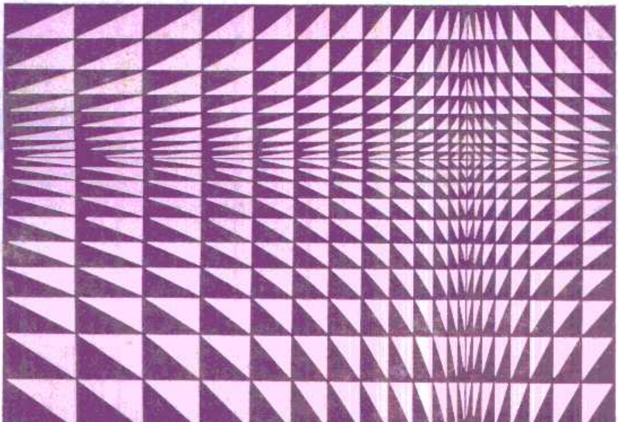
中学教师继续教育丛书

高中数学
竞赛的知识与方法

左宗明　编著



杭州大学出版社

高中数学竞赛的知识与方法

左宗明 编著

杭州大學出版社

高中数学竞赛的知识与方法
左宗明　编著
*
杭州大学出版社出版
（杭州天目山路34号）
*
浙江省新华书店发行　　浙江印刷集团公司印刷
787×1092毫米　1/32　11.25印张　243千字
1996年7月第2版　　1996年7月第5次印刷
印数：25001—37000
ISBN 7-81035-150-8/G·060
定　价：10.70 元

第一章

整数的基本知识及其应用

数学竞赛中常有应用整数知识的试题，其中涉及整数奇偶性、整除性、整数高次幂的末位数及不定方程的问题尤多。这些问题虽然应用的整数知识简单、浅显，但内容却丰富多采，且解法灵活乖巧，技巧千变万化，对启迪思维，开阔思路，提高能力，发展智力，非常有益。

第一节　整数的简单性质

一、质数与合数

设 a,b 是整数，$b\neq 0$。若有整数 c 使得 $a=bc$，则 a 叫做 b 的倍数，b 叫做 a 的因数或约数。这时也说 b 能整除 a，或 a 能被 b 整除，记为 $b|a$。

下面的性质是显然的：

(1) 若 $b|a$，则 $b|(-a)$，$(-b)|a$，$(-b)|(-a)$，$|b|\,|\,|a|$。

(2) 若 $a|b,b|c$，则 $a|c$。

(3) 若 $|a|<|b|$，且 $|b|\,|\,|a|$，则 $a=0$。

一个大于 1 的整数，仅有 1 和它本身这两个正因数，则这样的正整数叫做质数或素数。今后我们常用 p 或 $p_1,p_2,p_3,$

…等表示质数。

一个正整数除1和它本身以外，还有其他正因数，则这样的正整数叫做合数。显然

$$\text{全体正整数}=\{1\}\cup\{\text{全体质数}\}\cup\{\text{全体合数}\}.$$

若 b 是质数，又是整数 a 的因数，则 b 称为 a 的质因数。

显然，2是全体偶数中唯一的质数，而且是所有偶数的质因数。

如果两个整数 p 与 q 没有共同的质因数，则称 p 与 q 互质，记为 $(p,q)=1$。

我们还有下面的性质：

（4）设 a 是大于1的整数，则 a 的大于1的最小因数一定是质数。

证明 若 a 是质数，则 a 的大于1的因数只有1个，就是 a 本身，它当然是 a 的大于1的因数；

若 a 是合数，p 为 a 的大于1的最小因数，则 p 必为质数。因为 p 若为合数，则有 $1<c<p$，使 $c|p$。因为 $p|a$，故由性质(2)，$c|a$，这与 p 的最小性矛盾。

（5）对于 $a>1$，若所有不大于 $\sqrt{a}$ 的质数 $p\nmid a$（表示 a 不被 p 整除），则 a 是质数。

证明 用反证法。设 $a=bc$，其中 $b>1$ 为 a 的最小因数，于是 $c\geqslant b$。又由(4)，b 为质数，根据题设，不大于 $\sqrt{a}$ 的质数 $p\nmid a$，而 $b|a$，故 $b>\sqrt{a}$，从而

