

受弯同性板有限元法计算

铁道部第三勘测设计院叶蜚章、丁荃荪编

人 民 铁 道 出 版 社

1979年·北京

内 容 提 要

本书介绍矩形、平行四边形、梯形等各向同性板的有限元法计算方法,板的支承边简支或固接。可用于斜交板梁桥的平行四边形板梁或斜交盖板箱涵的梯形盖板计算的内力分析等。附有 FORTRAN 源程序,可供结构设计人员参考。

受弯同性板有限元法计算

铁道部第三勘测设计院叶蜚章、丁荃荪编

人民铁道出版社出版

责任编辑 王能远

封面设计 吴文渊

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民铁道出版社印刷厂印

开本: 787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张: 5 字数: 120 千

1979年2月第1版 1979年2月第1次印刷

印数: 0001—14,500 册

统一书号: 15043·6158 定价: 0.51 元

前 言

本文介绍矩形、平行四边形、梯形等各向同性板的有限元法计算方法，板的支承边为简支或固接。可用于斜交板梁桥的平行四边形板梁或斜交盖板箱涵的梯形盖板计算的内力分析等。

有限元法板的弯曲计算，国内外做得很多，方法也很多。本文介绍三角形单元，每个单元有 9 个位移自由度。第一章列出了计算公式，并分别列出直角坐标计算公式和面积坐标计算公式，读者在进行计算时可选择采用二种公式中的一种。根据我们的实践经验，采用面积坐标计算公式较好。第二章为算例的程序设计，我们以两边简支、两边自由、承受均布荷载的梯形挠曲板作为算例，按二种公式分别编制了 FORTRAN 源程序。为了核对程序的正确性，曾用我们的程序计算了铁道部第四设计院所编“钢筋混凝土铁路斜板梁设计情况介绍”一文中一块平行四边形板的挠度，计算结果与文中几乎全等（计算结果见第二章第四节）。在结束语中提出了需要继续研究和改进的意见。

在计算过程中，上海交大 130 教研组、建筑科学研究院结构所提供给我们不少宝贵资料。华东水利学院的徐芝纶教授、建筑科学研究院的罗恩同志，北京工业大学的赵超燮同志在计算理论上给予了热情的指导。对以上单位和同志我们表示感谢。

目 录

第一章 计算公式	1
第一节 板受弯曲的基本公式	1
第二节 面积坐标计算公式	4
一、面积坐标及其与直角坐标的关系	4
二、受弯曲板有限元法计算说明	8
(一) 用位移法计算	8
(二) 位移函数	11
(三) 荷载向结点移置	13
(四) 单元刚度矩阵	15
(五) 板的总刚度矩阵	19
(六) 荷载列阵和总刚求逆	20
(七) 板中弯矩和支点反力计算	21
第三节 直角坐标计算公式	23
第二章 程序设计	29
第一节 程序使用说明	29
一、程序适用范围	29
二、输入数据	29
三、输出数据	29
四、程序中主要符号的说明	30
五、子程序说明	31
六、单元刚度矩阵送入总刚度矩阵程序说明	31
七、其他说明	33
第二节 框图	35
第三节 源程序	35
第四节 斜交 45° 盖板算例 (两对边简支, 两对边自由)	63
结束语	74
参考资料	75

第一章 计算公式

第一节 板受弯曲的基本公式

图 1—1 所示板的中面 $ABCD$ 位于 x, y 平面内, 板支承在某些周边或支承点上, 承受荷载后板内产生应变和应力。令:

u, v, w = 板中任意点在 x, y, z 轴方向的位移;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ = 板中任意点在 x, y, z 轴方向的应变;

γ_{xy} = 板中任意点在平行于中间的平面内的剪应变;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$ 为相应的应力和剪应力;

μ = 板材料的波桑比;

E = 板材料的弹性模量。

分析薄板弯曲问题时的假定是:

一、薄板的法线没有伸缩。这就是说, 中面每一法线上的所有各点具有相同的位移 w , 也就等于弹性曲面的所谓挠度。因此 $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, 从而得到 $w = w(x, y)$, 即板的挠度是 x, y 坐标的函数。

二、薄板的法线, 在薄板弯扭以后, 保持为薄板弹性曲面的法线, 这样薄板的法线 (z 方向的线段) 与 x 方向或者 y 方向的线段都保持互相垂直, 没有剪应变, 也就是 $\gamma_{yz} = 0$, $\gamma_{xz} = 0$ 。

从弹性力学可知:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{故} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{故} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

上二式对 z 积分, 其中 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 都不随 z 而变, 得:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_1(x, y), \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_2(x, y).$$

