微积分学

第一分册

(初　　稿)

楊从仁編

高等教育出版社

微 积 分 学

第一分册

（初稿）

楊 从 仁 編

高等教育出版社出版北京宣武門內承恩寺7号
（北京市書刊出版业营业許可証出字第054号）
人民教育印刷厂印装　新华书店发行

統一書号13010·651　开本850×1168 1/32　印張1 6/16
字数30,000　印数9,001—14,000　定价（6）¥0.15
1959年7月第1版　1969年10月北京第2次印刷

序 言

本書是为天津市广播函授大学編写的微积分学教材，供电机、机械、化工、冶金四系使用。

由于本講义是广播講授，时数約80—90小时。所以在編写时，旣对教材內容的选擇要精簡扼要，而在叙述方面又要力求詳尽，以便自修。其次考虑到学員的需要，所以微积分学的主要內容及其应用都得兼而有之。每一节的末尾都附有習題及解題暗示以帮助学員在花費不太多的时間情况下能独立进行运算，从而更进一步掌握教材內容。

本教材主要是依据苏联塔拉索夫所著高等数学教程以及苏联魯金院士所著微积分来編写的，但在选材及叙述方面則根据本教材的目的及性質来确定。

限于个人能力不足，缺乏經驗，編写时間比較倉促，因此缺点一定很多，希讀者提出批評，惠予指正。

編者 1959.6.2.

目　　录

第一章　函数与極限 ……1

§1. 常量与变量 ……1

§2. 函数 ……3

§3. 函数的几何表示法 ……8

§4. 絕对値 ……11

§5. 无穷小量 ……12

§6. 无穷小量的基本性質 ……17

§7. 变量的極限 ……20

§8. 变量的極限的基本定理 ……25

§9. 无穷大量 ……29

§10. 連續函数 ……34

第一章　函数与極限

§1. 常量与变量

在自然科学或工程技术的研究中，我們經常要碰到各种各样本質上不同的对象。例如在物理学上有速度、力、質量、热容量、导体的电阻等。在化学上有原子量、分子量、溶解度等。在几何学上有綫段長、面积、体积等。对于这样的对象，都可以在其同类的对象中取出一个来作为單位(即作为标准)来度量該类对象的大小。例如对長度来說，这样的單位可取为米，对質量来說可取为瓩，对电压来說可取为伏特等等。在数学上，我們把一切可以度量的对象統叫做“量”。

但是在数学上我們不可能把这些本質上不同的各种各样的量拿来一一研究，因此必須創造一般的理論，使它用到各种具体的量上都同样获得成功。这样一来，就必須在陈述数学原理及数学規律时，暂时抽去各种量的具体性質，而仅注意到它們的数値，所以在数学上我們只考慮所謂“一般的量”。正因为这样，才能使数学的理論广泛的应用到各种具体的量的研究上面。恩格斯在反杜林論中曾着重的指出这一点：“可是为要能够在其純粹状态中去研究这些形式和关系，那么就必須完全使它們脫离其內容，把內容放置一边作为不相干的东西；这样我們就得到沒有面积的点，沒有厚度和寬度的綫，a 和 b，x 和 y，常数和变数；……。”①

微分积分学(或說数学分析)正是研究一般的量以及它們之間的关系的科学。

在某一个具体問題的研究过程中，随着問題的条件的不同，一

① 請参閱該書中譯本，人民出版社1956年北京版，第38頁。

般把量分为两类，即常量与变量。

在問題的已知条件下，有的量保持着同一确定的数值，这种量我們以后就叫它做**常量**。反之，如果在問題的已知条件下，能取不同数值的量就叫做**变量**。

例如圓周長与圓的直徑的比（通常用文字π代表，它是一个无理数，近似值为3.1416…）就是一个常量。又如一切三角形的內角和都是180°，这也是一个常量。其他如光在眞空中的速度，物理定律中的各种常数都是常量的例子。