$$bc>\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a,$$

这与 $bc=a$ 相矛盾，所以 a 是质数。

二、整数的奇偶性

关于整数奇偶性的下列性质显然成立：

（1）奇数与偶数之和（或差）为奇数。

（2）任意个偶数之和（或差）是偶数。

（3）奇数个奇数之和（或差）为奇数；偶数个奇数之和（或差）为偶数。

（4）有限个整数之积为奇数，则其中每个整数都是奇数；有限个整数之积为偶数，则这些整数中至少有一个偶数。

下面举例说明这些简单知识在解数学竞赛题中的应用。

例 1 求方程 $x^y+1=z$ 的质数解 x,y,z。（1987 年湖北省初中数学竞赛题）

分析 从讨论整数 z 的奇偶性入手，并紧紧抓住 2 是唯一的偶质数这一突破口，探索已知方程的解的情况。

解 若 z 为偶数，则因 z 为质数，故 $z=2$，从而 $x^y=1$。这样，在整数范围中必须 $x=1$ 或 $y=0$，但 0 与 1 均非质数，因此 z 不可能是偶数，只能是奇数。这时 x^y 为偶数，由于奇数的任意次幂都是奇数，所以 x 必为偶数。但 x 为质数，故 $x=2$。

因为 $z=2^y+1$ 当 y 为奇数时，是 $2+1=3$ 的倍数，不为质数，故 y 只能为偶数，即 $y=2$。这时 $z=2^2+1=5$。所以 $x=2,y=2,z=5$ 是所求唯一的质数解。

例 2 已知 $m=3\lg a+\lg b$，其中 a,b 是质数且 $b-a=1985$，求 m 的范围。

分析 看看条件 $b-a=1985$ 提供了哪些线索？

解 由 $b-a=1985$ 知 $b>a$；而 1985 是奇数，由整数奇偶性的性质（1），知 a,b 中其一为奇数，另一为偶数；又已知 a,b 均为质数，而 2 是唯一的偶质数且是质数中最小的，所以

$a=2$，从而 $b=1985+a=1987$。

由于不大于$\sqrt{1987}$的质数 2,3,…,43 都不能整除 1987，故由质数的性质(5)，知 1987 确实是质数。这时

$$m=3\lg a+\lg b=3\lg 2+\lg 1987=\lg 15896,$$

$$\therefore \qquad 4<m<5.$$

例 3 证明 1979^2+2^{1979} 与 1979 互质。(1979 年苏联基辅数学竞赛题)

分析 因为 2^{1979} 只有偶因数，而 1979 只有奇因数，故 1979^2+2^{1979} 与 1979 似乎不可能有公因数，不妨用反证法试试看.

证明 设 $n=1979^2+2^{1979}$ 和 1979 的公因数 $p>1$，即有

$$n=pk,\quad 1979=pl,$$

k,l 为自然数.于是

$$2^{1979}=n-1979^2=pk-p^2l^2=p(k-pl^2)$$

能被 p 整除.因为任何大于 1 的奇数都不可能是 2^{1979} 的因数，所以 p 是偶数；另一方面，$pl=1979$ 是奇数，故由整数奇偶性的性质(4)，p 为奇数.这一矛盾证明了 n 与 1979 互质.

例 4 设 p_n 是第 n 个质数 ($p_1=2$，$p_2=3$，…)，证明 $p_n\leqslant 2^{2^{n-1}}$.(1981 年基辅数学竞赛题)

分析 因为结论与自然数 n 有关，故不妨试用数学归纳法.证明的困难可能在于由 $n\leqslant k$ 时结论成立，如何推出 $n=k+1$ 时结论也成立.故设法充分利用前 k 个质数所满足的不等式可能是解题的关键.

证明 用数学归纳法证明 $p_n\leqslant 2^{2^{n-1}}$.

当 $n=1$ 时，$p_1=2=2^{2^{1-1}}$，结论成立.

现设 $n\leqslant k$ 时结论成立，即有

$$p_n \leqslant 2^{2^{n-1}},\ n \leqslant k. \quad ①$$

要证明

$$p_{k+1} \leqslant 2^{2^k} \quad ②$$

也成立。由①式，得

$$p_1 \leqslant 2^1, p_2 \leqslant 2^2, p_3 \leqslant 2^{2^2}, \cdots, p_k \leqslant 2^{2^{k-1}}.$$

由于 $$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1,$$

故 $$p_1p_2p_3\cdots p_k \leqslant 2^{1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}} = 2^{2^k-1} = \frac{1}{2}2^{2^k},$$

$$1+p_1p_2p_3\cdots p_k = 1+\frac{1}{2}2^{2^k} \leqslant \frac{1}{2}2^{2^k}+\frac{1}{2}2^{2^k}=2^{2^k},$$