其中 f_1, f_2 是任意函数。

三、薄板中面内的各点, 没有平行于中面的位移。

$$(u)_{z=0} = 0, (v)_{z=0} = 0 \quad \therefore f_1 = 0, f_2 = 0.$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x}.$$

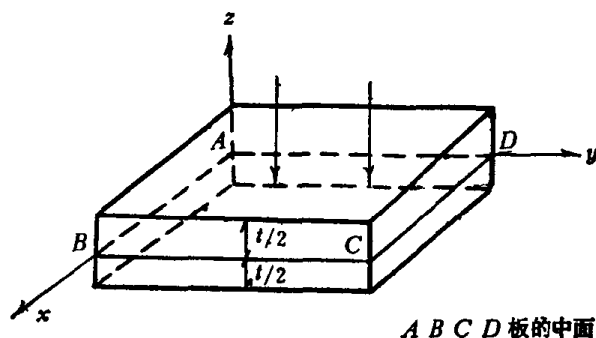


图 1—1

由以上各式求出薄板内各点的不等于零的三个应变分量，以 w 表示如下：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

令：

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1-1)$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (1-2)$$

$$\{\varepsilon\} = z \{x\}. \quad (1-3)$$

本文中 $\{ \}$ 代表列矩阵。

四、挤压应力 σ_z 引起的形变可以不计，于是薄板内各点的形变可用应力分量表示为：

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E},$$

$$\varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}.$$

从上式求得用挠度 w 表示的应力分量为：

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = -\frac{E}{1-\mu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\mu \varepsilon_x + \varepsilon_y) = -\frac{E}{1-\mu^2} z \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = -\frac{E}{1+\mu} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

图 1-2 表示从薄板割取的一个微小六面体，它在 x 和 y 方向的宽度都是一个单位。图中 τ_{xy} 的第一个下标 “ x ” 表示该剪应力作用在垂直于 x 轴的面上，第二个下标 “ y ” 表示该剪应力作用的方向沿 y 轴方向。下面说明应力与内力的关系。

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_x dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z^2 dz \\ &= -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

$$M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_y dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z^2 dz$$

$$= -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \tau_{xy} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z^2 dz$$

$$= -\frac{Et^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

M_x, M_y, M_{xy} 为单位宽度之弯矩和扭矩。

由弹性力学可知 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$,

$$M_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yx} z dz$$

$$= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz = M_{xy}.$$

令:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1-4)$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1-5)$$

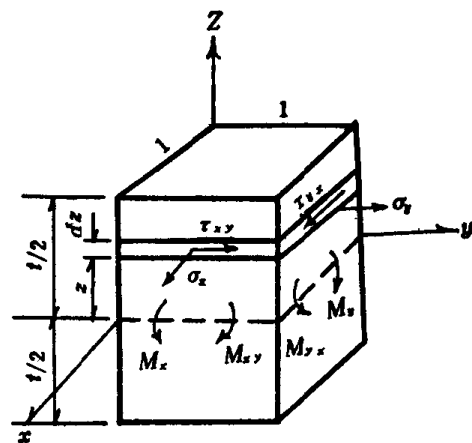


图 1-2

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}, \quad (1-6)$$

$$\{M\} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

$$= [D] \{x\}. \quad (1-7)$$

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{t^3} z, \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{t^3} z, \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{t^3} z.$$

故

$$\{\sigma\} = \frac{12}{t^3} z \{M\}.$$

类似平面应力问题从 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 求主应力 $\sigma_{max}, \sigma_{min}$ 与 α 角, 从 M_x, M_y, M_{xy} 可求得 M_{max}, M_{min} 和 α 角。其公式为:

$$\left. \begin{aligned} M_{max} &= \frac{M_x + M_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + (M_{xy})^2} \\ M_{min} &= \frac{M_x + M_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + (M_{xy})^2} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y} \quad (\text{弧度}) \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

图 1-3 表示截取板的一个微小体, 平面形状为直角三角形, 它的二条直角边平行于 x 轴和 y 轴, 在二个直角面上作用应力 σ_x 和 σ_y 。 σ_x 产生 M_x , σ_y 产生 M_y , M_{xy} 为直角面上剪力 τ_{xy} 产生之扭矩, 在斜面上产生 σ_n 和 τ_n , 当 α 如(1-8)式的值时 σ_n 为 σ_{max} 或 σ_{min} , $\tau_n = 0$ 。 σ_{max} 产生 M_{max} , σ_{min} 产生 M_{min} 。