至于变量的例子就更不胜举了。因为自然界是处于不断运动，不断变化和發展的过程中，所以表示宇宙現象的量，絕大多数是变量。大气的压力，空气的溫度，火車的速度，人的体重，太阳在地平面上的高度等等都是变量的例子。正因为这样，在数学中对于变量的研究，是具有其重要意义的而且也是自然的。很难設想，在一种現象或过程中沒有任何变动的东西或者几乎沒有变动的东西。物質是在运动着和發展着的，它会在科学上給我們以啓發或者給我們实际的价值。而数学科学之所以显得如此重要，正因为它不仅是在常量之間建立了某些关系，而是在于它能够处理有变量参与的自然現象的进程。恩格斯在自然辯証法一書中曾强调的說："笛卡兒的变数是数学中的轉折点。因此运动和辯証法便进入了数学，因此微分和积分也就立刻成为必要的了，而它們也就立刻产生出来，…"。[①]微积分学正就是研究变量理論的科学。

上述的常量与变量之分，乍看起来是两个不能混同的概念，其实它只是为了某一特殊現象的研究而設的。有时从表面上来認識某一个量时会認为它是常量，但經过深入分析就表明它在变化。例如在一晝夜之內一个桌子的長似乎不变的，但事实上它在变化着，随着空气溫度的增減，它的長度也相应的在变化着。又如最准

① 請参閱該書中譯本，人民出版社1955年北京版第217頁。

确的鐘表的速度，也不是一个常量而是一个变量。

有时候一个量在某一条件之下可以看做是常量，在另外条件下又可以看做是变量。例如重力加速度在地球表面的同一点始終是常量，但在地球表面不同的点来測量重力加速度时，就会發現它是一个随地点的緯度而变化的变量。

依上所述，常量与变量这两个概念是相对的。以后，我們永远把常量看成变量的特殊情形，**就是說，把常量看成永远只取一个数値的变量。**

在習慣上，我們把拉丁字母的开头几个字母：$a, b, c, \cdots$ 用来表示常量，而其末尾几个字母：$x, y, z, \cdots$ 用来表示变量。

§2. 函数

2.1 函数的定义 如辯証唯物論所敎导我們的，自然界不是什么彼此孤立或互不依賴的各个对象的偶然的堆集，而是有着内在联系的統一整体。其中各个对象是相互密切联系着，相互依賴着，相互制約着的。所以在微积分学中研究变量时，不是也不可能是孤立的只着眼在一个量的变化上。事实上，在同一个現象中所遇到的种种的量，都不是独立的在变化着，在它們之間总存在着或多或少的关系，常因一个量的变化而引起另一个量的变化。我們不妨举一个例子来說明一下：

例 1. 設一个質点在眞空中自由下落，开始下落的时間作为零秒，从此开始过了 t 秒后設它下落了 s 厘米的距离，那末由初等物理学中所熟知的公式有

$$s=\frac{1}{2}gt^2. \tag{1}$$

(1)式中的 g 是一个常量，它等于 980 厘米/秒^2，就是所謂的重力加速度。

令 $t=1$，由(1)式可得 $s=490$ 厘米。令 $t=2$，可得 $s=1960$ 厘

米。其余类推。(1)式表示两个变量量 s 及 t（卽距离与时間）之間的关系。卽是說，这两个变量虽然在变化，但不是孤立在进行变化，s 的变化依賴于 t 的变化，給出 t 以一个数值，就得出 s 的一个对应数值(如 $t=1$ 时 $s=490$ 等等)，或者說，变量 s 有一个值与它对应。在数学上我們把这种变量之間相依存的关系叫做函数关系。現在我們定义的形式把它叙述如下：

定义。如果对于变量 x 的每一个可能取的值，变量 y 都有一个确定的值与它对应，那么变量 y 就叫做变量 x 的函数。变量 x 叫做自变量。联系自变量与函数的关系叫做函数关系。

簡單的說，所謂变量 y 是自变量 x 的函数就是說，每給自变量以一个数值，通过联系它們的函数关系，就能求出变量 y 的一个对应值。[例如在(1)中，$t=1$ 时 $s=490$, $t=2$ 时 $s=1960$ 等等]