因此要②式成立，只须证明

$$p_{k+1} \leqslant 1+p_1p_2p_3\cdots p_k \quad ③$$

即可。显然，$p_1, p_2, \cdots$，p_k 均不可能是 $1+p_1p_2\cdots p_k$ 的质因数，故若p_m是 $1+p_1p_2\cdots p_k$ 的质因数，则 p_m 至少是第 $k+1$个质数 p_{k+1}，从而 $p_{k+1} \leqslant p_m$。另一方面，显然 $p_m \leqslant 1+p_1p_2\cdots p_k$，所以不等式③成立。于是，当 $n=k+1$ 时，也有 $p_{k+1} \leqslant 2^{2^k}$。由归纳原理，对一切自然数 n，都有

$$p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}.$$

例 5 令 a_n 表示前 n 个质数之和，即

$$a_1=2,\ a_2=2+3=5,\ a_3=2+3+5=10, \cdots$$

证明：对任意的 n，$[a_n, a_{n+1}]$ 中包含有一个完全平方数。(1979年苏联基辅数学竞赛题)

分析 由于 $a_4=2+3+5+7=17$，$a_5=2+3+5+7+11=28$，而区间$[a_1,a_2]=[2,5]$，$[a_2, a_3]=[5,10]$，$[a_3,a_4]=[10,17]$，$[a_4,a_5]=[17,28]$中都包含有一个完全平方数，因此只需对 $n \geqslant 5$ 的情形证明本题。

另一方面，如果$\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\geqslant 1$，或$a_{n+1}-a_n\geqslant 1+2\sqrt{a_n}$，则区间$[\sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n+1}}]$上必包含有一个自然数$m$，即$\sqrt{a_n}\leqslant m\leqslant\sqrt{a_{n+1}}$，而这等价于$a_n\leqslant m^2\leqslant a_{n+1}$。因此为证明本题，只须证明当$n\geqslant 5$时

$$p_{n+1}=a_{n+1}-a_n\geqslant 1+2\sqrt{a_n}. \qquad ①$$

证明 根据a_n的定义，知p_{n+1}为第$n+1$个质数，且不等式①等价于

$$(p_{n+1}-1)^2\geqslant 4a_n=4(p_1+p_2+\cdots+p_n).$$

记$q_n=(p_n-1)^2-4(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})$，则

$$\begin{aligned}q_{n+1}-q_n&=(p_{n+1}-1)^2-(p_n-1)^2-4p_n\\&=(p_{n+1}-p_n)(p_{n+1}+p_n-2)-4p_n.\end{aligned}$$

注意到$n\geqslant 2$时，p_n都是奇数，从而$p_{n+1}-p_n\geqslant 2$，故

$$\begin{aligned}q_{n+1}-q_n&\geqslant 2(p_{n+1}+p_n-2)-4p_n\\&=2(p_{n+1}-p_n-2)\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此，当$n\geqslant 2$时，数列q_n单调增加．由于

$$\begin{aligned}q_5&=(p_5-1)^2-4(p_1+p_2+p_3+p_4)\\&=(11-1)^2-4(2+3+5+7)=32>0,\end{aligned}$$

故当$n\geqslant 5$时，$q_n\geqslant q_5>0$。这就证明了，当$n\geqslant 5$时，不等式①成立。

本题中，原来要求证明$[a_n, a_{n+1}]$中包含有一个完全平方数，处理时，我们改为证明$\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\geqslant 1$，因为当此不等式成立时，$[\sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n+1}}]$上必包含有一个自然数$m$，从而就有$a_n\leqslant m^2\leqslant a_{n+1}$，也就是说，我们证明了一个使原结论成立的充分条件．这种证明方法通常称为“变更问题法”，它是数学中常用的一种重要证明方法。

例 6 桌上放着 7 只杯口向上的茶杯．若每次任意翻转(即将杯口向上者变为杯口向下，或者相反)其中的 4 只茶杯，则不论翻转多少次，永远不可能使所有茶杯杯口向下，试证明之。