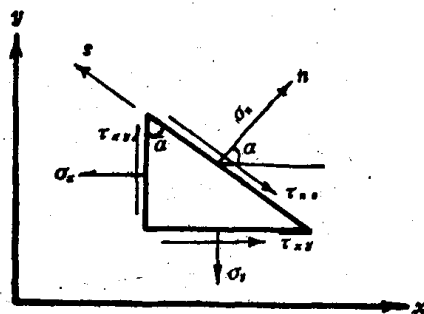


图 1-3

第二节 面积坐标计算公式

一、面积坐标及其与直角坐标的关系

图 1-4 所示三角形 1-2-3 内任意一点 P 与三个顶点连线, 对应于顶点 1, 2, 3 分别有三个小三角形, 其面积为 A_1, A_2, A_3 。

令 A 为三角形 1 2 3 面积, 则

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A},$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A}.$$

L_1, L_2, L_3 称为面积坐标。

由于 $A_1 + A_2 + A_3 = A$ 故 $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ 。

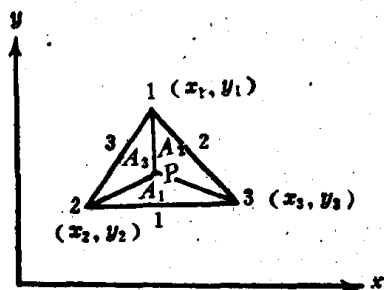


图 1-4

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= 1 - L_2 - L_3 \\ L_2 &= 1 - L_1 - L_3 \\ L_3 &= 1 - L_1 - L_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

在三角形 1-2-3 内任意一点 P , 如果已知该点的直角坐标值 x 和 y , 可以定出该点位置。如果不用直角坐标而用面积坐标, 已知该点面积坐标的值, 也可以定出该点的位置。因此三角形内任意一点位置可以用面积坐标来表示。

例如:

$$\left. \begin{aligned} \text{顶点 1} \quad L_1 &= 1, \quad L_2 = L_3 = 0, \\ \text{顶点 2} \quad L_2 &= 1, \quad L_3 = L_1 = 0, \\ \text{顶点 3} \quad L_3 &= 1, \quad L_1 = L_2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{在边 1 上任意点 } L_1 = 0, \\ \text{在边 2 上任意点 } L_2 = 0, \\ \text{在边 3 上任意点 } L_3 = 0, \end{array} \right\} \quad (1-11)$$

$$\text{三角形重心处} \quad L_1 = L_2 = L_3 = \frac{1}{3}. \quad (1-12)$$

直角坐标与面积坐标关系如下:

$$\begin{aligned} x &= x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3, \\ y &= y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3. \end{aligned}$$

上式满足 (1-10) 至 (1-12) 诸式。上式以矩阵表示如下:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad (1-13)$$

三角形顶点可以用 i, j, k 代替 $1, 2, 3$ 。此时 L_1, L_2, L_3 为 L_i, L_j, L_k 。在本文三角形单元有限元法计算中我们规定三角形顶点编号以反时针方向顺序为准。(1-13) 式求逆得下式:

$$\begin{pmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & c_i & a_i \\ b_j & c_j & a_j \\ b_k & c_k & a_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1-14)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} b_i &= y_j - y_k & c_i &= -x_j + x_k \\ b_j &= y_k - y_i & c_j &= -x_k + x_i \\ b_k &= y_i - y_j & c_k &= -x_i + x_j \\ a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

$$\Delta = \text{三角形面积} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{b_i c_j - b_j c_i}{2} \quad (1-16)$$

