动态系统的几何理论导引

[巴西] 丁·帕里斯
W·麦罗 著
姚勇 译
程极泰 校

上海交通大学出版社

动态系统的几何理论导引

〔巴西〕 J. 帕里斯 W. 麦 罗 著
姚 勇 译 程极泰 校

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书以结构稳定性和通有性为主线介绍了六十年代后发展起来的动态系统的几何理论。该理论现已成为非线性动力学的理论基础，并日渐在浑沌、分叉、突变以及协同学、耗散结构等研究中发挥效用，也有学者将它用于社会经济学等"软系统"。

全书共分四章。第一章扼要地陈述一些预备知识，同时引进微分流形、横截性与结构稳定性的概念；第二章讨论系统的局部稳定性；第三、四两章着重于若干典型动态系统的整体稳定性和通有性的分析，并在最后一节中就分叉理论等相关专题给予了精彩评述。每章之后还附有一定量的习题。

本书可作为大学数学专业的试用教材，也可供从事非线性动力学研究的其他学科的研究生、教师和工程师学习参考。

Jacob Palis, Jr. Welington de Melo

Geometric Theory of Dynamical Systems
An Introduction

动态系统的几何理论导引

[巴西] J. 帕里斯 W. 麦 罗 著
姚 勇 译 程极泰 校

*

上海交通大学出版社出版
上海淮海中路1984弄19号
新华书店上海发行所发行
常熟文化印刷厂排版印刷

*

开本：787×1092 毫米 1/16 印张：10.5 字数：255,000
1986年1月第一版 1986年5月第一次印刷
印数：1—4,000
统一书号：13324·33 科技书目：115—235
定价：2.00元

译 者 的 话

众所周知，数学作为数与形的科学，就其最终目的而言，是要认识和刻划变化着的物质形态和彼此间的数量关系。动态系统的几何理论便是研究系统在时空中的动力学行为的数学分支。它起源于本世纪 Poincaré 和 Birkhoff 等人研究微分方程的定性理论。近二、三十年来，由于 Smale、Morse 等众多学者的工作，动态系统的几何理论得到了迅速发展，并与拓扑学、近代微分几何学、整体分析、奇异理论、抽象代数、函数论等相互渗透成为一门新的数学理论。进入八十年代，动态系统的几何理论逐渐地在应用领域崭露头角，其范围触及非平衡统计物理学、非线性力学、生物化学以及控制系统、生态系统、社会经济系统等等。目前，该理论连同由此而建立的方法，已不容置疑地被认为是人们探究非线性动力学现象及其本质的重要工具。

过去的工作，不论在理论上，还是应用上，主要是围绕着结构稳定性和通有性这两个极为重要的概念。对于它们的研究大大地促进了动态系统几何理论的发展。

所谓结构稳定性指的是系统在承受了结构摄动以后，仍然保持其定性行为不变的一种属性。我们知道，任何一个实际运行着的系统无一例外地都要受环境的影响，同时因信息的不足以及认识的局限(例如，在相对论创立之前，建立运动方程依据的仅仅是牛顿的力学三大定律)，建立的模型不可避免地会偏离真实系统；换言之，系统承受了结构摄动。粗略地说，有两大类的稳定性问题。一八九二年，Liapunov 开创了运动稳定性的现代研究；而“粗系统”，即结构稳定性的概念则是由 Andronov 和 Pontryagin 于一九三七年首先提出的，不过真正取得实质性进展还是六十年代以后的事。结构稳定性问题之所以会引起学术界的广泛兴趣，就在于：假若模型是结构稳定的，且与原型的偏差适当地小，那么模型将能很好地再现原型的本质属性。研究表明：一个含参数系统，可能会在某些参数值下失去结构稳定而发生诸如分叉、突变等内在不连续现象，也可能由于一系列的结构稳定的失去而进入浑沌状态，亦即呈现内在的随机性。但是，另一方面，所讨论的系统可能又是含参数结构稳定的(即从整体上看，系统是结构稳定的)。正因为如此，上述非线性动力学现象才得以实验（包括物理实验和计算机仿真实验)的再现，这是由于从物理意义上来讲，结构稳定性反映了一种实验的可重复性。例如，一个大型生产过程会因为某些原因，从一个正常工作的状态突跳到另一个状态，尽管后者仍是稳定的，但经济效益很低是我们所不期望的；又例如，若认为哲学上的突变相应于结构稳定的失去，那么按照突变理论，事物由量变到质

变的过程可能会经历两种截然不同的途径——渐变或者突变。

其次，某空间上的一个通有的性质是指几乎空间中的所有成员都具有这个性质。同样，通有性亦有着很强的实用意义，此处不再赘述。

正是由于动态系统几何理论的鲜明的背景，理论与应用在此找到了结合点。人们还有望在动态系统几何理论的基础上统一现有的突变理论、分叉理论、协同学以及耗散结构理论。

《动态系统的几何理论导引》一书，是国际动力学权威J.帕里斯教授及其合作者W.麦罗博士所著。书中内容主要取材于J.帕里斯在巴西、美国等地讲授动态系统几何理论的讲义以及他的若干学术报告。另外，本书以结构稳定性和通有性为主线收集了到一九八一年底为止的该领域的主要成果（它们大多散见于期刊文献之中），而且一一给予了论证。全书持论通侃、叙述明简、图例精当，还附有一定数量的习题。针对较难的习题，作者给予了必要提示，因而是一本入门的好书。现译出本书，奉献给广大读者，希望它能有助于国内开展动态系统几何理论的研究与教学。

由于译者的水平所限，虽说已竭尽全力，错误仍在所难免，殷切地期望读者提出批评指正，更希望数学界的同行们不吝指教为感。

本书承蒙程极泰教授的认真校阅，在此谨致深切的谢忱。

译　者

一九八五年元月于上海交通大学

引　言

…cette étude qualitative(des équations différentielles) aura par elle-même un intérêt du premier ordre…

(……微分方程定性理论的研究应对她本身有极大的热忱……)

HENRI POINCARÉ, 1881.

