



中学数理化读物

数学习题集

(几何 三角部分)

北 京 出 版 社

51.23055
667
C.2

中学数理化读物
数 学 习 题 集
(几何、三角部分)

《数学习题集》编写组

51.23055
667
C.2

人民教育出版社

中学数理化读物

数学习题集

(几何 三角部分)

《数学习题集》编写组

*

北京出版社出版

北京市新华书店发行

北京印刷二厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 5.5印张 110,000字

1979年7月第1版 1979年7月第1次印刷

印数1—50,000

书号: 7071·538 定价: 0.39元

编 辑 说 明

为了帮助广大知识青年和在校学生学习中学数理化基础知识，我们编辑了《中学数理化读物》。

这套读物包括供工农兵、青年和学生自学、复习的参考资料，以及习题集等不同种类的数学、物理、化学等方面的书籍。

在编写时，从实际出发，参照了中学教学大纲，力求比较系统地叙述数理化的基础知识。我们希望通过学习这套读物，有助于广大青年进一步学好自然科学基础理论，为向工业、农业、科学和国防现代化进军打下一定的基础。

由于我们水平有限，又缺乏编辑这类读物的经验，缺点和错误在所难免，恳切希望广大读者批评指正。

目 录

平面几何部分	1
一、直线形	1
二、圆	13
三、比例线段与相似形	25
立体几何部分	41
四、直线和平面	41
五、多面体和旋转体	49
平面三角部分	64
六、任意角的三角函数	64
七、三角函数图象及性质	85
八、三角恒等式	90
九、解三角形	114
十、反三角函数及三角方程	127
答案与提示	141
后 记	173

34522

平面几何部分

一、直线形

例 1 如图 1, 已知: $AB=AC$, $\angle 1=\angle 2$, E 是 AD 上一点. 求证: $\angle EBD=\angle ECD$.

证明 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\because AB=AC, \angle 1=\angle 2, \\ AD=AD,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD, \\ (\text{边, 角, 边})$$

$$\therefore DB=DC, \angle 3=\angle 4. \\ (\text{全等三角形对应边、对应角相等})$$

又在 $\triangle DBE$ 和 $\triangle DCE$ 中,

$$DB=DC, \angle 3=\angle 4, DE=DE,$$

$$\therefore \triangle DBE \cong \triangle DCE, (\text{边, 角, 边})$$

$$\therefore \angle EBD=\angle ECD. (\text{全等三角形对应角相等})$$

此题亦可从 $\triangle ABE \cong \triangle ACE$ 入手证明.

例 2 证明: 对角线相等的梯形是等腰梯形.

证明 如图 2, 过 A 、 D 分别作 BC 的垂线交 BC 于 E 、 F .

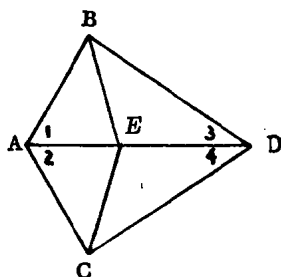


图 1

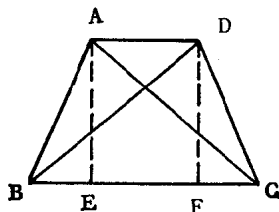


图 2

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle DFB$ 中,

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore AE = DF. (\text{平行线间的距离相等})$$

$$\text{又} \because AC = BD,$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle DFB, (\text{直角边, 斜边})$$

$$\therefore \angle ACE = \angle DBF.$$

又在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中,

$$\because AC = BD, \angle ACB = \angle DBC, BC = BC,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB, (\text{边, 角, 边})$$

$$\therefore AB = CD, \text{梯形 } ABCD \text{ 等腰}.$$

此题亦可自 D 作 $DM \parallel AC$ 交 BC 延长线于 M , 以证明 $\angle ACB = \angle DBC$, 然后证 $\triangle ACB \cong \triangle DBC$.

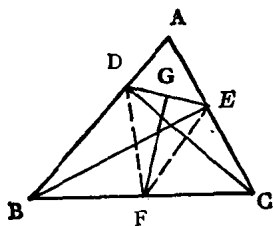


图 3

例 3 已知: $\triangle ABC$ 中,
 CD 、 BE 是 AB 、 AC 边上的高,
 F 是 BC 的中点, $FG \perp DE$ 于 G .
 求证: $DG = GE$. (图 3)

证明 连接 DF 、 EF ,

$$\because CD \perp AB, BE \perp AC,$$

$$\therefore \triangle DBC \text{ 和 } \triangle ECB \text{ 都}$$

是直角三角形.