我們再举几个例子如下：

例 2. 令 r 代表一个球的半徑，V 代表这个球的体积，那么由立体几何知道

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3. \tag{2}$$

由这个例子可知，球的体积 V 是它半徑 r 的函数，自变量 r 变化时函数 V 也随之而变。

例 3. 令 x 代表一个周長为 4 尺的矩形的底的長，那末这个矩形的面积 S 应等于

$$S=x(2-x). \tag{3}$$

由(3)式可知，若周長一定，矩形的面积 S 是它底边 x 的函数。自变量 x 变化时，函数 S 也随之而变。

2.2 函数的定义域　上面已經談到，如果給自变量 x 以一个值，通过函数关系，就可以确定变量 y 的值，我們就說变量 y 是变量 x 的函数。在定义中也提出“变量 x 每一个可能的值，”它的意义是說，自变量 x 虽然可以任意取值，但也不是漫无限制的，因为

并不是对 x 的任何一个値都可以确定 y 的値，实际上，根据問題的具体意义，自变量 x 所取的値也往往要受到一定的限制。

如在上述的例 1 中，若令 T 代表自由下落的質点到达地球表面所需要的时間，到达地球表面后，質点即行靜止，因此根据这个問題的性質，自变量 t 取的値超过 T 后，它所确定的 S 的値就沒有意义了。同理根据問題的性質，自变量 t 取負数値也沒有意义。又如在例 2 中，半徑 r 虽可取任意的正数値，但 r 取負数値或零时問題也沒有意义。同理在例 3 中，自变量 x 所取的値只有大于零同时小于 2 才有意义。

由上所述，我們看得很清楚，根据問題的具体条件，自变量 x 只能取某些指定的数値，由它所确定的函数才有意义。

对于某一个函数 y 来說，它的自变量 x 必有某些指定的可能的数値才使它有意义。这一些指定的可能的値的全体叫做函数 y 的**定义域**。

函数的定义域最常見的是区間，以后我們把滿足不等式

$$a<x<b$$

的所有 x 的値叫做开区間。开区間用記号 (a, b) 代表。又把滿足不等式

$$a\leqq x\leqq b$$

的所有 x 的値叫做閉区間。(記号 $a\leqq x$ 表示 x 大于或等于 a, $x\leqq$ $\leqq b$ 表示 x 小于或等于 b)。閉区間用 $[a, b]$ 代表。不論是开区間或閉区間，a 都叫做区間的左端点，b 叫做右端点。照这个定义，开区間不包含它的端点，閉区間却包含它的两个端点。

为了方便，若自变量 x 所取的値沒有任何限制，就是說，它可以取任意的实数。这时我們說它滿足不等式

$$-\infty<x<\infty,$$

或者說，它取开区間 $(-\infty, \infty)$ 的値。

利用解析几何所講的方法，开区間 (a, b) 及閉区間 $[a, b]$ 可用

圖象表示:

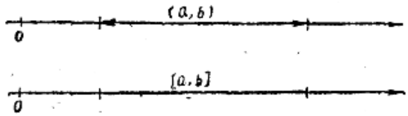

圖 1.

开区間$(-\infty, \infty)$就是整个的直綫。

例 1. 函数 $y=x^2$ 的定义域是开区間 $(-\infty, \infty)$, 因为 x 所取的值沒有任何限制。

例 2. 函数 $y=\arcsin x$ 的定义域是閉区間 $[-1, 1]$, 因为 y 代表正弦的值是 x 时的角,但由三角学知道正弦 x 的值不能大于1也不能小于 -1, 否則就沒有意义了,因此 y 的定义域是$[-1, 1]$。

例 3. $y=\sqrt{2+x}+\sqrt{1-x}$。若函数只限制取实数(在微积分学中往往这样做),那末为了$\sqrt{2+x}$是实数,必須 $x\geqq-2$。同理为了$\sqrt{1-x}$是实数,必須有$x\leqslant1$。因此函数 $y=\sqrt{2+x}+\sqrt{1-x}$的定义域是 $-2\leqq x\leqq1$,卽閉区間$[-2, 1]$。