本书是关于动态系统几何理论的入门书。我们将此书奉献给读者，目的是使读者了解有关结构稳定性和通有性——两个重要专题的基本概念。

自 Poincaré、Liapunov 和 Birkhoff 起，许多数学家研究过这一理论。近年来，其中一些课题已经建立而且已有了相当的发展。

从 Andronov 和 Pontryagin(1937)首先引进结构稳定性这一基本概念，到 Peixoto(1958～1962)发表论文证明曲面上稳定向量场的稠密性(两个重大事件)，其间经历了二十多年。而后，Smale 从本质上丰富了这一理论，确定了几何理论的一个主要目的是研究通有性和稳定性，并且提出了与此密切相关的一些问题，同时还得到了不少结论。同一时期，Hartman 和 Grobman 指出局部稳定性是一个通有的性质。过后不久，Kupka 同 Smale 成功地就周期轨道论述了这一问题。

本书试图通过众多例子，Hartman-Grobman 定理和 Smale 流形定理(第二章)、Kupka-Smale 定理(第三章)以及 Peixoto 定理(第四章)的一系列证明，给读者增添研究该理论的乐趣。我们所给出的若干证明比原来的证明更为简捷，而且可作重要推广。在本书的第四章中，我们讨论具有无穷多周期轨道的稳定微分同胚映射的几个基本例子，陈述动态系统结构稳定性的一般结果，并就诸如分叉理论等其他专题作一简短评述。在这章的附录里，我们介绍旋转数这一重要概念，并用它来刻划一个精美的例子——Cherry 流。

本书所需的预备知识只是微分方程基础教程中的内容，另外就是于第一章列出的微分流形的有关结果。理解第二章的内容需要有比线性代数、隐函数定理及 Banach 空间中的压缩映射定理稍多一些的知识。第三章是最为基本的，但并非最难，这里我们系统地运用了横截性定理。由于第四章(在二维曲面的特殊情况下)引用了 Kupka-Smale 定理，所以从形式上看，这章依赖于第三章的知识。

许多有关的结果和研究的线索，出自书中所证的定理。在本书的最后，对这些结果给予了简短(但仍是不完全)的叙述。我们希望，这本书能使读者对所述理论有一个初步的轮廓，并给有心研究的同行带来方便。

J.帕里斯、W.麦罗

1981 年 9 月于 *Rio de Janeiro*

符　号　表

$\mathbf{R}$	实线
$\mathbf{R}^n$	n 维 Euclid 空间
$\mathbf{C}^n$	n 维复空间
C^n	具有 n 次连续导数的可微映射类
C^∞	无穷次可微
C^ω	实解析的
$df(p)$, df_p 或 $Df(p)$	f 在 p 点的导数
$(\partial/\partial t)f$, $\partial f/\partial t$	偏导数
$D_2f(x, y)$	相对第二个变量的偏导数
$d^nf(p)$	f 在 p 点的 n 阶导数
$L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$	线性映射空间
$L^r(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^k)$	r 次线性映射空间
$\\| \\|$	范数
$g\circ f$	映射 g 和 f 的复合映射
ϕ	空集
$f\|M$	映射 f 在子集 M 上的限制映射
$\overline{U}$	集合 U 的闭包
TM_p	M 在 p 点的切空间
TM	M 的切丛
$\mathscr{X}^r(M)$	在 M 上 C^r 向量场的空间
f_*X	由 f（作用于 X）的值域导出的向量场
X_t	由 X 的流在时刻 t 导出的微分同胚映射
$\mathscr{O}(p)$	p 的轨道
$\omega(p)$	p 的 ω 极限集
$\alpha(p)$	p 的 α 极限集
S^n	n 维单位球面
T^2	二维环面
$\operatorname{grad} f$	f 的梯度场
$\int f$	f 的积分
id_M	M 上的恒等映射
$\langle\, ,\rangle$	Riemann 度量
$\langle\, ,\rangle_p$	p 的切空间中由 Riemann 度量定义的内积
$C^r(M, N)$	C^r 映射空间
$\\| \\|_r$	C^r 范数

$\mathrm{Diff}^r(M)$	C^r 微分同胚映射空间
$f \pitchfork S$	f 横截 S
$\mathcal{O}_X(p)$	X 过 p 的轨道
$\mathcal{O}_+(p)$	p 的正轨道
$\alpha'(t)$	区间映射在 t 的导数
T^n	n 维环面
$\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$	$\mathbf{R}^n$ 上的线性算子空间
$\mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$	$\mathbf{C}^n$ 上的线性算子的复向量空间
L^k	$L \circ L \circ \cdots \circ L$
$\mathrm{Exp}(L)$, e^L	L 的 e 指数
$GL(\mathbf{R}^n)$	$\mathbf{R}^n$ 的可逆算子群
$H(\mathbf{R}^n)$	$\mathbf{R}^n$ 的双曲线性同构映射空间
$\mathscr{H}(\mathbf{R}^n)$	$\mathbf{R}^n$ 的双曲线性向量场空间
$\mathrm{Sp}(L)$	L 的谱
$\mathscr{G}_0$	奇点为简单的向量场空间
$\det(A)$	A 的行列式
$\mathscr{G}_1$	奇点为双曲的向量场空间
G_0	不动点是初等的微分同胚映射空间
G_1	不动点均为双曲的微分同胚映射空间
$C_b^0(\mathbf{R}^m)$	从 $\mathbf{R}^m$ 到自身的连续有界映射空间
$\dim M$	M 的维数
$W^s(p)$	p 的稳定流形
$W^u(p)$	p 的不稳定流形
$W^s_\beta(p)$	β 宽度的稳定流形
$W^u_\beta(p)$	β 宽度的不稳定流形
$W^s_{\mathrm{loc}}(0)$	局部稳定流形
$W^u_{\mathrm{loc}}(0)$	局部不稳定流形
$\mathscr{G}_{12}$	$\mathscr{G}_1$ 中闭轨道为双曲的向量场空间
$\mathscr{X}(T)$	$\mathscr{G}_1$ 中周期 $\leqslant T$ 的闭轨道为双曲的向量场空间
$L_\alpha(X)$	X 的轨道的 α 极限集的并集
$L_\omega(X)$	X 的轨道的 ω 极限集的并集
$\Omega(X)$	X 的非游荡点集
M–S	Morse–Smale 向量场的集合
∂M	M 的边界
$\mathrm{int}\,A$	集合A的内部

