题解中心

三角法辞典

薛德炯 吳載耀 編譯

科学技術出版社

題解中心

三角法辭典

〔日本〕長澤龜之助原著
薛德炯　吳載耀　編譯

科學技術出版社

內容提要

本書为“数学辞典”的第五册，內容分平面三角法解法之部，球面三角法解法之部，名詞之部，三角法小史等四門，載有題解3,354題，插图460个，卷首附有三角公式集，三首法諸表，卷末附有英汉名詞对照表，全書約計830千字，附刊題解分类索引，記述簡明，易于査引；可供中学教师备課参考及爱好教学者自修檢閱之用。

題解中心

三角法辞典

原著者 〔日本〕長澤龜之助

編譯者 薛德炯 吳載耀

*

科学技術出版社出版

（上海南京西路2004号）

上海市書刊出版业营业許可証出079号

上海市印刷四厂印刷 新华書店上海发行所总經售

*

統一書号：17119·11

（原新亞版印10,000册）

开本787×1092耗1/32·印張29 1/4·字數830,000

1957年9月新1版

1957年10月第2次印刷·印数2,501—6,500

定价：(10)4.30元

編譯者言

余等自拋棄教書生涯，廁身於出版界，環顧同業現況，小說出品，車載斗量，科學書籍，寥若晨星，深感無以應國人之所需要，頗思有所貢獻，祇以自身對於科學，亦止淺嘗，何敢高騖；力短心長，不僅余等已也！

1932 年夏，新亞書店以編譯日本長澤氏所著算學辭典相囑，當以茲事體大，未敢輕於嘗試，擱置者半年，翌年春，新亞又重申前議，竊思事在人為，雖不無荊棘當前，祇在吾人能鼓勇猛晉，自有成功希望；因即由載耀編譯初稿，德炯加以修訂，閱時一載，積稿盈尺，於是即開始製版，除由呂君憲章，韓君寅生襄助繪圖，史君炳坤襄助校對外，余等復始終自任覆校，明知魯魚亥豕，在所不免，祇期能減少萬一，以稍輕余等之罪過已耳。

茲值發行將始，例須於卷首有言，爰就編校上之所感，縷述於下，以誌完成是書之經過。

1. 是書原以問題解法某某辭典分名各册，而其內容於辭典之通行體裁，頗有出入之處，本擬更名曰辭典式算學題庫，卒以特種關係採用今名，非始願也。

2. 原書疊經修訂，新增之題別列於補遺之部，茲則為之分門別類，納入本文；幾費經營，旨在一貫，中間或尚有未盡善處，祇以時間，精力，兩不我許，未及充分編配，引以為憾。

3. 原書名詞之部依照假名順序編排，茲則改用筆畫順序，我國算學名詞，至不統一，最近國立編譯館正在釐訂而尚未公布，友人中頗有以出書未及其時，將來須經改訂手續為余等惜者，際會如此，又何能已！

4. 排校算學書籍，難於普通書籍者奚啻倍蓰，稍一不慎，錯誤隨之，本書於算式之地位，尤加注意，絕不任其無理割裂，排校之時往往因算式之短長，牽涉行間之中斷，不得不設法添削字句，以資銜接；故為解決此項問題，無形之中費卻不少時間，不少精力，於字裏行間即此可知一書之編著與排校，莫妙於出自一手，坊間發行之算學書，對於算式之地位，支離割裂，目滿瘡痍者，所在都有；此種過誤，編著者自應負相當責任，不能盡諉之於排校者也。

5. 排校算學書籍，成本之重，遠超於普通書籍，商人於利薄事業而願斥重資者，什不獲一，此關於算學之刊物，數量上所以稀少之主因也。余等之於是書，實有賴於資方之促成，否則以全書五百萬言之巨，而竭我倆之棉薄欲印以行世，縱不望而卻走，亦須有所戒懼也。

6. 是書校印將半，知友見之者，獎借備至，殊滋惶愧！余等自知此書之性質，僅屬一種便於翻檢之類書，與所謂'題庫'者正相若，非比涵義宏大，理論精嚴之皇然巨著，故於編譯之時，僅懸'信''達'二字為的，而忽於文字之工拙，原書之誤點，亦僅就所發覺者加以訂正，未遑一一檢算也。特恐來日多方責難，用敢附明於此，尚希邦人君子有以諒之！