分析 观察某一次翻转的 4 只杯子，看看杯口向上(或向下)的杯子数有什么变化？

证明 某一次翻转的 4 只杯子，在翻转前的情况不外乎有以下几种可能：

(1) 这 4 只杯子杯口均向上，翻转后杯口向上的杯子数减 4；

(2) 这 4 只杯子有 3 只杯口均向上，翻转后杯口向上的杯子数减 2；

(3) 这 4 只杯子有 2 只杯口向上，翻转后杯口向上的杯子数不变

(4) 这 4 只杯子有 1 只杯口向上，翻转后杯口向上的杯子数增 2；

(5) 这 4 只杯子杯口均向下，翻转后杯口向上的杯子数增 4。

总之，翻转一次，杯口向上的杯子数或者不变，或者增减一个偶数，因而不改变杯口向上的杯子数的奇偶性。但原有 7 只杯口向上的杯子，因此不论翻转多少次，杯口向上的杯子数仍是奇数，永远不可能等于零，即不可能使这 7 只杯子的杯口均向下。

从以上证明可知，本例中茶杯数只要是奇数，而每次翻转的杯子数是偶数，结论仍然不变。

例 7 在棋盘上有兵卒各一枚，规定双方只能横行或竖

走，每步一格，以吃掉对方（即走到对方棋子上）为胜．如果红（兵）方先走，你能否预测哪一方将获胜？如果卒的位置不变，且仍然红方先走，那么，为使红方有可能获胜，兵应位于棋盘上哪些方格内？

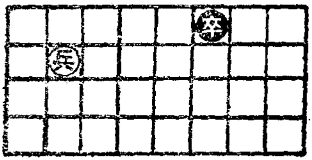


图 1-1

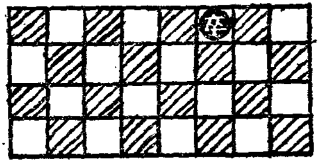


图 1-2

解 我们先规定兵和卒之间的"距离"．如果兵和卒位于同一（横）行或同一（竖）列上，则它们之间的距离等于它们之间的方格数加 1；如果兵和卒既不同行也不同列，那么棋盘上存在一个以兵、卒为顶点，边平行于棋盘边框的矩形，这时兵和卒之间的距离就等于该矩形周界上的方格数之半．例如图 1-1 中兵卒之间的距离就是 5．

兵卒各走一步，称为一个回合，经过若干个回合后，如果能使兵卒之间的距离等于 1，那么下一步兵就可以吃掉卒而获胜；如果经过若干个回合后兵卒之间的距离等于 0，那么刚才最后一步兵被卒吃掉．由于每一回合，兵卒各走一步，因而每经一回合，兵卒之间的距离或者不变，或者改变 2（增加 2 或减少 2），因此，无论经过多少个回合，兵卒之间的距离，或者不变，或者改变一个偶数，所以，无论经过多少个回合，原来距离为 5 的兵卒之间的距离一定还是一个奇数，而不可能等于 0，这说明卒不可能取胜．为了证明红方必然获胜，只要让红兵朝卒所在位置方向横走或竖走，卒为了逃避被兵吃掉，

只好往前逃，但由于棋盘方格数有限，卒逃到边上后，无法前行，只得改变方向，往旁边逃，一直逃到角上，被困，最后只好被兵吃掉。

显然如果“棋盘”是“环形”的，则卒可一直往前逃，这时便分不出胜败了。

如果卒的位置不变，为了使红方获胜，兵所在的方格应使兵卒之间的距离为奇数，因此，兵应位于图 1-2 中棋盘上的那些有阴影的方格上。

例 8 若整系数多项式

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$$

当 $x=0$ 与 $x=1$ 时取奇数值，则它无整数零点，试证明之。

分析 对任意整数(奇数或偶数) p，设法证明 $f(p)$是奇数。

证法 1 设 p 为任意整数，取另一整数 q，使 $p-q$ 为偶数，这时

$$\begin{aligned}f(p)-f(q)&=a_0(p^3-q^3)+a_1(p^2-q^2)+a_2(p-q)\\&=(p-q)[a_0(p^2+pq+q^2)+a_1(p+q)+a_2]\end{aligned}$$

显然是偶数。

若 p 为奇数。取 $q=1$，因为已知 $f(1)$是奇数，故 $f(p)$也是奇数，从而不为零；

若 p 为偶数，则取 $q=0$，因为已知 $f(0)$是奇数，故 $f(p)$仍然是奇数，当然也不为零。

既然任何奇数与偶数 p 都不能使 $f(p)=0$，所以$f(x)$没有整数零点。

证法 2 因为 $f(0)=a_3$ 是奇数，$f(1)=a_0+a_1+a_2+a_3$ 也是奇数，所以 $a_0+a_1+a_2$ 是偶数。

若 p 是偶数，则

$$f(p)=a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3=p(a_0p^2+a_1p+a_2)+a_3$$