目　录

符号表 ………………………………………………………………………… I

第一章　微分流形与向量场 …………………………………………… 1

　§0　R^n 中的微积分和微分流形 ………………………………………… 1

　§1　流形上的向量场 …………………………………………………… 8

　§2　C^r 映射空间的拓扑学 …………………………………………… 15

　§3　横截性 …………………………………………………………… 18

　§4　结构稳定性 ………………………………………………………… 20

第二章　局部稳定性 ………………………………………………… 32

　§1　管形流定理 ………………………………………………………… 32

　§2　线性向量场 ………………………………………………………… 33

　§3　奇点与双曲不动点 ………………………………………………… 44

　§4　局部稳定性 ………………………………………………………… 48

　§5　局部分类 …………………………………………………………… 55

　§6　不变流形 …………………………………………………………… 60

　§7　λ 引理(倾角引理)；局部稳定性的几何证明 ……………………… 66

第三章　Kupka-Smale 定理 ………………………………………… 74

　§1　Poincaré 映射 ……………………………………………………… 74

　§2　闭轨道为双曲的向量场的通有性 …………………………………… 80

　§3　不变流形的横截性 ………………………………………………… 86

第四章　Morse-Smale 向量场的通有性与稳定性 ……………………… 94

　§1　Morse-Smale 向量场；结构稳定性 ………………………………… 94

　§2　可定向曲面上的 Morse-Smale 向量场的稠密性 ……………………… 104

　§3　若干推广 …………………………………………………………… 117

　§4　结构稳定性的一般评述；其它专题 ………………………………… 119

　　附录：旋转数与 Cherry 流 ………………………………………… 141

参考文献 …………………………………………………………………… 147

专用术语的英中对照表 …………………………………………………… 153

第一章 微分流形与向量场

在本章里，我们建立为理解后继章节所需要的概念和一些基本论据。

首先我们陈述有关 $\mathbf{R}^n$ 中的微积分、常微分方程以及 $\mathbf{R}^n$ 的子流形的一些经典结果。然后定义流形上的向量场，并将 $\mathbf{R}^n$ 中微分方程理论的局部结果应用到所定义的向量场上。借助于 α 和 ω 极限集的概念，我们介绍向量场的定性研究，并证明重要的 Poincaré–Bendixson 定理。

在第二节中，我们在两个流形间的可微映射所构成的集合上定义 C^r 拓扑。指出具有 C^r 拓扑的 C^r 映射集合，是一个可分的 Baire 空间，且 C^∞ 映射在此空间中稠密。由此得到了对于向量场空间和微分同胚映射空间来说，有着相同性质的拓扑。

第三节讲述将要经常用到的横截性定理。

我们以确立动态系统几何理论（或者称定性理论）的一般目的作为本章的结束。尤其，我们还着重地讨论了定义在 $\mathbf{R}^n$ 的子流形上的微分方程之拓扑等价以及结构稳定性的概念。

§0 $\mathbf{R}^n$ 中的微积分和微分流形

在这一节中，我们将陈述有关 $\mathbf{R}^n$ 中的微积分、微分方程以及微分流形的一些概念与基本结果。所述结果的证明，有关 $\mathbf{R}^n$ 中微积分的，可在 [46]、[48] 中找到；有关微分方程的，可参考本书推荐的入门书 [4]、[41]、[116] 或更深入一些的 [33]、[35] 及 [47]；关于微分流形的，可参见 [29]、[38]、[49]。

设 $f:U\subset\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^k$ 为定义在 $\mathbf{R}^m$ 的开子集 U 上的映射。我们说 *f 在 U 中一点 p 是可微的*，如果存在一个线性变换，$T:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^k$，对适当小的 v，

$$f(p+v)=f(p)+T(v)+R(v),\ \text{并且}\ \lim_{v\to 0}R(v)/\|v\|=0。$$

此时称线性映射 *T 是 f 在 p 点的导数*，记作 $df(p)$；有时也记为 df_p 或 $Df(p)$。特别地，f 在 p 点的导数的存在，隐含着 f 在 p 点是连续的。如果对 U 中的每一点，f 均可微，便可得到一个映射 $df\in L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^k)$，它将 U 中每一点与 p 点的导数相联系。这里 $L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^k)$ 表示具有范数 $\|T\|=\sup\{\|Tv\|;\|v\|=1\}$ 从 $\mathbf{R}^m$ 到 $\mathbf{R}^k$ 的线性映射组成的向量空间。假使 df 连续，我们说 *f 属于 U 中的 C^1 类*。众所周知，f 是 C^1 的当且仅当 f 的每个坐标分量函数的偏导函数 $\partial f^i/\partial x_j:U\to\mathbf{R}$ 存在且连续。相对于 $\mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{R}^k$ 中的标准基，$df(p)$ 的矩阵为 $[(\partial f^i/\partial x_j)(p)]$。类似地，我们定义 $d^2f(p)$ 为 df 在 p 点的导数，即 $d^2f(p)$ 属于空间 $L(\mathbf{R}^m;L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^k))$，此空间与从 $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m$ 到 $\mathbf{R}^k$ 的双线性空间 $L^2(\mathbf{R}^m;\mathbf{R}^k)$ 同构。由这个同构引出的空间 $L^2(\mathbf{R}^m;\mathbf{R}^k)$ 上的范数为 $\|B\|=\sup\{\|B(u,v)\|;\ \|u\|=\|v\|=1\}$。如果 $d^2f:U\to L^2(\mathbf{R}^m;\mathbf{R}^k)$ 是连续的，我们则称 *f 属于 U 中的 C^2 类*。用归纳法，定义 $d^rf(p)$ 为 $d^{r-1}f$ 在 p 点的导数，则有 $d^rf(p)\in L^r(\mathbf{R}^m;\mathbf{R}^k)$，这里 $L^r(\mathbf{R}^m;\mathbf{R}^k)$ 是具有范数 $\|C\|=\sup\{\|C(v_1,\cdots,v_r)\|;\|v_1\|=\cdots=\|v_r\|=1\}$ 的 r 线性映射构成的空间。于是，假若 $d^rf:U\to L^r(\mathbf{R}^m;\mathbf{R}^k)$ 是连续的，我们就称 *f 属于 U 中的*

C^r 类。最后,f 是 U 中 C^∞ 的意指对所有 $r\geqslant 0$, f 是 C^r 的。我们注意到,f 是属于 C^r 类的,当且仅当所有直至 r 阶的 f 的坐标分量函数之偏导数存在且连续。设 U, V 为 $\mathbf{R}^m$ 中的两个开子集,且 $f:U\to V$ 是一个 C^r 满映射。如果存在一个 C^r 映射 $g:V\to U$, 使得 $g\circ f$ 是 U 上的恒等映射,则称 f 是 C^r 的微分同胚映射。