2.3 函数的記号,函数值 为了表示变量 y 是变量 x 的函数,一般采用如下的記法

$$y=f(x), y=F(x), y=\varphi(x), \cdots$$

括号前面的字母 f, F, φ, 表示如何由所給的 x 的值来确定 y 的值的法則。

如在同一問題中,有时不仅討論到一个函数,而是要討論到一个以上的函数时,我們就应該用不同的文字来代表不同的函数。例如当我們同时討論自变量 x 的两个函数时,我們就把这两个函数分别的写成

$$y=f(x),\quad z=F(x),$$

变量 y 及 z 都是 x 的函数。

当自变量 x 的值等于 a 的时候,函数 $y=f(x)$ 的对应值就記

$f(a)$。为了求得 $f(a)$ 只需在表达函数的关系式 $f(x)$ 中把 x 代以 a 就够了(有时在代入 a 以后还需要把所得到的式子化简)。

例 1. 設 $f(x)=x^2-3x-1$,

那末
$$f(a)=a^2-3a-1,$$
$$f(2)=2^2-3\cdot2-1=-3,$$
$$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2-3\sqrt{2}-1=1-3\sqrt{2}.$$

例 2. 設 $F(\theta)=\cos\theta$,

那末
$$F(0)=\cos 0=1,$$
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$
$$F(\pi+\theta)=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta,$$
$$F(2\theta)=\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta.$$

習　題

1. 設 $f(x)=x^3-x^2+2x-3$。求 $f(0)$, $f(1)$ 及 $f(-2)$。

答: $f(0)=-3$, $f(1)=-1$, $f(-2)=-19$.

2. 設 $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta$. 求 $f(0)$, $f\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ 及 $f(\theta+2\pi)$.

答: $f(0)=1$, $f\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$, $f(\theta+2\pi)=\sin\theta+\cos\theta$.

3. 設 $f(x)=\log_{10}x$, 在这里 $\log_{10}x$ 是表示以 10 为底的 x 对数。求 $f(1)$, $f(10)$, $f(1000)$, 并証明 $f(xy)=f(x)+f(y)$。

答: $f(1)=0$, $f(10)=1$, $f(1000)=3$.

§3. 函数的几何表示法

設函数
$$y=f(x)$$
的定义域是閉区間 $[a, b]$, 就是說, 对于自变量 x 在閉区間上的每一个值, 变量 y 都有一个确定的值和它对应。利用解析几何学所講的方法, 我們可以把这种关系用圖形表示。

在平面上选定一个坐标系 xOy。从 Ox 軸的綫段 $[a, b]$ 上，过横标为 x 的一点，作 Ox 軸的垂綫，并在这个垂綫上取縱标等于 $f(x)$ 的一点 M。令 x 由 a 連續的变化到 b，順次經过其間的一切数值，那么点 M 画出一条曲綫来。这条曲綫表現了函数 $y=f(x)$ 依随于 x 变化的过程。以后我們就把这条曲綫叫做函数 $y=f(x)$ 的圖象(見圖 2)。

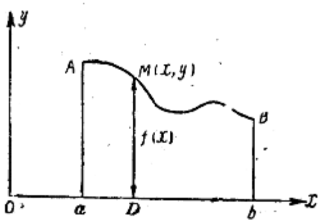

圖 2.

回忆一下解析几何学，我們已学过不少函数的圖象。不同的函数就有不同的曲綫。函数的几何表示法对于函数的研究具有很重要的意义，因为从函数的圖象上一眼就可以看出函数变化的情况来，例如它何时上升，何时下降，升降的快慢如何由圖象的表示都容易看出来。

为了作出一个函数的圖象，和我們在解析几何学中所講的方法是一样的。举几个例子来說明：

例 1. 求函数 $y=2x+3$ 的圖形。

先給自变量 x 以一些值，再計算出函数的对应值，把所求得的对应值作表如下：

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	…
y	3	5	7	9	1	-1	-3	…

其次由表中作出以自变量 x 的值为横标，对应的函数值为縱标的諸点。$(0, 3)$, $(1, 5)$, $(2, 7)$, $(3, 9)$, $(-1, 1)$, $(-2, -1)$, $(-3, -3)$, …。最后再把这些点用一条光滑的曲綫連接起来，就得出函数的圖象来(如圖 3)。

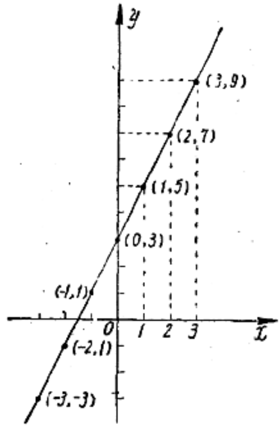

圖 3.