(1-14) 至 (1-16) 式是三角形顶点用 i, j, k 代替 $1, 2, 3$ 。

自变量 x, y 与自变量 L_1, L_2, L_3 对函数 w 的偏微分的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial x} \\ &= \frac{b_1}{2\Delta} \frac{\partial w}{\partial L_1} + \frac{b_2}{2\Delta} \frac{\partial w}{\partial L_2} + \frac{b_3}{2\Delta} \frac{\partial w}{\partial L_3} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial y} \\ &= \frac{c_1}{2\Delta} \frac{\partial w}{\partial L_1} + \frac{c_2}{2\Delta} \frac{\partial w}{\partial L_2} + \frac{c_3}{2\Delta} \frac{\partial w}{\partial L_3} \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} \\
 &+ \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial x} = \frac{1}{4\Delta^2} \left(b_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial L_1^2} + b_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial L_2^2} \right. \\
 &+ b_3^2 \frac{\partial^2 w}{\partial L_3^2} + 2b_1 b_2 \frac{\partial^2 w}{\partial L_1 \partial L_2} + 2b_2 b_3 \frac{\partial^2 w}{\partial L_2 \partial L_3} \\
 &\left. + 2b_3 b_1 \frac{\partial^2 w}{\partial L_3 \partial L_1} \right) \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{1}{4\Delta^2} \left(c_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial L_1^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial L_2^2} + c_3^2 \frac{\partial^2 w}{\partial L_3^2} \right. \\
 &\left. + 2c_1 c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial L_1 \partial L_2} + 2c_2 c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial L_2 \partial L_3} + 2c_3 c_1 \frac{\partial^2 w}{\partial L_3 \partial L_1} \right) \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4\Delta^2} \left[b_1 c_1 \frac{\partial^2 w}{\partial L_1^2} + b_2 c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial L_2^2} + b_3 c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial L_3^2} \right. \\
 &+ (b_1 c_2 + b_2 c_1) \frac{\partial^2 w}{\partial L_1 \partial L_2} + (b_2 c_3 + b_3 c_2) \frac{\partial^2 w}{\partial L_2 \partial L_3} \\
 &\left. + (b_1 c_3 + b_3 c_1) \frac{\partial^2 w}{\partial L_3 \partial L_1} \right]
 \end{aligned} \tag{1-18}$$

式 (1-18) 用矩阵形式表示如下:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} &= -\frac{1}{4\Delta^2} \\
 &\begin{bmatrix} b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & 2b_1 b_2 & 2b_2 b_3 & 2b_3 b_1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & 2c_1 c_2 & 2c_2 c_3 & 2c_3 c_1 \\ 2b_1 c_1 & 2b_2 c_2 & 2b_3 c_3 & 2(b_1 c_2 + b_2 c_1) & 2(b_2 c_3 + b_3 c_2) & 2(b_1 c_3 + b_3 c_1) \end{bmatrix} \\
 &\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial L_1^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial L_2^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial L_3^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial L_1 \partial L_2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial L_2 \partial L_3} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial L_3 \partial L_1} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1-19}$$

下面推导本文要用到的一个面积坐标积分式，式中 A 为三角形面积， m, n, p 为正整数。

$$I = \int_A L_1^m L_2^n L_3^p dA \quad (1-20)$$

要推导 (1-20) 式，先推导以面积坐标表示的微面积 dA ，也就是推导图 1-6 中平行四边形 $2'3'4'5'$ 微面积 dA 。

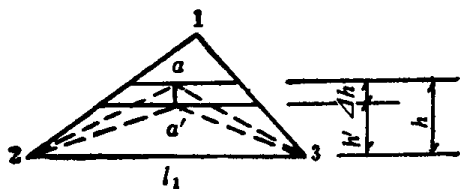


图 1-5

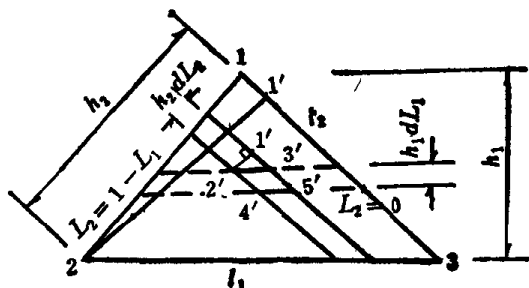


图 1-6

从图 1-5 可见：

$$\Delta 2a3 = AL_1 = \frac{1}{2} h l_1$$

$$\Delta 2a'3 = AL'_1 = \frac{1}{2} h' l_1 \quad (aa' \perp 23)$$

$$A(L_1 - L'_1) = \frac{1}{2} (h - h') l_1$$

$$A \Delta L_1 = \frac{1}{2} \Delta h l_1$$

$$\Delta h = \frac{2A}{l_1} dL_1 = \frac{2 \times \frac{1}{2} \times h_1 \times l_1}{l_1} dL_1 = h_1 dL_1$$

图 1-6 平行四边形 $2'3'4'5'$ 由分别平行于 l_1 和 l_2 的四条线组成，它的高度如上面推导的 Δh 式分别为 $h_1 dL_1$ 和 $h_2 dL_2$ 。

图 1-6 中直角三角形 $21'3$ 与直角三角形 $2'1'3'$ 相似，故：

$$\frac{\overline{2'3'}}{\overline{2'1'}} = \frac{l_1}{h_2} \quad \text{即} \quad \overline{2'3'} = h_2 dL_2 \times \frac{l_1}{h_2} = l_1 dL_2$$

$$\text{平行四边形 } 2'3'4'5' \text{ 面积} \quad dA = (h_1 dL_1)(l_1 dL_2) = 2AdL_1 dL_2 \quad (1-21)$$