命题 0.0 设 $U\subset R^m$ 是一开集, $f_n:U\to\mathbf{R}^k$ 是 C^1 映射序列。如果 f_n 逐点收敛于 $f:U\to\mathbf{R}^k$, 且序列 df_n 一致收敛于 $g:U\to L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^k)$, 则 f 是属于 C^1 类的,同时 $df=g$。 □

命题 0.1(链导法) 设 $U\subset R^m$, $V\subset R^n$ 为开集。如果 $f:U\to R^n$ 在 $p\in U$ 可微,$f(U)\subset V$ 且 $g:V\to R^k$ 在点 $q=f(p)$ 可微,则 $g\circ f:U\to R^k$ 在 p 可微,而且有

$$d(g\circ f)(p)=dg(f(p))\circ df(p)。$$ □

推论 1 若 f 和 g 都是 C^r 的,那么 $g\circ f$ 也是 C^r 的。 □

推论 2 若 $f:U\to\mathbf{R}^k$ 在 $p\in U$ 可微,$\alpha:(-1,1)\to U$ 是满足 $\alpha(0)=p$, $(d/dt)\alpha(0)=v$ 的一条曲线,则 $f\circ\alpha$ 是于 0 点可微且 $(d/dt)(f\circ\alpha)(0)=df(p)v$ 的一条曲线。 □

定理 0.2(反函数定理) 设 $f: U\subset\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ 是 C^r 的, $r\geqslant 1$。如果 $df(p):\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ 是一同构映射,则 f 是一个属于 C^r 类的且于 $p\in U$ 局部微分同胚的映射;即,存在 p 的邻域 $V\subset U$、$f(p)$ 的邻域 $W\subset R^m$ 以及 C^r 映射 $g:W\to V$, 有 $g\circ f=I_V$, $f\circ g=I_W$, 其中 I_V 和 I_W 分别表示 V 和 W 上的恒等映射。 □

定理 0.3(隐函数定理) 假定 $U\subset\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ 为开集,$f:U\to\mathbf{R}^n$ 是一个 C^r 映射, $r\geqslant 1$。设 $z_0=(x_0,y_0)\in U$ 及 $c=f(z_0)$, 又设 f 对第二个变量的偏导数 $D_2f(z_0):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为一同构映射。于是存在分别包含 x_0, z_0 的开集 $V\subset\mathbf{R}^m$, $W\subset U$ 使得对所有 $x\in V$, 有唯一的 $\xi(x)\in\mathbf{R}^n$ 满足 $(x,\xi(x))\in W$ 以及 $f(x,\xi(x))=c$。由此定义的映射 $\xi:V\to\mathbf{R}^n$ 是 C^r 的,并且它的导数为 $d\xi(x)=[D_2f(x,\xi(x))]^{-1}\circ D_1f(x,\xi(x))$。 □

注记 这个定理也适用于 Banach 空间。

定理 0.4(浸入映射的局部形式) 设 $U\subset\mathbf{R}^m$ 是一开集, $f:U\to\mathbf{R}^{m+n}$ 为 C^r 映射, $r\geqslant 1$。假定对某一 $x_0\in U$, 导数 $df(x_0):\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{m+n}$ 是单射的,那么存在 x_0 的邻域 $V\subset U$、原点的邻域 $W\subset\mathbf{R}^n$、$f(x_0)$ 的邻域 $Z\subset\mathbf{R}^{m+n}$ 以及一个 C^r 微分同胚映射 $h:Z\to V\times W$ 使得对所有 $x\in V$, $h\circ f(x)=(x,0)$。 □

定理 0.5(浸没映射的局部形式) 令 $U\subset\mathbf{R}^{m+n}$ 为开集, $f:U\to\mathbf{R}^n$ 是一 C^r 映射 $(r\geqslant 1)$。若对某个 $z_0\in U$, 导数 $df(z_0)$ 是满射的,则分别存在 z_0, $c=f(z_0)$ 和原点的邻域 $Z\subset U$、$W\subset\mathbf{R}^n$ 和 $V\subset\mathbf{R}^m$ 以及一个微分同胚映射 $h:V\times W\to Z$, 使得 $f\circ h(x,w)=w$ 对所有的 $x\in V$, $w\in W$ 成立。 □

设 $f: U\subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ 是一个 C^r 的映射，$r\geqslant 1$。于是当 $df(x)$ 为满射时，称 $x\in U$ 是正则的；否则称 x 为临界点。如果所有 $x\in f^{-1}(c)$ 均为正则点，那么 $c\in \mathbf{R}^n$ 是正则值；否则 c 为临界值。$\mathbf{R}^n$ 的一个子集是剩余的，如果它包含可列个开稠子集的交。由 Baire 定理可知任一 $\mathbf{R}^n$ 的剩余子集都是稠密的。

定理 0.6 (Sard[64]) 若 $f: U\subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ 是 C^∞ 的，则 f 的正则值集是 $\mathbf{R}^n$ 中的剩余子集。 □

注意到这里当 $f^{-1}(c)=\varnothing$ 时，c 亦是一个正则值。要使 $x\in U$ 成为一个正则点，必须 $m\geqslant n$。如果 $m<n$，那么所有 U 中的点均为临界点，从而 $f(U)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中是"贫乏"的，即 $\mathbf{R}^n - f(U)$ 为剩余集。

接下来陈述一些有关微分方程的基本结果。在开集 $U\subset \mathbf{R}^m$ 上的向量场是一个映射 $X: U\to \mathbf{R}^m$，我们将只考虑属于 $C^r(r\geqslant 1)$ 类的场。经过一点 $p\in U$，X 的一条积分曲线是一可微映射 $\alpha: I\to U$，满足对所有的 t 成立 $\alpha'(t)=X(\alpha(t))$ 及 $\alpha(0)=p$，这里 I 为包含 0 的一个开区间。我们称 α 是微分方程 $dx/dt=X(x)$ 具有初始条件 $x(0)=p$ 的解。