1935 年 4 月　　　　薛德炯　吳載耀

題解中心数学辞典重版贅言

我等編譯本書，开始于1932年，完成于1937年，整整地化了五个足年。刊行以来，历时已达20年。論到內容，自有若干場合不能与时代适应。为求內容完善，理应加以修訂。原出版者新亞書店，在公私合营以前，曾向我等提出此項問題，我等亦曾一再考慮，无奈都因忙于手头工作，无法分出时間来从事增訂，新亞方面亦无暇从事改版。統計全書字数在450万以上，頁数共5000有余，單就改排費用而論，即須10万余元，不是一件輕而易举的事。当时人力物力兩有限制，因而中止考慮，未能进行。只决定將印成之書售完为止，不再添印。那知兩年以来，存書早已賣尽，不見于市，上海旧書店且在高价收买，而來源缺缺。各地讀者紛紛向新华書店采購，无以供应。足征本書內容虽稍陈旧，而尚有參考价值。在未有同类的新書足以替代之前，重印若干部以应需要，事屬分所当为。所幸全書紙型完好，只須紙張有着，其他不难解决。現經决定由上海科学技术出版社就原有紙型重印出版，以应各方需要，特附志数語于此，以明繼續印行的經过。

薛德炯

1957年6月28日

I. 三角法公式集 平面

測角法

◉度與法度之比較.

$$D=G-G/10,\quad G=D+D/9.$$

◉分與法分之關係. $27\mu=50m$.

◉秒與法秒之關係. $81\sigma=250s$.

◉度與弧度之比較. $180\theta=\pi x$.

◉法度與弧度之比較. $200\theta=\pi y$.

三角函數之定義

◉$\sin A=\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$. ◉$\operatorname{cosec} A=\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$.

◉$\cos A=\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$. ◉$\sec A=\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$.

◉$\tan A=\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$. ◉$\cot A=\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}$.

◉$\operatorname{vers} A=1-\cos A$. ◉$\operatorname{covers} A=1-\sin A$.

三角函數之基本關係

◉$\sin A\times\operatorname{cosec} A=1$. ◉$\sin^2 A+\cos^2 A=1$.

◉$\cos A\times\sec A=1$. ◉$\sec^2 A=1+\tan^2 A$.

◉$\tan A\times\cot A=1$. ◉$\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A$.

◉$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$. ◉$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$.

◉$\sin A<\tan A<\sec A$.

◉$\cos A<\cot A<\operatorname{cosec} A$.

餘角之三角函數

◉$\sin(90^\circ-A)=\cos A$.

◉$\cos(90^\circ-A)=\sin A$.

◉$\tan(90^\circ-A)=\cot A$.

附註 $\operatorname{cosec} A$, $\sec A$, $\cot A$ 分別為 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ 之逆數,故從略.

補角之三角函數

◉$\sin(180^\circ-A)=\sin A$.

◉$\cos(180^\circ-A)=-\cos A$.

◉$\tan(180^\circ-A)=-\tan A$.

負角之三角函數

◉$\sin(-A)=-\sin A$.

◉$\cos(-A)=\cos A$.

◉$\tan(-A)=-\tan A$.

90°+A 之三角函數

◉$\sin(90^\circ+A)=\cos A$.

◉$\cos(90^\circ+A)=-\sin A$.

◉$\tan(90^\circ+A)=-\cot A$.

180°+A 之三角函數

⦿$\sin(180°+A)=-\sin A.$

⦿$\cos(180°+A)=-\cos A.$

⦿$\tan(180°+A)=\tan A.$

270°−A 之三角函數

⦿$\sin(270°-A)=-\cos A.$

⦿$\cos(270°-A)=-\sin A.$

⦿$\tan(270°-A)=\cot A.$

270°+A 之三角函數

⦿$\sin(270°+A)=-\cos A.$

⦿$\cos(270°+A)=\sin A.$

⦿$\tan(270°+A)=-\cot A.$

360°−A 之三角函數

⦿$\sin(360°-A)=-\sin A.$

⦿$\cos(360°-A)=\cos A.$

⦿$\tan(360°-A)=-\tan A.$

二角之三角函數

⦿$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

⦿$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$

⦿$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

⦿$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$

⦿$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$

⦿$\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$

⦿$\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}.$

⦿$\cot(A-B)=-\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot A-\cot B}.$