从一般积分公式 $\int u dv = uv - \int v du$ 可推得：

$$\begin{aligned} \int_0^a x^n (a-x)^p dx &= - \int_0^a x^n (a-x)^p d(a-x) \quad (p, n \text{ 为正整数}) \\ &= - \left[\frac{x^n (a-x)^{p+1}}{p+1} \right]_0^a + \frac{n}{p+1} \int_0^a x^{n-1} (a-x)^{p+1} dx \\ &= \frac{n}{p+1} \int_0^a x^{n-1} (a-x)^{p+1} dx \\ &= \frac{n(n-1)}{(p+1)(p+2)} \int_0^a x^{n-2} (a-x)^{p+2} dx \quad (\text{依此类推}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} \int_0^a x^{n-3} (a-x)^{p+3} dx \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \frac{n! p!}{(p+n)!} \int_0^a (a-x)^{p+n} dx \\
 &= \frac{n! p!}{(p+n)!} \left[-\frac{1}{p+n+1} (a-x)^{p+n+1} \right]_0^a \\
 &= \frac{n! p!}{(p+n+1)!} a^{p+n+1}
 \end{aligned}$$

同理得:

$$\int_0^{1-L_1} L_2^n L_3^p dL_2 = \int_0^{1-L_1} L_2^n (1-L_2-L_3)^p dL_2 = \frac{n! p!}{(n+p+1)!} (1-L_1)^{n+p+1}$$

故

$$\begin{aligned}
 I &= \int_A L_1^m L_2^n L_3^p dA = \int_A L_1^m L_2^n L_3^p (2AdL_1 dL_2) \\
 &= 2A \int_0^1 \left(\int_0^{1-L_1} L_2^n L_3^p dL_2 \right) L_1^m dL_1 \\
 &= 2A \frac{n! p!}{(n+p+1)!} \int_0^1 L_1^m (1-L_1)^{n+p+1} dL_1 \\
 &= 2A \frac{n! p!}{(n+p+1)!} \frac{m! (n+p+1)!}{(m+n+p+2)!} \\
 &= 2A \frac{m! n! p!}{(m+n+p+2)!} \tag{1-22}
 \end{aligned}$$

常用的 $\int_A L_1^m L_2^n L_3^p dA$ 值

表 1-1

一阶	$\int_A L_1 dA = \frac{A}{3}$	四阶	$\int_A L_1^4 dA = \frac{A}{15}$	六阶	$\int_A L_1^4 L_2^2 dA = \frac{A}{420}$
二阶	$\int_A L_1^2 dA = \frac{A}{6}$		$\int_A L_1^3 L_2 dA = \frac{A}{60}$		$\int_A L_1^3 L_2 L_3 dA = \frac{A}{840}$
	$\int_A L_1 L_2 dA = \frac{A}{12}$		$\int_A L_1^2 L_2^2 dA = \frac{A}{90}$		$\int_A L_1^2 L_2^2 dA = \frac{A}{560}$
三阶	$\int_A L_1^3 dA = \frac{A}{10}$		$\int_A L_1^2 L_2 L_3 dA = \frac{A}{180}$		$\int_A L_1^2 L_2^2 L_3 dA = \frac{A}{1680}$
	$\int_A L_1^2 L_2 dA = \frac{A}{30}$				$\int_A L_1^2 L_2^2 L_3 dA = \frac{A}{2520}$
	$\int_A L_1 L_2 L_3 dA = \frac{A}{60}$				

二、受弯曲板有限元法计算说明

(一) 用位移法计算 在超静定结构计算中位移法是其中一种途径。本文即采用此法，即以结构位移为未知数，假定各结点在不同方向的位移和转角等位移值，乘以相应的刚度得到以假定位移为函数的结点内力，按结点内力与相应方向的结点外力平衡得到平衡方程。解平衡方程组求得位移后即可求得内力。受弯曲板的有限元法计算是把板划分有限个单元，简称元，元可以是方形的、矩形的、三角形的各种平面形状，在斜板的计算中以采用三角形元比较适应斜板的平面形状，本文即采用了三角形元。

每个单元的位移值可视解题需要的精确度、电子计算机的容量、算题时间长短等等因素综合比较后确定。本文选择单元每个顶点的 z 轴方向位移和绕 x 轴和 y 轴的转角为未知数值，见图1—7。这样单元每个结点有三个位移值，每个单元共有9个位移值。每个单元位移数称为单元位移自由度，简称自由度，本文采用的是9个自由度的三角形元。