定理 0.7（解的存在性与唯一性定理） 设 X 是开集 $U\subset \mathbf{R}^m$ 中的一个 C^r 向量场，$r\geqslant 1$ 且 $p\in U$，则有使 $\alpha(0)=p$ 的 X 的一条积分曲线 $\alpha: I\to U$；若 $\beta: J\to U$ 是具 $\beta(0)=p$ 的 X 的另一积分曲线，则对所有 $t\in I\cap J$，成立 $\alpha(t)=\beta(t)$。 □

X 在 $p\in U$ 的一个局部流是一个映射 $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon)\times V_p\to U$，这里 V_p 是 p 在 U 中的一个邻域，它使对于每一 $q\in V_p$，由 $\varphi_q(t)=\varphi(t, q)$ 定义的映射 $\varphi_q: (-\varepsilon, \varepsilon)\to U$ 是经过 q 点的一条积分曲线，即 $\varphi(0, q)=q$ 且对所有的

$$(t, q)\in(-\varepsilon, \varepsilon)\times V_p,\ (\partial/\partial t)\varphi(t,q)=X(\varphi(t, q))。$$

定理 0.8 设 X 是 U 中的一个 C^r 向量场，$r\geqslant 1$。对所有的 $p\in U$ 存在一个 C^r 的局部流 $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon)\times V_p\to U$，而且还有：

$$D_1D_2\varphi(t, q)=DX(\varphi(t, q))\cdot D_2\varphi(t, q),$$

和 $D_2\varphi(0, q)$ 是 $\mathbf{R}^m$ 的恒等映射。这里 D_1 与 D_2 分别代表对第一及第二个变量求偏导数。□

我们同样可以考虑依赖于参数的向量场和它们的解对参数的依赖性。设 E 是 Banach 空间，$F: E\times U\to \mathbf{R}^m$ 为一个 $C^r(r\geqslant 1)$ 映射。对每一个 $e\in E$，映射 $F_e: U\to \mathbf{R}^m$，$F_e(p)=F(e, p)$ 是定义在 U 上的 C^r 向量场。下面的定理说明场 F_e 的解连续地依赖于参数 $e\in E$。

定理 0.9 对每一个 $e\in E$ 和 $p\in U$，存在 e 在 E 中的邻域 W、p 在 U 中的邻域 V 以及一个 C^r 映射 $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon)\times V\times W\to U$，使得对每一个 $(t, q, \lambda)\in(-\varepsilon, \varepsilon)\times V\times W$，有

$$\varphi(0, q, \lambda)=q,$$
$$D_1\varphi(t, q, \lambda)=F(\lambda, \varphi(t, q, \lambda))。$$

□

接下来我们介绍可微流形的概念。为简化叙述，定义流形为 $\mathbf{R}^k$ 的子集，其抽象的定义

在本节的结尾再作讨论。

设 M 是 Euclid 空间的一个子集。我们将用到M上的导出拓扑；即，如果存在一个开集 $A'\subset\mathbf{R}^k$ 使 $A=A'\cap M$，那么 $A\subset M$ 是开的。我们说 $M\subset\mathbf{R}^k$ 是一个m维可微流形，如果对每一个 $p\in M$，存在 p 的一个邻域 $U\subset M$ 和一个同胚映射 $x:U\to U_0$（其中 U_0 是 $\mathbf{R}^m$ 的一个开集），使逆同胚映射 $x^{-1}:U_0\to U\subset\mathbf{R}^k$ 是一个 C^∞ 浸入映射。也就是说，对每一个 $u\in U_0$，导数 $dx^{-1}(u):\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^k$ 是单射的。在这种情况下，称(x, U)是环绕 p 的一个局部图，而U是 p 点的坐标邻域。若此时同胚映射 x^{-1} 还是属于 C^r 类的，就称M为一个 C^r 流形。所谓的可微流形是针对 C^∞ 流形而言的。从浸入映射的局部形式(定理 0.4)可以得知，如果(x, U)是环绕 $p\in M$ 的一个局部图，就存在着 p 在 $\mathbf{R}^k$ 中的一个邻域 A、$x(p)$的邻域 V、$\mathbf{R}^{k-m}$ 中原点的邻域W以及一个 C^∞ 微分同胚映射 $h:A\to V\times W$，使得对所有 $q\in A\cap M$，$h(q)=(x(q),0)$ 成立。特别地，局部图是从 $\mathbf{R}^k$ 的一个开集到 $\mathbf{R}^m$ 的一个 C^∞ 映射的限制(图 1)。由此我们可得如下的命题。

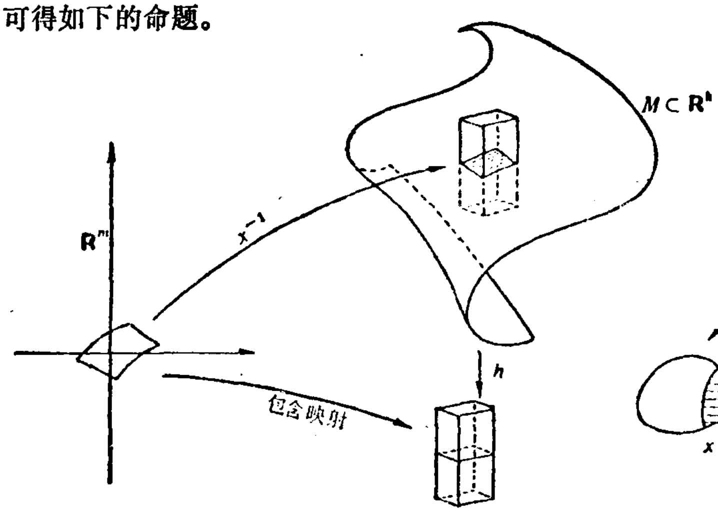

图 1

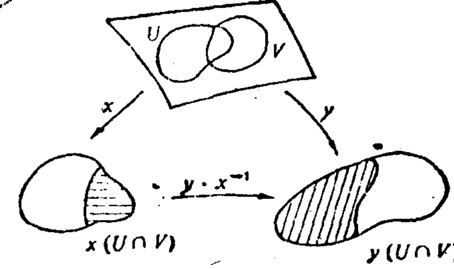

图 2

命题 0.10 设 $x:U\to\mathbf{R}^m$ 和 $y: V\to\mathbf{R}^m$ 是M中的局部图，如果 $U\cap V\neq\emptyset$，则坐标变换 $y\circ x^{-1}:x(U\cap V)\to y(U\cap V)$是一个 C^∞ 微分同胚映射(图 2)。 □