例 2. 作函数 $y=\sin x$ 的圖象。

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	0.5	0.87	1.00	0.87	0.50	0	-0.5	-0.87	-1.00	-0.87	-0.50	0

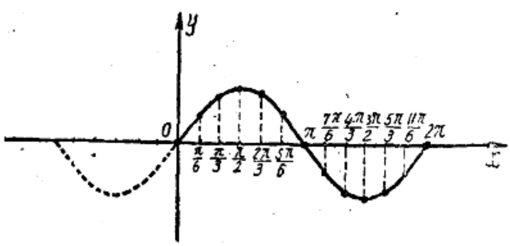

圖 4.

在作正弦函数 $y=\sin x$ 的圖象时，因角度 x 要沿着 Ox 来度量，所以我們把角度 x 用弧度法度量。以后我們也这样做，即在微积分

学中，角度永远用弧度来度量。

在这里，我們也不需給出 x 大于 2π 时的函数值，因为正弦函数是周期函数，就是說，函数在相差为 2π 的两个自变量 x（即弧度差为 2π 的两个角）的值是相同的，因此函数的圖象是把所描繪的一段向左右无限的繼續重复下去［函数 $y=\sin x$ 的定义域是 $(-\infty,\infty)$］，如圖上用虛綫所表示的那样。

由上述方法所得的圖象只是近似的，因为我們在一般的情形下函数的定义域含有无限多的数，我們自然不可能把代表他們的点一一画出来。当然，若取的自变量 x 的值愈多，所得的圖象就愈精确。

習　　題

1. 作函数 $y=x+3$ 的圖象。
2. 作函数 $y=x-x^2$ 的圖象。
3. 作函数 $y=x^3$ 的圖象。
4. 作函数 $y=2\cos 3x$ 的圖象。

§4. 絕对值

为了研究变量的变化状态，我們經常要用到絕对值这个概念。現在我們来把这个在代数上已經講过的概念复習一下。

定义　若数 a 为正数或为零，那么 a 的絕对值就是数 a 本身。若 a 为負数，那么 a 的絕对值是指 $-a$。

数 a 的絕对值記作 $|a|$。根据絕对值的定义可知，除 $a=0$ 外，a 的絕对值永远是一个正数。例如

$$|5|=5,\ |-5|=-(-5)=5,\ |0|=0.$$

一般地，

$$若\ a\geqq 0,\ 則\ |a|=a,$$
$$若\ a<0\ 則\ |a|=-a.$$

又根据絕对值的定义，絕对值等于 3 的数是 3 或 -3，而不可能是其他的数。

一般說来，

$$若\ |x|=c$$
$$则\ x=c\ 或\ x=-c.$$

利用不等式的性質也可以推知，絕对值小于 3 的任何数必在 -3 与 3 之間，例如 $-2, \frac{1}{4}, \sqrt{3}$ 等。一般說来

$$若\ |x|<c\quad (c\ 是一个正数)$$

则 $$-c<x<c.$$

現在提出关于絕对值計算的几个基本公式。

1. 代数和的絕对值小于或等于各項絕对值的和，即

$$|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|.$$

这个命題的正确性可由以下諸例看出

例 1. $$|3+5+8|=|16|=16$$

又 $$|3|+|5|+|8|=3+5+8=16$$

所以 $$|3+5+8|=|3|+|5|+|8|.$$

例 2. $$|-3-5-8|=|-16|=16$$

又 $$|-3|+|-5|+|-8|=3+5+8=16$$

所以 $$|-3-5-8|=|-3|+|-5|+|-8|.$$

例 3. $$|3-5+8|=|6|=6$$

又 $$|3|+|-5|+|8|=3+5+8=16$$

所以 $$|3-5+8|<|3|+|-5|+|8|.$$

2. 乘积的絕对值等于各因子的絕对值的乘积，即

$$|a\cdot b\cdot c|=|a||b||c|.$$

商的絕对值等于分母的絕对值除分子的絕对值，即

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

例 4.