⦿$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B.$

⦿$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B.$

⦿$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B.$

⦿$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B.$

⦿$\sin C+\sin D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}.$

⦿$\sin C-\sin D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}.$

⦿$\cos C+\cos D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}.$

⦿$\cos C-\cos D=-2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}.$

三角之三角函數

⦿$\sin(A+B+C)$

$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$

$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C.$

⦿$\cos(A+B+C)$

$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$

$-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C.$

⦿$\tan(A+B+C)=(\tan A+\tan B+\tan C$

$-\tan A\tan B\tan C)/(1-\tan A\tan B$

$-\tan B\tan C-\tan C\tan A)$

⦿$\cot(A+B+C)=(\cot A\times\cot B\times\cot C$

$-\cot A-\cot B-\cot C)/(\cot B\cot C$

$+\cot C\cot A+\cot A\cot B-1).$

⦿若 $A+B+C=90°$, 則

$1=\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A.$

$\cot A\cot B\cot C=\cot A+\cot B+\cot C.$

⊙若 $A+B+C=180°$，則

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1.$

倍角之三角函數

⊙$\sin 2A=2\sin A\cos A.$

⊙$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$
$=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A.$

⊙$\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.$

⊙$\cot 2A=\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}.$

⊙$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A.$

⊙$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A.$

⊙$\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}.$

⊙$\cot 3A=\dfrac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}.$

分角之三角函數

⊙$\cos\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}.$

⊙$\sin\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}.$

⊙$2\cos\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}.$

⊙$2\sin\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}.$

⊙$\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{A}{2}+45°\right)=\pm\sqrt{1+\sin A}.$

⊙$\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{A}{2}+45°\right)=\pm\sqrt{1-\sin A}.$

⊙$\tan\dfrac{A}{2}=(-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A})/\tan A$
$=(-1\pm\sec A)\cot A.$

普偏角之三角函數

⊙$\cos(n\cdot 360°\pm A)=\cos A.$

⊙$\sin\{n\cdot 180°+(-1)^n A\}=\sin A.$

⊙$\tan(n\cdot 180+A)=\tan A.$

三角形四邊形等

⊙$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}.$

$$\left.\begin{array}{l}⊙a=b\cos C+c\cos B\\ ⊙b=c\cos A+a\cos C\\ ⊙c=a\cos B+b\cos A\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}⊙a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ ⊙b^2=c^2+a^2-2ca\cos B\\ ⊙c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}⊙\cos A=(b^2+c^2-a^2)/2bc\\ ⊙\cos B=(c^2+a^2-b^2)/2ca\\ ⊙\cos C=(a^2+b^2-c^2)/2ab\end{array}\right\}$$

次式中假定 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

$$\left.\begin{array}{l}⊙\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ ⊙\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ ⊙\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}⊙\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}\\ ⊙\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}\\ ⊙\cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}\end{array}\right\}$$

$$\text{⦿}\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$
$$\text{⦿}\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$
$$\text{⦿}\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$\text{⦿}(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A=a\cos\tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$\text{⦿}(c+a)\sin\tfrac{1}{2}B=b\cos\tfrac{1}{2}(C-A)$$
$$\text{⦿}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C=c\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\text{⦿}\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\tan\frac{B-C}{2}$$
$$\text{⦿}\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}=\tan\frac{C-A}{2}$$
$$\text{⦿}\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}=\tan\frac{A-B}{2}$$

$$\text{⦿}\sin A=\frac{2\Delta}{bc}.\quad \sin B=\frac{2\Delta}{ca}.\quad \sin C=\frac{2\Delta}{ab}$$
但 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\text{⦿}r=(s-a)\tan\frac{A}{2}.\quad r_1=s\tan\frac{A}{2}$$
$$\text{⦿}r_2=s\tan\frac{B}{2}.\quad r_3=s\tan\frac{C}{2}$$

⦿至 a 之中線 $=\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2+2bc\cos A)}$.