现在我们定义流形间的可微映射。设M和N分别是m维及 n 维流形，$f:M\to N$ 为一映射。如果对每一个点 $p\in M$，存在环绕 p 的局部图 $x:U\to\mathbf{R}^m$ 和 $y:V\to\mathbf{R}^n$ 并且 $f(U)\subset V$，使得 $y\circ f\circ x^{-1}:x(U)\to y(V)$是属于 C^r 类的，我们则说 f 是属于 C^r 类的。由于坐标变换是C^∞的，因此这个定义与图的选择无关。

考虑一条可微曲线 $\alpha:(-\varepsilon, \varepsilon)\to M\subset\mathbf{R}^k$，$\alpha(0)=p$。显而易见，根据上面的定义，$\alpha$ 是可微的当且仅当 α 作为 $\mathbf{R}^k$ 中的曲线是可微的。因此存在一个切向量 $(d\alpha/dt)(0)=\alpha'(0)$；与所有这样的曲线 α 相切的向量之集合称为在 p 点对于M的切空间，记作 TM_p。考虑一个局部图 $x:U\to\mathbf{R}^m$，$x(p)=0$。显然，导数 $dx^{-1}(0)$的像与 TM_p 重合，因而 TM_p 是一个m维的向量空间。

设 $f:M\to N$ 是一可微映射，$v\in TM_p$，$p\in M$。考虑一条合于 $\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=v$ 的可微曲线 $\alpha:(-\varepsilon, \varepsilon)\to M$。于是 $f\circ\alpha:(-\varepsilon, \varepsilon)\to N$ 是一条可微曲线，从而我们可以定义 $df(p)v=(d/dt)(f\circ\alpha)(0)$。此定义与曲线 α 的选择无关。

映射 $df(p):TM_p\to TN_{f(p)}$ 是线性的，它被称为 f 在 p 点的导数。

既然一个可微流形局部地是 Euclid 空间中的一个开子集，那么于前面列出的所有微积分定理均可推广到流形之上。

命题 0.11（链导法） 若 $f:M\to N$ 和 $g:N\to P$ 均为可微流形间的 C^r 映射，则 $g\circ f:M\to P$ 是属于 C^r 类的并且 $d(g\circ f)(p)=dg(f(p))\circ df(p)$。 □

若映射 $f:M\to N$ 是 C^r 的并且有属于 C^r 类的逆 f^{-1}，则称 f 是一个 C^r 微分同胚映射。在这种情况下，对每一个 $p\in M$, $df(p):TM_p\to TN_{f(p)}$ 是一同构映射，其逆为 $df^{-1}(f(p))$。特殊的情况是 M 和 N 有着相同的维数。假若存在邻域 $U(p)\subset M$ 和 $V(f(p))\subset N$ 使 f 在 U 上的限制是一个映上 V 的微分同胚映射，我们则说 $f:M\to N$ 是在 $p\in M$ 一个局部微分同胚映射。

命题 0.12（反函数定理） 如果 $f:M\to N$ 是属于 C^r 类的，$r\geq 1$，并且对某个 $p\in M$, $df(p)$ 是一同构映射，那么 f 为 p 点的一个局部 C^r 微分同胚映射。 □

现在考察流形 M 的一个子集 S。如果对每一个 $p\in S$，存在包含 p 的开集 $U\subset M$、包含 0 的开集 $V\subset \mathbf{R}^s$ 和包含 0 的开集 $W\subset \mathbf{R}^{m-s}$ 以及一个 C^r 微分同胚映射 $\varphi:U\to V\times W$ 使得 $\varphi(S\cap U)=V\times\{0\}$（图 3），则 S 是一个 M 的 C^r 类的 s 维子流形。

注意到 $\mathbf{R}^k$ 是一个可微流形，假若 $M\subset \mathbf{R}^k$ 是一个如上定义的流形，那么 M 是 $\mathbf{R}^k$ 的子流形，而 M 的子流形当然亦是 $\mathbf{R}^k$ 的子流形，只不过它含在 M 之中。

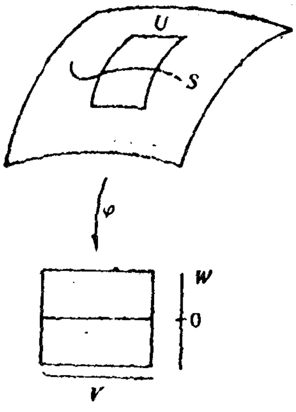

图 3

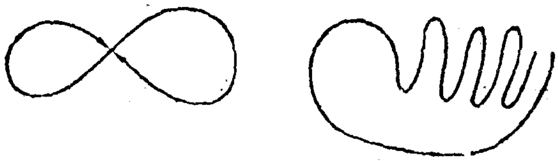

图 4

命题 0.13（浸入映射的局部形式） 设 $f:M^m\to N^{m+n}$ 是一 C^r 映射†，$r\geq 1$，$p\in M$ 满足 $df(p)$ 是单射，则存在 $\mathbf{R}^m$ 中的邻域 $U(p)$, $V(f(p))$, $U_0(0)$ 以及 $\mathbf{R}^n$ 中的邻域 $V_0(0)$ 和 C^r 微分同胚映射 $\varphi:U\to U_0$, $\psi:V\to U_0\times V_0$，使得 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x)=(x,0)$。 □

若对所有的 $p\in M$, $df(p)$ 均为单射，那么 C^r 映射 $f:M\to N$ 是一浸入映射。如果 $f:M\to$

† M^m, N^{m+n} 分别代表 m 维及 $m+n$ 维流形，在不致混淆的情况下也记为 M, N，下同。——译者注

$f(M)\subset N$ 为同胚映射，其中 $f(M)$ 具有导出拓扑，那么一个单射的浸入映射 $f:M\to N$ 是一个嵌入映射。此时，$f(M)$ 是 N 的一个子流形。若 $f:M\to N$ 仅仅是单射的浸入映射，就说 $f(M)$ 是一个浸入子流形。图 4 的例子表示一个浸入的，但非嵌入的子流形。