令 w = 结点沿 z 轴方向之位移，

θ_x = 结点绕 x 轴转角，

θ_y = 结点绕 y 轴转角。

一般 w 是沿 z 轴为正， θ_x 和 θ_y 以右手螺旋定则标出的矢量沿坐标轴正向的为正。本文附图中以双箭头表示该矢量。 θ_x 、 θ_y 与 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 的关系随采用的结构坐标系不同而异。图1—7中表示了本文采用的二种坐标系的上述关系。

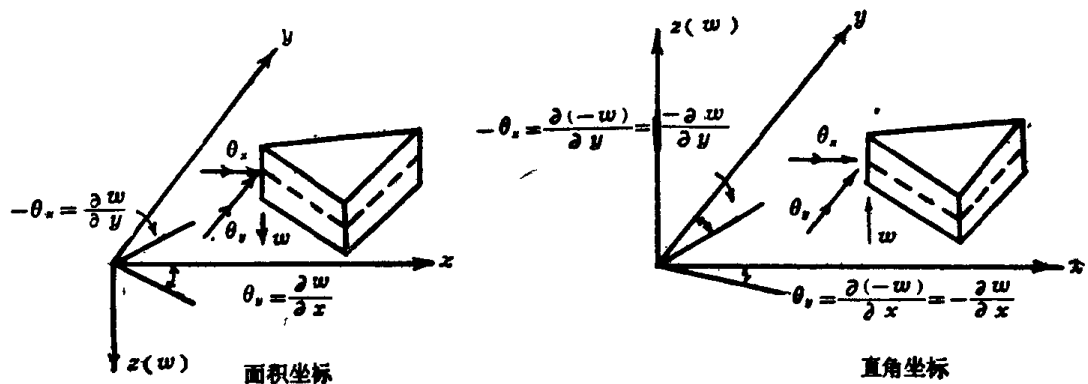


图 1—7

面 积 坐 标

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} \text{ 或 } \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_x$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \text{ 或 } \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_y$$

直 角 坐 标

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \text{ 或 } \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_x$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \text{ 或 } \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_y$$

计算中采用的结点位移：

结点 i 位移

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{yi} \\ -\theta_{xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \end{Bmatrix}$$

或

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \phi_i \\ \psi_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \end{Bmatrix}$$

其中

$$\phi_i = \theta_{yi}$$

$$\psi_i = -\theta_{xi}$$

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix}$$

单元位移

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \phi_i \\ \psi_i \\ w_j \\ \phi_j \\ \psi_j \\ w_k \\ \phi_k \\ \psi_k \end{Bmatrix} \quad \left| \quad \{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ w_k \\ \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \end{Bmatrix} \right. \quad (1-23)$$

上标“e”表示是整个单元的位移

对整块板来说，若划分单元后共有 n 个结点，本文算例的程序中以 $\{WW\}$ 代表整块板的位移分量列阵，则：

面积坐标

$$\{WW\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \phi_n \\ \psi_n \end{Bmatrix}$$

直角坐标

$$\{WW\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_{xn} \\ \theta_{yn} \end{Bmatrix} \quad (1-24)$$

相应的结点力与位移对应，即沿 w 方向的结点力 W ，绕 x 轴和 y 轴的弯矩 M_x 和 M_y （或 M_{θ_x} 和 M_{θ_y} ）。需要指出 M_{θ_x} 和 M_{θ_y} 与前面（1—4）式 M_x 和 M_y 不同。后者是板平面尺寸每单位长度由于 σ_x 和 σ_y 产生之弯矩， M_x 是绕 y 轴之弯矩， M_y 是绕 x 轴弯矩，前者不是单位长度弯矩，是结点弯矩，而且 M_{θ_x} 和 M_x ， M_{θ_y} 和 M_y 矢量方向互相垂直。

面积坐标

结点力

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} W_i \\ M_{\theta_i} \\ M_{\psi_i} \end{Bmatrix}$$

单元结点力

直角坐标

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} W_i \\ M_{\theta_{xi}} \\ M_{\theta_{yi}} \end{Bmatrix} \quad (1-25)$$

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_i \\ M_{\phi i} \\ M_{\psi i} \\ W_j \\ M_{\phi j} \\ M_{\psi j} \\ W_k \\ M_{\phi k} \\ M_{\psi k} \end{Bmatrix} \quad \{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_i \\ M_{\theta x i} \\ M_{\theta y i} \\ W_j \\ M_{\theta x j} \\ M_{\theta y j} \\ W_k \\ M_{\theta x k} \\ M_{\theta y k} \end{Bmatrix} \quad (1-26)$$