又 F 是 BC 的中点,

$$\therefore DF = \frac{1}{2}BC, EF = \frac{1}{2}BC,$$

(直角三角形斜边上中线等于斜边的一半)

$$\therefore DF = EF, \triangle DFE \text{ 是等腰三角形}.$$

又 $FG \perp DE$ 于 G ,

$\therefore DG = GE$. (等腰三角形底边上的高线也是底边的中线)

例 4 证明：以任意四边形各边中点为顶点的四边形是平行四边形。

证明 如图 4, E, F, G, H 分别是四边形 $ABCD$ 中 AB, BC, CD, DA 的中点。

连接 AC , 在 $\triangle ABC$ 中,

$\because E, F$ 分别是 AB, BC 的中点,

$$\therefore EF \parallel AC \text{ 且 } EF = \frac{1}{2}AC.$$

(三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半)

同理, 在 $\triangle DAC$ 中,

$$HG \parallel AC \text{ 且 } HG = \frac{1}{2}AC.$$

$$\therefore HG \parallel EF,$$

$$\therefore EFGH \text{ 是平行四边形.}$$

(一组对边平行且相等的四边形是平行四边形)

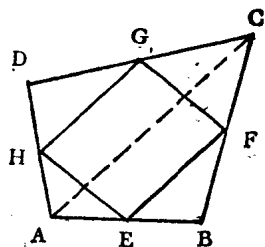


图 4

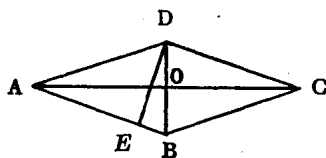


图 5

例 5 菱形两对角线的长等于 24 厘米和 70 厘米, 求菱形的面积与高. (图 5)

解 在菱形 $ABCD$ 中, 作 $DE \perp AB$ 于 E , DE 就是菱形的高; 设 S 为菱形的面积. 又设菱形对角线交于点 O . 则 $AC \perp BD, AO = OC, BO = OD$;

(菱形对角线互相垂直平分)

又 $AC=70$ (厘米), $BD=24$ (厘米),

$$\therefore AO=35, BO=12.$$

$$\therefore S=2AO \times OB=840(\text{厘米}^2).$$

$$\therefore AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=37,$$

而 $S=AB \times DE=37 DE=840,$

$$\therefore DE=22\frac{26}{37}(\text{厘米}).$$

答: 菱形面积是 840 厘米^2 , 高是 $22\frac{26}{37}$ 厘米.

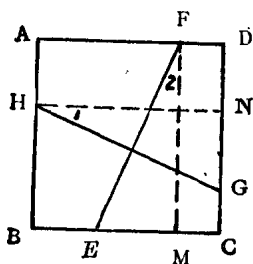


图 6

例 6 已知在正方形 $ABCD$ 中, 两互相垂直的直线 HG 、 EF 与正方形各边交于 H 、 G 、 E 、 F . 求证: $HG=EF$. (图 6)

证明 作 $FM \perp BC$ 于 M , $HN \perp CD$ 于 N .

$\therefore$ 在正方形 $ABCD$ 中,
 $AD \parallel BC, AB \parallel CD,$

而且 $AD \perp CD, DC \perp BC,$

$\therefore HN=AD, FM=DC.$ (平行线间距离相等)

$\therefore HG \perp EF, FM \perp HN, \therefore \angle 1 = \angle 2,$

(一锐角两边和另一锐角两边分别垂直, 则两角相等)

即 直角 $\triangle HNG \cong$ 直角 $\triangle FME,$

$\therefore HG=EF.$

此题亦可自 A 、 B 分别作 HG 、 FE 的平行线, 再根据三角形全等的条件证得所需结论.