命题 0.14（浸没映射的局部形式） 设 $f:M^{m+n}\to N^n$ 是一 C^r 类映射，$r\geqslant 1$。如果 $p\in M$ 是使 $df(p)$ 为满射的一点，则存在 $\mathbf{R}^m$ 中的邻域 $U(p),V(f(p)),U_0(0)$ 和 $\mathbf{R}^n$ 中的邻域 $V_0(0)$ 以及微分同胚映射 $\varphi:U\to U_0$ 和 $\psi:V\to V_0$，使得 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x,y)=y$。 □

如果对所有合于 $f(p)=q$ 的点 $p\in M,df(p)$ 均为满射（这里 f 是一个 $C^r(r\geqslant 1)$ 映射），那么点 $q\in N$ 为 $f:M^m\to N^n$ 的一个正则值。由命题 0.14 可知 $f^{-1}(q)$ 是一个 $m-n$ 维 C^r 子流形。

命题 0.15(Sard) 设 $f:M\to N$ 是一 C^∞ 映射，则 f 的正则值集合是剩余的；特别地，它在 N 中稠密。

命题 0.15 的证明可以通过取局部图的 Sard 定理并根据一个流形的任一开覆盖有一可列子覆盖的事实而得。 □

我们注意到：当 M 为紧集时，$f:M\to N$ 的正则集是 N 中的开集，而且还是稠密的。

让我们来考虑流形 M 的一个可列开覆盖 $\{U_n\}$。如果对所有 $p\in M$，存在 p 的邻域 V，它仅与开覆盖中的有限个元相交，就说这个覆盖是局部有限的。一个从属于覆盖 $\{U_n\}$ 的单位划分，是满足下列条件的可数个 C^∞ 非负实函数的组合 $\{\varphi_n\}$：

(a) 对每一个下标 n，φ_n 的支集包含于 U_n 中，所谓 φ_n 的支集是那些使 φ_n 为正的点所成的集合之闭包。

(b) 对所有 $p\in M$，$\Sigma_n\varphi_n(p)=1$。

命题 0.16 给定 M 的一个局部有限的可列覆盖，则存在从属于这个覆盖的一种单位划分。 □

推论 1 设 $K\subset M$ 是一闭子集，则存在 C^∞ 映射 $f:M\to\mathbf{R}$ 使 $f^{-1}(0)=K$。 □

推论 2 设 $f:M\to\mathbf{R}^s$ 是一 C^r 映射，其中 $M\subset\mathbf{R}^k$ 为闭流形，则存在一个 C^r 映射

$$\tilde{f}:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^s \text{ 使 } \tilde{f}|M=f。$$ □

从以上这一命题我们知道：当在 M 中给定开集 U 和 V 且 $\overline{U}\subset V$ 时，便有一个 C^∞ 实值函数 $\varphi\geqslant 0$ 满足于在 U 上 $\varphi=1$，在 $M-V$ 上 $\varphi=0$。这样的函数称为频簸函数。

现在我们来定义流形 $M^m\subset\mathbf{R}^k$ 的切丛 TM。令

$$TM=\{(p,v)\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^k;p\in M,v\in TM_p\}。$$

给出 TM 的导出拓扑，视 TM 为 $\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^k$ 的子集，于是自然投影 $\pi:TM\to M,\pi(p,v)=p$ 是连续的。让我们来说明 TM 是一可微流形而 π 是属于 C^∞ 类的。设 $x:U\to\mathbf{R}^m$ 为关于 M 的一个局部图，我们定义映射 $Tx:\pi^{-1}(U)\to\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m$ 为 $Tx(p,v)=(x(p),dx(p)v)$。容易看出

$(Tx, \pi^{-1}(U))$是 TM 的一个局部图，因此 $TM \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k$ 是一流形。注意到关于 π 用局部图 $(Tx, \pi^{-1}(U))$的表示，仅仅是 $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$ 在第一个因子上的自然投影，故 π 是 C^∞ 的。还容易看出，假使 $f:M \to N$ 是 C^{r+1} 的，那么 $df:TM \to TN$, $df(p, v) = (f(p), df(p)v)$是 C^r 的。

象我们前面已强调过的那样，流形有其抽象的定义，它比刚才叙述的概念更为一般。为此，设M是一个具有可数基的 Hausdorff 拓扑空间，M 中的一个局部图是一个序对 (x, U)，这里 $U \subset M$ 为开集，并且 $x:U \to U_0 \subset \mathbf{R}^m$ 是映上 $\mathbf{R}^m$ 的开子集 U_0 的同胚映射。如果(x, U)和(y, V)是M中的局部图，$U \cap V \neq \emptyset$ 且坐标变换 $y \circ x^{-1}:x(U \cap V) \to y(U \cap V)$是一个同胚映射，我们则说$U$是$M$中参数化了的邻域。一个 C^r 类$(r \geqslant 1)$的可微流形是一个拓扑空间连同一簇局部图且满足 (a) 参数化的邻域覆盖 M, (b)坐标变换是一 C^r 微分同胚映射。我们称这样的一簇局部图为关于M的一种 C^r 图册。

借助于局部图，就象曾经定义过的那样，我们可以规定这些流形之间映射的可微性。特别地，如果 $x \circ \alpha:(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^m$ 是可微的(其中(x, U) 是使 $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$ 的局部图)，则曲线 $\alpha:(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 是可微的，α 在 $p = \alpha(0)$ 处的切向量定义为满足于

$$\beta(0) = p,\ d(x \circ \beta)(0) = d(x \circ \alpha)(0)$$

的可微曲线 $\beta:(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$。该定义与局部图的选择无关。$M$ 在 p 的切空间 TM_p 是经 p 点的可微曲线的切向量组成的集合，因而 TM_p 具有自然的m维向量空间结构。就两个流形间的可微映射 $f:M \to N, f(p) = q$，我们定义 $df(p):TM_p \to TN_q$ 为将曲线 $\alpha:(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 在 p 点的切向量映至曲线 $f \circ \alpha:(-\varepsilon, \varepsilon) \to N$在 q 点的切向量的映射。容易看出这个定义与曲线α的选择无关，且 $df(p)$是一线性映射。我们说 $f:M \to N$ 是一浸入映射，意指对所有 $p \in M, df(p)$为单射。一个嵌入映射是一个单射的浸入映射 $f:M \to N$ 且有着连续的逆 $f^{-1}:f(M) \subset N \to M$。如 $f:M \to \mathbf{R}^k$ 是一个 C^∞ 嵌入映射，则根据早先给出的定义，$f(M) \subset \mathbf{R}^k$ 为 $\mathbf{R}^k$ 的子流形。