(二) 位移函数 从板的计算公式来看, 受弯曲板任意一点的转角、曲率或弯矩、剪力是 Z 轴方向位移 w 对坐标 x 或 y 的一阶、二阶、三阶偏微分。在板内任意一点的 w 值是该点坐标的函数。在面积坐标情况下 $w = f(L_i, L_j, L_k)$, 在直角坐标情况下 $w = f(x, y)$ 。这个 w 函数就称为位移函数。

位移函数必须具有以下几个性质:

1. 位移函数必须满足在单元结点处的位移值。位移函数中的待定系数就是从这个条件中求得的。因此待定系数个数必须等于单元位移自由度数。待定系数是结点位移的函数, 最后得位移函数是坐标与结点位移的函数。例如:

$$w = f(w, \theta_x, \theta_y) = a_1 w_i + a_2 w_j + a_3 w_k + a_4 \theta_{xi} + a_5 \theta_{xj} + a_6 \theta_{xk} + a_7 \theta_{yi} + a_8 \theta_{yj} + a_9 \theta_{yk} \quad (1-27)$$

$$\text{或 } w = f(L_i, L_j, L_k) = a_1 + a_2 L_i + a_3 L_j + a_4 L_i L_j + a_5 L_j L_k + a_6 L_k L_i + a_7 (L_i L_j^2 - L_j L_i^2) + a_8 (L_j L_k^2 - L_k L_j^2) + a_9 (L_k L_i^2 - L_i L_k^2) \quad (1-28)$$

$$\text{或 } w = f(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 \quad (1-29)$$

2. 位移函数要能够表示板的刚体位移或转动。例如 (1-29) 式中 a_1 代表板沿 Z 轴的刚体位移, a_2 或 a_3 代表板绕 y 轴或 x 轴的刚体转动角。位移函数要能够表示板的刚体位移或转动就必须包含常数项和 x, y (或 L_i, L_j) 的一次项。

3. 位移函数适用于板的任意单元, 因此在中间内任意转动或移动单元位置, 位移函数不变。

4. (1-28) 中待定系数 $a_1, a_2, \dots, a_9$ 是结点位移 $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \dots, w_k, \theta_{xk}, \theta_{yk}$ 的函数, 已知后者可求出前者, 反过来若已知前者亦可求出后者, 因此联系结点位移和待定系数的矩阵必须是非奇异的, 否则不能互求。

5. 相邻单元间公共边上的位移和转角必须连续, 这在弹性力学中称为位移相容条件。如果选择的位移函数能满足位移相容条件, 则有限元法计算结果将具有更接近于准确值的收敛性质。

本文选择位移函数方法如下:

1. 直角坐标中 x, y 的幂次与待定系数的个数见如下关系:

0 次幂	a_1
1 次幂	$a_2x \quad a_3y$
2 次幂	$a_4x^2 \quad a_5xy \quad a_6y^2$
3 次幂	$a_7x^3 \quad a_8x^2y \quad a_9xy^2 \quad a_{10}y^3$
4 次幂	$a_{11}x^4 \quad a_{12}x^3y \quad a_{13}x^2y^2 \quad a_{14}xy^3 \quad a_{15}y^4$
5 次幂	$a_{16}x^5 \quad a_{17}x^4y \quad a_{18}x^3y^2 \quad a_{19}x^2y^3 \quad a_{20}xy^4 \quad a_{21}y^5$

如采用三次幂共有10个待定系数，而结点位移自由度只有9个。国外有些学者试图在三次幂中删去一项或将 x^2y 项与 xy^2 项合并，这样引起计算上的很大麻烦，在某些情况下求解 α_1 至 α_9 将成为不可能。如果用面积坐标的三次幂式（1—28）来表示位移函数，则待定系数和位移自由度都是9个，这个矛盾解决了。

$$w = a_1 + a_2L_i + a_3L_j + a_4L_iL_j + a_5L_iL_k + a_6L_jL_k + a_7(L_iL_j^2 - L_jL_i^2) + a_8(L_iL_k^2 - L_kL_i^2) + a_9(L_jL_k^2 - L_kL_j^2) \quad (1-28)$$

需要说明的是（1—28）式一次幂项为什么没有 L_k 呢？如果 w 一次幂项包括了 L_k 如下式所示：

$$\begin{aligned} w &= a'_1L_i + a'_2L_j + a'_3L_k = a'_1L_i + a'_2L_j + a'_3(1 - L_i - L_j) \\ &= a'_3 + (a'_1 - a'_3)L_i + (a'_2 - a'_3)L_j \end{aligned}$$