⦿角 A 之內二等分線 $=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$

⦿角 A 之外二等分線 $=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b\sim c}$

$$\text{⦿}\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}$$
$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs$$
$$=r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c)$$
$$=\frac{1}{2}h_a a=\frac{abc}{4R}.$$

⦿圓之內接四邊形之面積

$$=\sqrt{\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\}}.$$

⦿任意四邊形之面積

$$=\sqrt{\left\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\times\cos^2\frac{A+C}{2}\right\}}.$$

⦿外切四邊形之面積 $=\sqrt{abcd}\cdot\sin\dfrac{A+C}{2}$.

⦿內接且外切四邊形之面積 $=\sqrt{abcd}$.

⦿正多角形之邊心距 $r=a/2\tan\dfrac{\pi}{n}$.

⦿正多角形之半徑 $R=a/2\sin\dfrac{\pi}{n}$.

⦿同面積 $=\dfrac{n}{2}R^2\sin\dfrac{2\pi}{n}=nr^2\tan\dfrac{\pi}{n}$.

De Moivre 氏定理

$$\text{⦿}(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$
$$\text{⦿}\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\cdots\cdots.$$
$$\text{⦿}\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\cdots\cdots.$$

三角函數之展開

$$\text{⦿}\sin n\theta=n\sin\theta-\frac{n(n^2-1)}{3!}\sin^3\theta+\frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5\theta\cdots\cdots.$$
$$\text{⦿}\cos n\theta=\cos\theta\left\{1-\frac{n^2-1}{2!}\sin^2\theta+\frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4\theta-\cdots\cdots\right\}.$$

三角函數之指數值

$$\text{⦿}\cos\theta=\tfrac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}).$$
$$\text{⦿}\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}).$$
$$\text{⦿}i\tan\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}.$$

級數之和

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+4\beta)+\cdots+\cos\{\alpha+2(n-1)\beta\}=\frac{\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin\beta}.$$

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+2\beta)+\sin(\alpha+4\beta)+\cdots+\sin\{\alpha+2(n-1)\beta\}=\frac{\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin\beta}.$$

$$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots\cdots+\cos\left\{\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}=0.$$

$$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots\cdots+\sin\left\{\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}=0.$$

三角函數式之因數分解

◉n 為偶數時，$x^n-1=(x-1)(x+1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left\{x^2-2x\cos\frac{n-4}{n}\pi+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\frac{n-2}{n}\pi+1\right\}.$

◉n 為奇數時，$x^n-1=(x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left\{x^2-2x\cos\frac{n-3}{n}\pi+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\frac{n-1}{n}\pi+1\right\}.$

◉n 為偶數時，$x^n+1=\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{5\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{n-3}{n}\pi+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{n-1}{n}\pi+1\right).$

◉n 為奇數時，$x^n+1=(x+1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{n-4}{n}\pi+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{n-2}{n}\pi+1\right).$

◉$x^n-x^{-n}=(x-x^{-n})\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\times\cdots\cdots\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{n-1}{n}\pi\right).$

◉$x^n+x^{-n}=\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\cdots\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right).$

◉$x^{2n}-2x^n\cos\theta+1=\left(x^2-2x\cos\frac{\theta}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi+\theta}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi+\theta}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left\{x^2-2x\cos\frac{(2n-4)\pi+\theta}{n}+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\frac{(2n-2)\pi+\theta}{n}+1\right\}.$

◉$x^n+x^{-n}-2\cos n\theta=(x+x^{-1}-2\cos\theta)\left\{x+x^{-1}-2\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right\}\times\cdots\cdots\left\{x+x^{-1}-2\cos\left(\theta+\frac{2n-2}{n}\right)\right\}.$

II. 三角法公式集 球面

基 本 公 式

⊙$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$.

⊙$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B$.

⊙$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$.

sin A 之 公 式

⊙$\sin A=\sqrt{}(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a$

$\times\cos b\cos c)/(\sin b\sin c)$

$=2n/(\sin b\sin c)$.

但 $\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}^{\frac{1}{2}}$

$=n$ 及 $2s=a+b+c$.

餘切正弦之公式

⊙$\cot a\sin b=\cot A\sin C+\cos b\cos C$.