下面的定理将流形的抽象定义同 Euclid 空间的子流形定义相联系。

定理 0.17(Whitney) 若M是一个m维可微流形，则存在一个适当的嵌入映射

$$f:M \to \mathbf{R}^{2m+1}。$$ □

设M是一可微流形，$S \subset M$ 是一子流形。S 的一个管形邻域为序对(V, π)，这里V是S在M中的某一邻域，且 $\pi:V \to S$ 是使当 $p \in S$ 时 $\pi(p) = p$ 的 C^∞ 浸没映射。

定理 0.18 每一个子流形 $S \subset M$ 均有一管形邻域。 □

最后，每个 $C^r(r \geqslant 1)$流形都可自然地当作为 C^∞ 流形。

定理 0.19(Whitney) 设M是一 C^r 流形，$r \geqslant 1$，则存在 C^r 嵌入映射 $f:M \to \mathbf{R}^{2m+1}$ 使得 $f(M)$为 $\mathbf{R}^{2m+1}$ 中的一个闭的 C^∞ 子流形。 □

按照定理 0.17，定理 0.19 等价于：如果$\mathscr{A}$是一个M上的 C^r 图册，则存在M上的 C^∞ 图册$\tilde{\mathscr{A}}$使得，若$(x, U) \in \mathscr{A}$, $(\tilde{x}, \tilde{U}) \in \tilde{\mathscr{A}}$ 且 $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$，那么$\tilde{x} \circ x^{-1}$ 以及 $x \circ \tilde{x}^{-1}$ 都具有 C^r 类。

§1 流形上的向量场

这里我们着手进行微分方程的定性研究。该研究包括局部同整体两方面，因此自然地要在可微流形上来讨论。最基本的整体性结果之一是 Poincaré-Bendixson 定理，我们将以此来结束本节的讨论。

设$M^m\subset\mathbf{R}^k$是一个可微流形，M上的C^r向量场是一个C^r映射$X:M\to\mathbf{R}^k$，对每一点$p\in M$，映射X连带给出向量$X(p)\in TM_p$。这相当于一个C^r映射$X:M\to TM$使πX为M上的恒等映射，这里π是从TM到M的自然投影。记M上的C^r向量场组成的集合为$\mathscr{X}^r(M)$。

经过$p\in M$的$X\in\mathscr{X}^r(M)$的一条积分曲线是一C^{r+1}映射$\alpha:I\to M$，其中I为包含0的一个区间且对所有的$t\in I$，α满足$\alpha(0)=p,\alpha'(t)=X(\alpha(t))$。称积分曲线的像为轨道或轨线。

如果$f:M\to N$是一个C^{r+1}微分同胚映射且$X\in\mathscr{X}^r(M)$，那么由$Y(q)=df(p)(X(p))$和$q=f(p)$定义的$Y=f_*X$是N上的C^r向量场，这是因为$f_*X=df\circ X\circ f^{-1}$。若$\alpha:I\to M$是$X$的一条积分曲线，则$f\circ\alpha:I\to N$为$Y$的积分曲线。特别地，$f$将$X$的轨线映上$Y$的轨线。从而当$x:U\to U_0\subset\mathbf{R}^m$是一局部图时，$Y=x_*X$为$U_0$中的$C^r$向量场；我们说，$Y$是$X$在局部图$(x,U)$中的表示。至此，有关解的存在性、唯一性以及可微性的局部定理可以推广到流形上的向量场（正如以下命题所述的那样）。

命题 1.1 设E为 Banach 空间，$F:E\times M\to TM$是满足于$\pi F(\lambda,p)=p$的C^r映射，$r\geqslant 1$，其中$\pi:TM\to M$为自然投影。对每一个$\lambda_0\in E$，$p_0\in M$，存在λ_0在E中的邻域W和p_0在M中的邻域V，实数$\varepsilon>0$以及一个C^r映射$\varphi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times V\times W\to M$，$\varphi(0,p,\lambda)=p$，并且对所有的$t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，$p\in V$和$\lambda\in W$，$(\partial/\partial t)\varphi(t,p,\lambda)=F(\lambda,\varphi(t,p,\lambda))$均成立。再则，若$\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$是向量场$F_\lambda=F(\lambda,\cdot)$具有$\alpha(0)=p$的积分曲线，那么$\alpha=\varphi(\cdot,p,\lambda)$。 □

命题 1.2 设I,J是两个开区间，$\alpha:I\to M$，$\beta:J\to M$是$X\in\mathscr{X}^r(M)(r\geqslant 1)$的积分曲线。若对某$t_0\in I\cap J$，$\alpha(t_0)=\beta(t_0)$，则对所有$t\in I\cap J$，$\alpha(t)=\beta(t)$。故有积分曲线$\gamma:I\cup J\to M$，它在$I$中与$\alpha$重合，而在$J$中又与$\beta$重合。

证明：根据局部唯一性，假若$\alpha(t_1)=\beta(t_1)$，就有$\varepsilon>0$，使当$|t-t_1|<\varepsilon$时，$\alpha(t)=\beta(t)$，因而集合$\tilde{I}\subset I\cap J$（在其中α与β重合）为开集。因为$\tilde{I}$的余集是开的且$I\cap J$又是连通的，所以$\tilde{I}=I\cap J$。 □

命题 1.3 设M是一紧流形且$X\in\mathscr{X}^r(M)$，则在M上存在一个关于X的整体C^r流，即存在C^r映射$\varphi:\mathbf{R}\times M\to M$使$\varphi(0,p)=p$，$(\partial/\partial t)\varphi(t,p)=X(\varphi(t,p))$。

证明：考虑M中的一个任意点p，我们将指出存在一条定义于整个$\mathbf{R}$且经过p的积分曲线。设$(a,b)\subset\mathbf{R}$是积分曲线$\alpha:(a,b)\to M$的定义域，$0\in(a,b)$且$\alpha(0)=p$。如果对所有具有以上性质的区间J都有$J\subset(a,b)$，就说(a,b)是极大的。我们断言，假使(a,b)为极大，便有$b=+\infty$。若其不然，则让我们来考察一个序列$t_n\to b$，$t_n\in(a,b)$。由于M是紧的，