上式与（1—28）式形式一致。还有一个问题是三次幂中为什么没有 $L_iL_jL_k$ 项？ $L_iL_jL_k$ 项只适用于单元内部的点，它不影响结点位移，因为在结点处 L_i, L_j, L_k 三个中必有二个为0， $L_iL_jL_k = 0$ 。故 w 中不包含 $L_iL_jL_k$ 项。

2. （1—28）式中求 α_1 至 α_9 利用9个条件列出9个方程，解 α_1 至 α_9 。下面条件式中等号左面 W 为位移函数，等号右面 w 为结点位移。

条件一 $(W)_i = w_i \quad (L_i = 1, L_j = L_k = 0);$

条件二 $(W)_j = w_j \quad (L_j = 1, L_k = L_i = 0);$

条件三 $(W)_k = w_k \quad (L_k = 1, L_i = L_j = 0);$

条件四 $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_i = \phi_i \quad (L_i = 1, L_j = L_k = 0);$

条件五 $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_j = \phi_j \quad (L_j = 1, L_k = L_i = 0);$

条件六 $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_k = \phi_k \quad (L_k = 1, L_i = L_j = 0);$

条件七 $\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_i = \psi_i \quad (L_i = 1, L_j = L_k = 0);$

条件八 $\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_j = \psi_j \quad (L_j = 1, L_k = L_i = 0);$

条件九 $\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_k = \psi_k \quad (L_k = 1, L_i = L_j = 0)。$

从9个联立方程式可解出：

$$\alpha_1 = w_k,$$

$$\alpha_2 = w_i - w_k,$$

$$\alpha_3 = w_j - w_k,$$

.....。

把求出的 α 代入(1—28)，经过整理可得：

$$W = N_i w_i + N_j w_j + N_k w_k + N_{\phi_i} \phi_i + N_{\phi_j} \phi_j + N_{\phi_k} \phi_k + N_{\psi_i} \psi_i + N_{\psi_j} \psi_j + N_{\psi_k} \psi_k$$

$$= [N_i N_{\phi_i} N_{\psi_i} N_j N_{\phi_j} N_{\psi_j} N_k N_{\phi_k} N_{\psi_k}] \{\delta\}^e = [N] \{\delta\}^e \quad (1-30)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} N_i &= L_i + L_j L_i (L_i - L_j) + L_k L_i (L_i - L_k) \\ N_{\phi_i} &= -[L_i^2 (c_i L_k - c_k L_j) + \frac{c_j - c_k}{2} L_i L_j L_k] \\ N_{\psi_i} &= L_i^2 (b_i L_k - b_k L_j) + \frac{b_j - b_k}{2} L_i L_j L_k \end{aligned} \right\} \quad (1-31)$$

$i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$ 循环。

$\{\delta\}^e$ 按(1—23)面积坐标公式。如果 $\{\delta\}^e$ 按(1—23)直角坐标公式表示，只要改变条件四至九：

条件四~六 $-\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_i = \theta_{xi} \quad (i, j, k)$

条件七~九 $\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_i = \theta_{yi} \quad (i, j, k)$

最后可得：

$$W = [N_i N_{xi} N_{yi} N_j N_{xj} N_{yj} N_k N_{xk} N_{yk}] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ w_k \\ \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \end{Bmatrix} \quad (1-32)$$

$$= [N] \{\delta\}^e$$

其中

$$\left. \begin{aligned} N_i &= L_i + L_j L_i (L_i - L_j) + L_k L_i (L_i - L_k) \\ N_{xi} &= L_i^2 (b_i L_k - b_k L_j) + \frac{b_j - b_k}{2} L_i L_j L_k \\ N_{yi} &= L_i^2 (c_i L_k - c_k L_j) + \frac{c_j - c_k}{2} L_i L_j L_k \end{aligned} \right\} \quad (1-33)$$

(三) 荷载向结点移置 有限元位移法计算与超静定结构位移法一样把荷载移置到结点变成结点荷载。结点荷载与单元位移自由度相对应，如本文9个自由度的三角形单元结点荷载为：

面积坐标为：

$$\{R\}^e = [Z, T_{\phi_i}, T_{\psi_i}, Z, T_{\phi_j}, T_{\psi_j}, Z, T_{\phi_k}, T_{\psi_k}]^T \quad (1-34)$$

直角坐标为：

$$\{R\}^e = [Z, T_{xi}, T_{yi}, Z, T_{xj}, T_{yj}, Z, T_{xk}, T_{yk}]^T \quad (1-35)$$

其中 $\{R\}^e$ 是单元结点荷载列阵，

T_{ϕ_i} 是结点 i 与 ϕ_i 同一方向之弯矩，

T_{xi} 是结点 i 与 θ_{xi} 同一方向之弯矩，

依此类推，(图1—8)