⊙$\cot b\sin a=\cot B\sin C+\cos a\cos C$.

⊙$\cot b\sin c=\cot B\sin A+\cos c\cos A$.

⊙$\cot c\sin b=\cot C\sin A+\cos b\cos A$.

⊙$\cot c\sin a=\cot C\sin B+\cos a\cos B$.

⊙$\cot a\sin c=\cot A\sin B+\cos c\cos B$.

正 弦 比 例

⊙$\sin A/\sin a=\sin B/\sin b=\sin C/\sin c$

$=2n/(\sin a\sin b\sin c)$.

半 角 之 公 式

⊙$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$.

⊙$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$.

⊙$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$.

半 弧 之 公 式

⊙$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}}$.

⊙$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}$.

⊙$\tan\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}$.

但 $2S=A+B+C$.

Napier 氏 公 式

⊙$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2}$.

⊙$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2}$.

⊙$\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{c}{2}$.

◉$\tan\frac{1}{2}(a-b)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\dfrac{c}{2}$.

Delambre 氏比例式

◉$\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$.

◉$\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$.

◉$\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$.

◉$\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$.

球面直角三角形

[C 爲直角]

◉$\left.\begin{array}{l}\sin b=\sin B\sin c\\ \sin a=\sin A\sin c\end{array}\right\}$

◉$\left.\begin{array}{l}\tan a=\cos B\tan c\\ \tan b=\cos A\tan c\end{array}\right\}$

◉$\left.\begin{array}{l}\tan b=\tan B\sin a\\ \tan a=\tan A\sin b\end{array}\right\}$

◉$\left.\begin{array}{l}\tan A\tan B=1/\cos c\\ \cot A\cot B=\cos c\end{array}\right\}$

內切圓傍切圓外接圓

◉$\tan r=\dfrac{n}{\sin s}=\tan\dfrac{A}{2}\sin(s-a)$

$=\dfrac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a$

$=\dfrac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}$.

但 $N=\{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\times\cos(S-C)\}^{\frac{1}{2}}$.

◉$\cot r=\dfrac{1}{2N}\{\cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)\}$.

◉$\tan r_1=\dfrac{n}{\sin(s-a)}=\tan\dfrac{A}{2}\sin s$

$=\dfrac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a$

$=\dfrac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$.

◉$\cot r_1=\dfrac{1}{2N}\{-\cos S-\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)\}$.

◉$\tan R=-\dfrac{\cos S}{N}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$

$=\dfrac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos(S-A)}=\dfrac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{n}$

$=\dfrac{1}{2n}\{\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s\}$.

◉$\tan R_1=\dfrac{\cos(S-A)}{N}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$

$=\dfrac{\tan\frac{1}{2}a}{-\cos S}=\dfrac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{n}$

$=\dfrac{1}{2n}\{\sin s-\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)\}$.

◉$(\cot r+\tan R)^2=\dfrac{1}{4n^2}(\sin a+\sin b+\sin c)^2-1$.

◉$(\cot r_1-\tan R)^2=\dfrac{1}{4n^2}(\sin b+\sin c-\sin a)^2-1$.

面 積

◉球面三角形 $ABC=(A+B+C-\pi)r^2$.

◉多角形$=\{\Sigma-(n-2)\pi\}r^2$.

[但 Σ 爲多角形各角之和].

Cagnoli 氏定理

⊙$\sin\frac{1}{2}E=\frac{\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$. 但 $E=A+B+C-\pi$.

Lhuilier 氏定理

⊙$\tan\frac{1}{4}E=\sqrt{\{\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)\}}$.

III. 三角法諸表

三角函數相互之關係

	$\sin\theta=x$	$\cos\theta=x$	$\tan\theta=x$	$\cot\theta=x$	$\sec\theta=x$	$\operatorname{cosec}\theta=x$
$\sin\theta=$	x	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cos\theta=$	$\sqrt{(1-x^2)}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$
$\tan\theta=$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\cot\theta=$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\sqrt{(x^2-1)}$
$\sec\theta=$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\operatorname{cosec}\theta=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x