等于偶数与奇数之和，当然不等于零；

若 p 是奇数，令 $p=q+1$，则 q 是偶数，于是

$$\begin{aligned} f(p) &= f(q+1) \\ &= a_0(q+1)^3+a_1(q+1)^2+a_2(q+1)+a_3 \\ &= [(a_0+a_1+a_2)+q(a_0n+a_1m+a_2)]+a_3, \end{aligned}$$

式中 n、m 都是整数。由于方括号里是偶数，而 a_3 是奇数，所以仍有 $f(p)\neq 0$。

即，不论 p 是怎样的整数，$f(p)\neq 0$，故 $f(x)$ 无整数零点。

注 1. 容易看出，这里的证明适用于任何 n 次多项式 $f(x)$，只要 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数；

2. 证法 2 告诉我们，若一个偶数 a（相当于问题中的 0）与一个奇数 b（相当于问题中的 1），使 $f(a)$ 与 $f(b)$ 都是奇数，则对任何整数 p，$f(p)$ 必为奇数；

3. 本题也采用了变更问题法，证明了比原结论更强的结论。

例 9 设正整数 n 的不同正因数的个数为 $S(n)$。例如 24 有正因数 1,2,3,4,6,8,12,24. 所以 $S(24)=8$。试确定和

$$S(1)+S(2)+\cdots+S(1989) \quad ①$$

是奇数还是偶数?（1989 年澳大利亚数学竞赛题）

分析 考虑和①中有多少个值为奇数的项，即对 1—1989 中的哪些自然数 n，$S(n)$ 是奇数?

解 设 d 是 n 的正因数，则 $\frac{n}{d}$ 也是 n 的正因数。因此 n 的正因数总是成对地出现的。其中，仅当 n 是完全平方数

时，n 的因数 $d=\sqrt{n}=\frac{n}{d}$ 自身配对。因此当且仅当 n 为完全平方数时，n 有奇数个不同的正因数。

由于 $45^2=2025>1989>1936=44^2$，所以 1，2，…，1989 中有 44 个完全平方数，即和①中有 44 个奇数，从而这个和必为偶数。

例 10 能否把 1，1，2，2，3，3，…，1986，1986 这些数排成一行，使得两个 1 之间夹着一个数，两个 2 之间夹着两个数，…，两个 1986 之间夹着一千九百八十六个数？（首届全国中学生数学冬令营竞赛试题）

分析 不妨假定是可能的，看看会不会产生矛盾。

解 假定符合题设条件的排列存在，则这些数排好之后，共占了 $2\times1986=3972$ 个位置，按自左至右的顺序给这些位置编号，对于每个 i（$1\leqslant i\leqslant1986$），设两个 i 在排列中所对应的号码分别为 a_i 与 b_i（$b_i>a_i$），依题意，应有

$$b_i-a_i=i+1,$$

或

$$b_i+a_i-2a_i-1=i.$$

从 1 到 1986 求和，得

$$\sum_{i=1}^{1986}(b_i+a_i)-2\sum_{i=1}^{1986}a_i-1986=\sum_{i=1}^{1986}i. \qquad ①$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{1986}(b_i+a_i)$ 是 1—3972 各数之和，所以它等于

$$\sum_{i=1}^{3972}i=\frac{1}{2}(1+3972)\times3972=3973\times1986,$$

于是①式左端是一个偶数。但①式右端

$$\sum_{i=1}^{1986}i=\frac{1}{2}(1+1986)\times1986=1987\times993$$

却是一个奇数。这一矛盾说明满足题设要求的排列不可能存在。

注 本例的结论实际上与 n 有关。例如，当 $n=3$ 和 $n=4$ 时，这种排列是存在的，如图 1-3 和图 1-4 所示。一般地，当 $n=4k-1$ 或 $n=4k$ $(k=1,2,\cdots)$ 时，能够找到符合要求的排列，而且有很多种。当 $n=7$ 时，有人通过电脑排出了 26 种(不计颠倒排法)，而 $n=8$ 时，竟有 150 种。

2	3	1	2	1	3

图 1-3

2	3	4	2	1	3	1	4

图 1-4

例 11 设 $E=\{1,2,3,\cdots,200\}$，$G=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{100}\}\subset E$，且 G 具有下列性质：