例 7 在 $\triangle ABC$ 的两边 AB 、 BC 上各向外作正方形 $ABDE$ 与 $BCFG$. BH 是 AC 边上的中线. 求证: $DG = 2BH$. (图 7)

证明 延长 BH 至 M , 使 $HM = BH$, 连接 CM .

$$\because CH = HA,$$

$$BH = HM, \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \triangle BAH \cong \triangle MCH,$$

$$\therefore CM = AB,$$

$$\angle M = \angle ABH.$$

$$\therefore CM \parallel BA, \angle BCM$$

$$+ \angle ABC = 180^\circ.$$

而 $ABDE$ 和 $BCFG$ 都是正方形,

$$\therefore \angle DBG + \angle ABC = 180^\circ.$$

$$\text{又 } \angle BCM + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BCM = \angle DBG.$$

$$\therefore \triangle DBG \cong \triangle MCB,$$

$$\therefore DG = BM = 2BH.$$

例 8 如图 8, 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, E 、 F 分别为 BC 、 AD 的中点, BA 及 EF 的延长线交于 M , CD 及 EF 的延长线交于 N . 求证:

$$\angle AMF = \angle DNF.$$

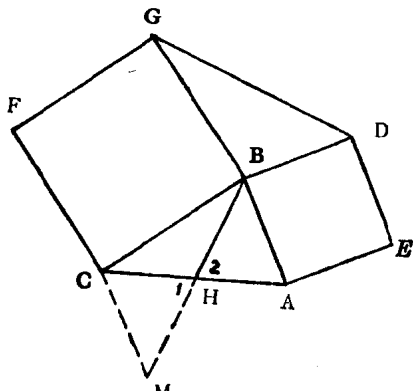


图 7

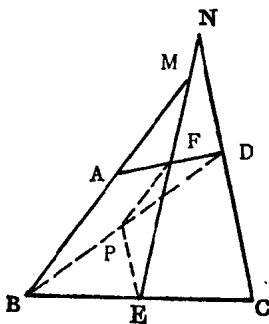


图 8

证明 连接 BD ，取 BD 中点 P ，连接 PF 、 PE 。

$\because E, F$ 分别是 BC, AD 的中点，

$\therefore PE \parallel CD$ 且 $PE = \frac{1}{2}CD$ ；

$PF \parallel AB$ 且 $PF = \frac{1}{2}AB$ 。

又 $\because AB = CD$ ，

$\therefore PE = PF$ ， $\angle PFE = \angle PEF$ 。

又 $\angle PFE = \angle AMF$ ， $\angle PEF = \angle DNF$ ，

$\therefore \angle AMF = \angle DNF$ 。

例 9 由矩形的顶点向对角线所作的垂线将对角线分为

1:3 的两部分；已知对角线的交点距大边为 2 米，求对角线的长及对角线与大边的夹角。

(图 9)

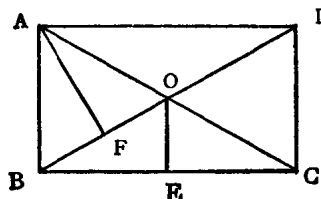


图 9

解 在矩形 $ABCD$ 中，
 $AF \perp BD$ 于 F ， $OE \perp BC$ 于

E 。

$\because BF:FD = 1:3$ ，

$\therefore BF:BD = 1:4$ ，即 $BF = \frac{1}{4}BD$ 。

又 $BO = \frac{1}{2}BD$ ，

$\therefore BF = \frac{1}{2}BO$ ，即 $BF = FO$ 。

而 $AF \perp BO$ 于 F ， $\therefore AO = AB$ 。

又 $AC=BD$,

$\therefore BO=AO=AB$, $\triangle AOB$ 是等边三角形, $\angle BAO=60^\circ$,

$\therefore \angle ACB=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

$\therefore O$ 是 AC 中点, $OE \parallel AB$,

$\therefore OE=\frac{1}{2}AB$, $AB=2OE$,

$\therefore AB=OA=OB=2 \times 2=4$ (米),

$\therefore BD=AC=2OA=8$ (米).

答: 矩形对角线长 8 米, 与大边的夹角为 30° .

例 10 在正方形 $ABCD$ 中, E 在 CD 上, 且 $AE=EC+BC$, M 是 CD 的中点. 求证:
 $\angle BAE=2\angle DAM$. (图 10)

证明 作 $\angle BAE$ 的平分线, 交 BC 于 N , 交 DC 延长线于 F .

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle BAF=\angle F$, 又 $\angle BAF=\angle FAE$,

$\therefore \angle F=\angle FAE$,

$\therefore AE=EF$.