逆三角函數相互之關係

	$\sin^{-1}$	$\cos^{-1}$	$\tan^{-1}$	$\cot^{-1}$	$\sec^{-1}$	$\operatorname{cosec}^{-1}$
$\sin^{-1}x=$	x	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$
$\cos^{-1}x=$	$\sqrt{(1-x^2)}$	x	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$
$\tan^{-1}x=$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$
$\cot^{-1}x=$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$
$\sec^{-1}x=$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\operatorname{cosec}^{-1}x=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x

雙曲線函數相互之關係

	$\sin hu=x$	$\cos hu=x$	$\tan hu=x$	$\cot hu=x$	$\sec hu=x$	$\operatorname{cosec} hu=x$
$\sin hu=$	x	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cos hu=$	$\sqrt{(1+x^2)}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$
$\tan hu=$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$
$\cot hu=$	$\frac{\sqrt{(x^2+1)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\sqrt{(1+x^2)}$
$\sec hu=$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$
$\operatorname{cosec} hu=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	x

三角函數之符號及變化

象限 / 函數	第一		第二		第三		第四	
正弦	正	由 0 至 1	正	由 1 至 0	負	由 0 至 -1	負	由 -1 至 0
餘割		由 ∞ 至 1		由 1 至 ∞		由 -∞ 至 -1		由 -1 至 -∞
餘弦	正	由 1 至 0	負	由 0 至 -1	負	由 -1 至 0	正	由 0 至 1
正割		由 1 至 ∞		負 -∞ 至 -1		由 -1 至 -∞		由 ∞ 至 1
正切	正	由 0 至 ∞	負	由 -∞ 至 0	正	由 0 至 ∞	負	由 -∞ 至 0
餘切		由 ∞ 至 0		由 0 至 -∞		由 ∞ 至 0		由 0 至 -∞

三角函數大小

度 / 函數	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	度 / 函數
sin.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	正弦
cos.	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	餘弦
tan.	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	正切
cot.	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	餘切
sec.	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	正割
cosec.	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	餘割

特别角之三角函数

	sin	cos	tan	cot	
$\frac{1}{12}\pi=15^\circ$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}\pi=75^\circ$
$\frac{1}{10}\pi=18^\circ$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{2}{5}\pi=72^\circ$
$\frac{1}{5}\pi=36^\circ$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{3}{10}\pi=54^\circ$
	cos	sin	cot	tan	

特别角之正弦

$\sin\left(3^\circ=\frac{1}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}$
$\sin\left(6^\circ=\frac{1}{30}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1)$
$\sin\left(9^\circ=\frac{1}{20}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}})$
$\sin\left(12^\circ=\frac{1}{15}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3})$
$\sin\left(15^\circ=\frac{1}{12}\pi\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$\sin\left(18^\circ=\frac{1}{10}\pi\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$
$\sin\left(21^\circ=\frac{7}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\}$
$\sin\left(24^\circ=\frac{2}{15}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}})$
$\sin\left(27^\circ=\frac{3}{20}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{10}+\sqrt{2})$
$\sin\left(30^\circ=\frac{1}{6}\pi\right)$	$\frac{1}{2}$
$\sin\left(33^\circ=\frac{11}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}$

$\sin\left(36^\circ=\frac{1}{5}\pi\right)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
$\sin\left(39^\circ=\frac{13}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\}$
$\sin\left(42^\circ=\frac{7}{30}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1)$
$\sin\left(45^\circ=\frac{1}{4}\pi\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\sin\left(48^\circ=\frac{4}{15}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3})$
$\sin\left(51^\circ=\frac{17}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\}$
$\sin\left(54^\circ=\frac{3}{10}\pi\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
$\sin\left(57^\circ=\frac{19}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\}$
$\sin\left(60^\circ=\frac{1}{3}\pi\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\sin\left(63^\circ=\frac{7}{20}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2})$
$\sin\left(66^\circ=\frac{11}{30}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1)$
$\sin\left(69^\circ=\frac{23}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\}$
$\sin\left(72^\circ=\frac{2}{5}\pi\right)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$\sin\left(75^\circ=\frac{5}{12}\pi\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
$\sin\left(78^\circ=\frac{13}{30}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1)$
$\sin\left(81^\circ=\frac{9}{20}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}})$
$\sin\left(84^\circ=\frac{14}{30}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}})$
$\sin\left(87^\circ=\frac{29}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\}$