(1) 对任何 $1\leqslant i<j\leqslant 100$，恒有 $a_i+a_j\neq 201$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{100} a_i=10080$。

试证明：G 中的奇数的个数是 4 的倍数，且 G 中所有数字的平方和为一定数。(1990 年全国高中数学联赛试题)

分析 E 中的数 1—200 中有 100 个奇数和 100 个偶数：

$$\begin{array}{l} 1,\quad 3,\quad 5,\ \cdots,197,199 \\ 200,198,196,\cdots,\ 4,\quad 2 \end{array}$$

故可分为 100 个组：$\{1,200\}$，$\{3,198\}$，$\cdots$，$\{199,2\}$，各组两数之和都等于 201。而 E 的子集 G 有 100 个数 a_i，由条件(1)，各组中有且仅有 G 中的一个数。由此可知：若 G 中有 k 个奇

数,则它们是上述 100 个组中 k 个组里的奇数，而 G 中的另 $100-k$ 个偶数是其余的 $100-k$ 个组里的偶数。据此设法证明 k 是 4 的倍数。

证明 对 $1\leqslant i\leqslant 100$,记

$$\alpha_i=2i-1,$$
$$\beta_i=201-\alpha_i=2(101-i),$$
$$E_i=\{\alpha_i,\beta_i\},$$

则 G 中包含且只包含 E_i 中的一个元素。设 G 中有 k 个奇数 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant 100)$,于是

$$a_{i_t}=\alpha_{i_t}\quad(1\leqslant t\leqslant k),\quad a_j=\beta_j\ (j\neq i_t),$$

由题设(2),得

$$\sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t}+\sum_{j\neq i_t}\beta_j=10080;\qquad ①$$

另一方面

$$\sum_{j=1}^{100}\beta_j=202\times100-2\sum_{j=1}^{100}j=10100.\qquad ②$$

②－①得
$$\sum_{t=1}^{k}(\beta_{i_t}-\alpha_{i_t})=20,$$

即
$$201\cdot k-2\sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t}=20,$$

$$201\cdot k=2\left(\sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t}+10\right).\qquad ③$$

故 k 必为偶数。若 $k=2m,m=2p+1$(m,p 均为自然数),则③式化为

$$201\cdot m=\sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t}+10.$$

因为偶数个奇数之和为偶数,故右端为偶数,但左端是奇数,矛盾.所以 k 必是 4 的倍数。

G中各数的平方和为

$$\sum_{i=1}^{100} a_i^2=\sum_{t=1}^{k} \alpha_{i_t}^2+\sum_{j\neq i_t} \beta_j^2$$

$$=\sum_{j=1}^{100} \beta_j^2-\sum_{t=1}^{k} \beta_{i_t}^2+\sum_{t=1}^{k} \alpha_{i_t}^2$$

$$=\sum_{j=1}^{100} [2(101-j)]^2-\sum_{t=1}^{k}(\beta_{i_t}^2-\alpha_{i_t}^2)$$

$$=4\sum_{i=1}^{100} i^2-\sum_{t=1}^{k}(\beta_{i_t}+\alpha_{i_t})(\beta_{i_t}-\alpha_{i_t})$$

$$=4\times\frac{1}{6}\times 100(100+1)(200+1)-201\times 20$$

$$=1349380.$$

例 12 设$n\geqslant 2$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$都是正整数，且$a_k\leqslant k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$。试证明：当且仅当$a_1+a_2+\cdots+a_n$为偶数时，可以适当选取“+”号和“−”号，使得

$$a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n=0. \quad ①$$

(1990年全国高中数学冬令营选拔考试试题)

分析 关键是证明条件①是必要的，可用数学归纳法，但在应用归纳假设时，可考虑$a_k=a_{k-1}$与$a_k\neq a_{k-1}$两种情况。

证明 设①式成立。由①式知其中带正号的各项a_i之和(设为m)等于带负号的各项a_j之和，因此

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_i a_i+\sum_j a_j=m+m=2m$$

是偶数。

下设$a_k\leqslant k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，$a_1+a_2+\cdots+a_n$为偶数。现用数学归纳法证明①式成立。

当$n=2$时，$a_1\leqslant 1$，$a_2\leqslant 2$，于是$a_1=1$，$a_2=1$或$a_2=2$。但a_1+a_2为偶数，故只可能$a_2=1$，所以