而 $AE=BC+EC$,

$\therefore EF=BC+EC$, $BC=CF$.

$\therefore \triangle ABN \cong \triangle FCN$, $BN=NC$, N 是 BC 的中点.

又 M 是 CD 的中点, $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \triangle ABN \cong \triangle ADM$,

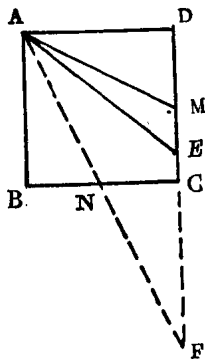


图 10

$$\begin{aligned}\therefore \angle BAN &= \angle DAM, \\ \angle BAE &= 2\angle BAN = 2\angle DAM.\end{aligned}$$

练 习 一

1. 证明：两条平行直线被第三条直线所截，内错角的平分线互相平行。
2. 证明：两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角的平分线互相垂直。
3. $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 、 $\angle C$ 的平分线交于 O 点， $\angle A = 58^\circ$ ，求 $\angle BOC$ 的度数。
4. 在锐角三角形 ABC 中， $BD \perp AC$ 于 D ， $CE \perp AB$ 于 E ， BD 、 CE 交于 F ， $\angle BFC = 129^\circ$ ，求 $\angle A$ 的度数。
5. 将多边形的各边顺次延长，在各顶点处得一外角，求证这些外角的和恒为 360° 。
6. (1) 已知一个正多边形的内角为 144° ，这个正多边形是几边形？
(2) 已知一个多边形的内角和等于外角和（每个顶点各取一个外角），求它的边数。
7. $\triangle ABC$ 是等边三角形， D 是 AC 的中点， E 是 BC 延长线上一点，且 $CE = CD$ ，求证： $\triangle BDE$ 是等腰三角形。
8. 等腰三角形的底边为 a ，顶角是底角的 4 倍，求这个三角形各角的度数和腰上的高。
9. 求证：

- (1) 等腰三角形两腰中点到底边的距离相等；
 (2) 等腰三角形底边中点到两腰的距离相等。
10. 在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 $\angle A$ 的平分线， $DE \parallel AC$ 交 AB 于 E ， $EF \parallel BC$ 交 AC 于 F 。求证： $AE=FC$ 。
11. 已知 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于 O ，直线 EF 过 O 点，交 AB 于 E ，交 CD 于 F 。求证： $OE=OF$ 。
12. 已知正方形 $ABCD$ ，延长 BC 到 E ，在 CD 上截取 $CF=CE$ ，延长 BF 交 DE 于 G 。求证： $BG \perp DE$ 。
13. 求证：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。
14. AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， E 、 F 分别是 AB 、 AC 的中点。求证： AD 和 EF 互相平分。
15. 求证：
 (1) 顺次连接矩形四边中点组成的四边形是菱形；
 (2) 顺次连接菱形四边中点组成的四边形是矩形。
16. 以 $\triangle ABC$ 的两边 AB 和 BC 作一边，各向三角形外作正方形 $ABFG$ 和 $CBDE$ 。求证： $AD=CF$ 。
17. 求证：任意四边形对边中点连线必互相平分。
18. 求证：等腰三角形的底边与一腰上的高所夹的角，等于顶角的一半。
19. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ 于 D ， $CF \perp AB$ 于 F ， AD 与 CF 交于 G ，且 $GC=AB$ 。求证： $\angle ACB=45^\circ$ 。
20. $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=10$ 厘米， $\angle B=15^\circ$ ，自 C 作 $CD \perp AB$ ，交 BA 的延长线于 D ，求 CD 与 BD 的长。

