不能确定

11. 轮船从甲地开往乙地的速度为 v_1 千米/小时,返回时仍按同一路线,速度为 v_2 千米/小时,则轮船往返一次的平均速度(单位:千米/小时)为(　　)

A. $\frac{v_1+v_2}{2}$　　B. $\frac{S}{v_1+v_2}$ (S 为甲、乙两地间的距离)

C. $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$　　D. $\frac{v_1v_2}{v_1+v_2}$

12. 在实数范围内,$\left||\sqrt{-x^2}-2|-3\right|$ 的值为(　　)

A. 5　　B. 1　　C. 6　　D. 不能惟一确定

13. 已知 $x^2+ax-b=(x+c)(x-d)$，如果 a、b、c、d 都是正数，那么(　　)

A. $c=d$　　B. $c<d$　　C. $c>d$　　D. $c\geqslant d$

14. 如果 $12x^3+16x^2-5x-3=(2x-1)(2x+3)(kx+1)$，那么常数 k 的值是(　　)

A. 3　　B. -3　　C. 6　　D. -6

15. 把 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$ 分解因式的一种方法，是设 $x^2+8x=t$，这时，原式可变形为(　　)

A. $t^2-22t+90$　　B. $t^2+22t+90$　　C. $t^2-22t+120$　　D. $t^2+22t+120$

三、解答题

1. 某班共有学生 40 人，其中 m 岁的 9 人，n 岁的有 18 人，其余都是 s 岁的人，用代数式表示他们的平均年龄．若 $m=13$，$n=10$，$s=11$，则他们的平均年龄是多少？

2. $|3x+12|+(\frac{2}{3}x-y+2k)^2=0$，且 y 是负数，求 k 的取值范围．

3. 若 a 是 $\sqrt{10}$ 的小数部分，b 是 $\sqrt{5}$ 的小数部分，求 $a^2+\frac{1}{a^2}+b^2+\frac{1}{b^2}$ 的值．

4. 已知 $a-b=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$，$b-c=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，求 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$ 的值．

5. 把 $x^4-3x^2y^2+y^4$ 化成平方差的形式，再分解因式．

6. 一个三位数，如果三个数位上的数的和是 3 的倍数，那么这个三位数能被 3 整除．

(1) 用代数式表示这个判断；

(2) 说明这个判断正确．

第二部分

一次方程（组）和一元一次不等式(组)

一、填空题

★ 1. 已知，2 是方程 $ax^2+x-2=0$ 的解，则 $a=$ ________.

思路点拨 (1)这道题考查了方程的解的概念及解一元一次方程.

(2)2 是方程的解，即 $x=2$ 适合方程. 把 $x=2$ 代入方程后可得关于 a 的一元一次方程.

题目解析 把 $x=2$ 代入方程，得 $4a=0$， $\therefore$ $a=0$.

思考拓宽 解此类题时，只要把方程中的未知数换成方程的解的值，就会得到关于另一个字母的方程，然后再解方程，求出字母的值.

★ 2. 在代数式 $3x-5y+1$ 中，当 $y=3$ 时，它的值与代数式 $2x-7$ 的值互为相反数，则 $x=$ ________.

思路点拨 (1)这道题重点考查相反数的概念及解一元一次方程.

(2)把 $y=3$ 代入 $3x-5y+1$ 后所得代数式与代数式 $2x-7$ 的和等于 0，这就得到关于 x 的一元一次方程.

题目解析 当 $y=3$ 时， $3x-5y+1=3x-5\times3+1=3x-14$.

根据题意，得 $(3x-14)+(2x-7)=0$，

$3x-14+2x-7=0, 5x=21, \therefore$ $x=4\frac{1}{5}$.

思考拓宽 根据相反数的概念，可以列出两个方程 $(3x-14)+(2x-7)=0$, $3x-14=-(2x-7)$. 第一个方程的根据是“两个相反数之和等于零”，第二个方程的根据是“将一个数乘以 -1 就是这个数的相反数”. 其实，这两个方程本质是相同的.

★ 3. 关于 x 的方程 $ax^{2-a}+1=-3$ 是一元一次方程，则 $a=$ ________.

思路点拨 (1)这道题考查一元一次方程的概念.

(2)题中所给的方程是一元一次方程，所以 $a\neq0$，x 的指数等于 1.

题目解析 根据题意，得 $2-a=1$.

解方程，得 $a=1\neq0$.

$\therefore$ $a=1$.

思考拓宽　因为 $ax^{2-a}+1=-3$ 是一元一次方程，所以 x 的系数不等于零与 x 的指数等于 1 要同时考虑.

★ 4. 已知点 $P(3a-2b,4a-5b)$ 与点 $P'(-11,-3)$ 关于坐标原点对称，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

思路点拨　(1)这道题综合考查关于坐标原点对称的两点的坐标之间的关系及解二元一次方程组.

(2)关于坐标原点对称的两点的横坐标互为相反数，纵坐标也互为相反数，由此可得二元一次方程组.

题目解析　根据题意，得 $\begin{cases}3a-2b=-(-11)\\4a-5b=-(-3)\end{cases}$

即 $\begin{cases}3a-2b=11 & (1)\\4a-5b=3 & (2)\end{cases}$

(1)×5－(2)×2，得 $7a=49$，$a=7$. 把 $a=7$ 代入(1)，得 $b=5$.

思考拓宽　如将题中的“关于坐标原点对称”改为“关于 x 轴对称”或“关于 y 轴对称”时，其解题思路与本题相同. 但要注意对称两点的横、纵坐标之间的关系.

★ 5. 已知 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ 都是方程 $y=kx+b$ 的解，则 $k=$ ________，$b=$ ________.

思路点拨　(1)这道题重点考查根据已知，列、解二元一次方程组.

(2)把方程的两个解分别代入方程就得到关于 k 和 b 的二元一次方程组，解之则可求得 k 和 b 的值.

题目解析　把 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ 分别代入方程 $y=kx+b$，

得 $\begin{cases}-1=2k+b & (1)\\2=-k+b & (2)\end{cases}$

(2)－(1)，得　$3=-3k$，即 $k=-1$，把 $k=-1$ 代入(2)，得 $b=1$.

思考拓宽　要求两个未知数，需要两个独立方程，要求 $y=kx+b$ 中的 k 和 b，就应给出方程的两个解(少了不行，多了无用)，由此而得到关于 k、b 的二元一次方程组，这种方法在求一次函数的解析式(直线方程)时，经常应用.

★ 6. 如果 $\frac{1}{2}x^{a+1}y^{-2b}$ 与 $-\frac{1}{3}x^{2-b}y^{a}$ 是同类项，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

思路点拨　(1)这道题综合考查同类项的概念及根据已知列、解二元一次方程组.

(2)同类项各相同字母的指数相同. 由两个单项式中 x 的指数相同、y 的指数相同，可列出二元一次方程组.

题目解析　根据题意可得 $\begin{cases}a+1=2-b\\-2b=a\end{cases}$　即 $\begin{cases}a+b=1\\a+2b=0\end{cases}$

解方程组，得　$a=2$，$b=-1$.