$$|(-3)5|=|15|=15,\quad |-3|\,|5|=3\cdot5=15$$

所以 $$|(-3)5|=|-3|\,|5|.$$

例 5. $$\left|\frac{-3}{5}\right|=\frac{3}{5},\quad \frac{|-3|}{|5|}=\frac{3}{5}$$

所以 $$\left|\frac{-3}{5}\right|=\frac{|-3|}{|5|}.$$

§5. 无穷小量

5.1 无穷小量的概念　我們已經說过，在实际生活或自然現象与技术过程中，我們常常遇到各种各样的量，如長度、面积、体积、重量、力、速度等等。而一个自然現象或技术过程的主要标志，就是参与該現象或过程的量的变化与运动。微积分学的主要任务就是要研究变量在变化过程中的变化状态以及它变化时所遵循的規律。自然，一个变量在一个过程中的变化状态一般是比較复杂的，例如它可能繼續变大，或繼續变小，或时而变大时而变小。但是一般說来，当一个过程进到**充分長久以后**，就是說，**从某一个时刻以后**，我們常会發現这个变量具有某种性質或又不具另一性質。因此去發現参与某个过程的变量当过程进行到充分長久以后是否具有某种性質，对我們說来就是十分重要的了。

一种極端重要的变化状态是这样的，**即当过程进行到充分長久以后，或者說，从某个时刻以后，这个变量无論它怎样的在变化着，总是愈来愈接近于某一常量**。这种类型的变量，不論从数学理論上或实际应用上，都起着头等重要的作用，我們用两个例子来說明：

例 1. 三千年以前，我国古代哲学家庄子在他所著的天下篇里这样說“一尺之棰，日取其半，万世不竭”。这句話的意思是說，若把每天所剩下来的長度（設为变量 α ）記下来，就是数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

因此不論我們指定怎样小一个正数 ε，总能找到这样一天，过这一天以后，变量 α 虽仍取正数值但却永远保持小于 ε。这个变量 α 就是所謂无穷小量的一个例子。庄子所說的"万世不竭"就是說棰的長永远沒有变到等于零的一天。这个变量的变化状态如圖 5 所示。

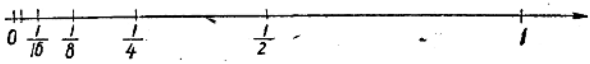

圖 5.

例 2. 設有一个單摆(圖 6)，由鉛直的位置开始摆动。單摆离开鉛直位置的偏度可以用幅角 θ 代度量。我們为了区别，可以規定單摆偏在右方时 θ 为正，偏到左方时 θ 为負。如果讓單摆自由的摆动，則由摩擦力与空气阻力的关系，振幅就不断减小。在这个运动过程中，变量 θ 一会兒变成正的，一会兒又变成負的，隨着时間的前进，振幅 θ 即愈来愈小。換句話說，不論我們指定怎样小一个正数 ε，总归有一个时刻，在这个时刻后，不論 θ 取正值或負值，但它的絕对值 $|\theta|$ 虽取正值却永远保持小于 ε。变量 θ 也是所謂的无穷小量的一个例子。

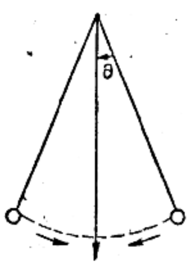

圖 6.

現在我們把这样的变量，即所謂的无穷小量用定义方式叙述如下。

定义 設 α 是一个变量。若任意指定不論怎样小一个正数 ε，都能找到一个时刻，过此时刻后变量 α 的絕对值就永远保持小于 ε。

$$|\alpha| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$