习 题 一

21. 求证：正五角星的内角等于 36° 。
22. $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 的中点， $AD=AC$ ；又知 E 是 AD 的中点。求证： $EC=\frac{1}{2}BC$ 。
23. 两个三角形中，两边及第三边上的中线对应相等，求证这两个三角形全等。
24. 在 $\square ABCD$ 中， E 、 F 分别是 AB 、 CD 的中点， DE 、 BF 与对角线 AC 交于 G 、 H 两点。求证： $AG=GH=HC$ 。
25. $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ；在 AB 上取 D 点，在 AC 的延长线上取 E 点，使 $CE=BD$ ， DE 交 BC 于 F 。求证 $DF=FE$ 。
26. 在 $\square ABCD$ 中， O 为对角线 AC 的中点。过 O 作直线交 AB 于 G ，交 CD 于 F ，交 AD 延长线于 E ，交 CB 延长线于 H 。求证： $EF=GH$ 。
27. 在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ， E 是 CD 的中点。求证： $AE=BE$ 。
28. 在直角三角形 ABC 中， $\angle A=90^\circ$ 。 $\angle B$ 的平分线交 AC 于 D ，自 A 作 $AE \perp BC$ 交 BD 于 E ，自 D 作 $DF \perp BC$ 于 F 。求证 $AEFD$ 是菱形。
29. 在直角三角形 ABC 中， $\angle A=90^\circ$ 。 $\angle C$ 的平分线交 AB 于 E ，交 BC 上的高 AD 于 O ，过 O 引 $OF \parallel BC$ 交 AB 于 F 。求证 $AE=BF$ 。

30. 求证：矩形各内角平分线围成一个正方形。
31. 求证：梯形 $ABCD$ 两对角线 AC 、 BD 中点的连线 FE 平行于底边 BC ，且等于两底之差的一半。
32. 在 $\square ABCD$ 中，平行于 AB 的直线交 BC 于 P ，交 AD 于 Q ， M 为 AP 和 BQ 的交点， N 为 DP 和 CQ 的交点。求证： $MN \parallel AD$ ，且 $MN = \frac{1}{2}AD$ 。
33. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 2\angle C$ ， AD 平分 $\angle A$ 交 BC 于 D ，求证： $AB + BD = AC$ 。
34. $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 2\angle C$ ， $AD \perp BC$ 于 D ， M 是 BC 的中点。求证： $DM = \frac{1}{2}AB$ 。
35. 三角形各边的比是 $3:4:6$ ，若连接各边中点，则得到周长为 5.2 米的三角形，求原三角形各边的长。
36. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 为 AB 上一点且 $AD = CD = BC$ ，求 $\angle A$ 的度数。
37. 直角三角形 ABC 中，三边长成等差数列，周长为 24 ，求 $\triangle ABC$ 的面积。
38. 等腰梯形的上底等于它的腰，而一条对角线垂直于一腰，试求梯形各内角。
39. $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ 。在 AC 上取一点 E ，使 $\angle ABE = 2\angle EBC$ ，过 A 作 $AD \parallel BC$ 交 BE 的延长线于 D 。求证： $ED = 2AB$ 。
40. 分别以 $\triangle ABC$ 的各边为一边，作等边三角形 ABD 、 ACE 、 BCF ，使其顶点都在 BC 的同侧。求证四边形

$AEFD$ 是平行四边形。

41. 在 $\triangle ABC$ 的两边 AB 和 AC 上, 向外各作正方形 $BAFE$ 和 $ACGH$, 作高 AD 的反向延长线交 FH 于 K . 求证:

$$FK=KH, AK=\frac{1}{2}BC.$$

42. 在 $\triangle ABC$ 的两边 AB 、 AC 上各向外作正方形 $ABDE$ 、 $ACFG$, H 、 K 、 L 分别是 EB 、 BC 、 CG 的中点. 求证: $\triangle HKL$ 是等腰直角三角形。

43. $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$; 从两个顶点 B 、 C , 分别作 $\angle A$ 的平分线的垂线 BE 、 CF , 垂足为 E 、 F ; D 为 BC

边的中点. 求证: $DE=DF=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

44. P 为 $\square ABCD$ 的对角线 AC 上任意一点, 过 P 作 AB 的平行线, 分别交 DA 、 BC 于 H 、 F ; 过 P 作 BC 的平行线, 分别交 AB 、 CD 于 E 、 G . 求证:

$$S_{\square DHPG}=S_{\square BFPE}.$$

45. 在 $\square ABCD$ 中, 作 $EF \parallel AC$, 交 AB 于 E , 交 BC 于 F . 连接 DE 、 DF , 求证: $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}$.

46. 求证: 等腰三角形底边延长线上任意一点到两腰的距离之差等于腰上的高。

47. 求证: 等边三角形内任意一点到三边距离之和等于此等边三角形的高。

48. 若四边形的两对角线互相垂直, 求证对边中点的连线彼此相等。

49. 已知在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 对角线 AC 、