全国中小学教师继续教育

教材

# 数学方法论

教育部师范教育司组织评审

本书编写组



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国中小学教师继续教育教材

# 数学方法论

教育部师范教育司组织评审

主编　阮体旺

阮体旺　陈　尧
黄全法　王永利　编



高等教育出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

数学方法论/阮体旺主编．—北京：高等教育出版社，1995.2（2000.8重印）
ISBN 7-04-004959-7

Ⅰ．数… Ⅱ．阮… Ⅲ．数学方法-方法论 Ⅳ．01-0

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第62848号

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | | |
| **社　　址** | 北京市东城区沙滩后街55号 | **邮政编码** | 100009 |
| **电　　话** | 010—64054588 | **传　　真** | 010—64014048 |
| **网　　址** | http：//www. hep. edu. cn | | |
| **经　　销** | 新华书店北京发行所 | | |
| **印　　刷** | 河北新华印刷一厂 | | |
| **开　　本** | 787×1092　1/32 | **版　　次** | 1994年10月第1版 |
| **印　　张** | 6.875 | **印　　次** | 2000年8月第2次印刷 |
| **字　　数** | 141 000 | **定　　价** | 6.40元 |

# 第一章　概　　论

## §1.　什么是数学方法论

### 一、数学方法论的概念

要研究数学方法论，先要了解什么是方法论.

任何一门学科都有其发生发展的过程，都有其发展的规律，并在其发展过程中形成本学科研究问题的方法. 所谓方法论就是把某种共同的发展规律和研究方法，作为讨论对象的一门学问. 各门学科都有自身的方法论. 当然，数学学科也有它的方法论.

数学方法论就是研究和讨论数学的发展规律，数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门新兴学科. 显然数学方法论不仅涉及思维对象——数学本身的辩证性，也涉及思维过程——认识及反映过程的辩证性，也就是说数学方法论不仅涉及到数学科学而且也涉及到思维科学.

关于方法论方面的研究由来已久. 解析几何的创始人笛卡儿曾写过专著«方法论»，他特别强调怎样从数学解题过程中总结出一般的思想方法及法则. 他曾说过这样的话："我们所解决的每个问题，都成为以后解决其他问题的规则."17 世纪伟大的哲学家和数学家莱布尼茨也曾写过«论发明的技巧». 近代的著名数学家中如庞加莱、克莱因、希尔伯特、阿达马等人，也都分别发表过关于数学方法论的精辟见解.

## 二、关于宏观的数学方法论及微观的数学方法论

数学方法论是从数学发展史的丰富材料中归纳总结得到的，而数学发展的动力主要来源于社会生产实践及技术发展的客观要求．因此推动数学的发展有两个因素：一是社会生产实践及科学技术发展的客观要求，这是外部因素；二是数学自身内部的矛盾运动，这是内部因素．在数学的整个发展过程中，这两个因素是互相交叉渗透的．

在数学方法论的研究中，如果撇开数学内在因素不提，专门研究数学发展的巨大动力源泉与社会生产实践及技术发展的客观要求是怎样紧密相连的，这就属于宏观数学方法论的范畴．

在数学方法论的研究中，如果撇开社会生产实践与科学技术推动的外部动力，专就数学内部体系结构中的特定问题进行研究，这就属于微观数学方法论的范畴．

所以，关于数学发展规律的研究属于宏观的数学方法论．关于数学思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的研究则属于微观的数学方法论．

从历史上看，最卓越的一些数学家，他们的成就与贡献所以能对社会生产技术的发展产生这样深远的影响，就是由于他们既精通微观的数学方法论，也懂得宏观的数学方法论．

## 三、数学方法论的产生与发展以及它在数学历史发展中的一些作用

有着几千年发展史的数学学科其内容是如此的丰富，而

它的产生和发展如同其他自然科学一样，归根结蒂是由于生产实践的需要. 但另一方面，数学方法的发展，对于数学学科的进步，也是一种内在的推动力量. 而且这种推动作用是直接的、巨大的. 数学方法的伟大变革，总是引起数学发展的巨大飞跃. 每一时期数学发展的水平总是与那一时期数学方法的发展水平相适应的. 数学方法与数学是同时产生并同步发展的. 如果我们回顾一下数学产生和发展的历史，就可以从中看到数学方法论产生和发展的历史以及它在数学发展的各个时期的作用. 如果按照思想和方法的本质特征的差异，数学的发展大致可分为如下四个时期：

**1．数学的萌芽时期**

数学的萌芽时期是从远古时代到公元前6世纪，这是积累实际材料的时期，也是数学方法发生和积累的时期. 在这个时期，人类根据生活和生产的需要，主要研究天文历算，土地测量和水利工程计算、航海测量等实际计算和测量问题，总结出许多实际计算和测量方法. 在解决这些问题的过程中不仅形成了自然数、分数以及一些简单图形的概念，创立了初步的算术和几何，而且总结和积累了一些数学研究方法.

例如，中国约在公元前11世纪以前的殷虚甲骨文卜辞中对于大于10的自然数都采用十进位制. 在当时，人们已认识较大的自然数并创造了十进制记数系统. 在古埃及的纸草纸的文献和巴比伦的楔形文字中，就有算术运算的方法、几何计算的方法、典型算术题的解法和开平方的方法等. 又如在中国汉代的著作《周髀》中记载了用"矩"(两条互相垂直的尺)来

测量的方法；在战国时代的著作《考工记》一书中记载了尺规、竿、绳一类简单量器的资料等。

这个时期的数学知识是零乱的，实际计算和测量的知识与其他解决实际问题的知识混在一起，数学研究的对象是具体实物中的量和形。数学还未成为独立的一门科学。人们对数学方法的研究也仅仅局限于解决实际问题中的个别的、具体的方法。虽然如此，数学方法的产生与不断积累已经预示着数学方法论的萌芽。

**2．常量数学时期**

常量数学时期是从公元前6世纪到公元17世纪。这个时期数学研究的对象主要是客观事物相对静止状态下保持不变的量和形。数学对象是从实际事物的性质中抽象出来并把它理想化成为纯粹的数学研究对象。并运用逻辑方法（主要是演绎法）把过去经验积累的零乱的数学知识整理成为演绎体系。此外，数学引入了自己专有的符号系统，数学的表述，计算、推理和证明的方法日趋完善。这样，数学就从解决实际问题发展成为独立的科学，并形成了算术、几何、代数、三角等分支。

这个时期人们对数学方法的总结和研究逐步深入，出现了许多新的数学思想和数学方法。例如，希腊学者欧几里得在他的《几何原本》中，把全部几何知识整理成为演绎数学体系，创立了公理化思想和方法。又如希腊的杰出思想家亚里士多德对观察、分类等方法进行了研究。在他的《工具论》一书中，论述了归纳法和演绎法，总结了演绎推理的一般原则，创立了形式逻辑。英国哲学家弗兰西·培根在他的名著《新工

具》中，系统地阐述了实验法和归纳法，并创立了归纳逻辑. 我国古代数学家刘徽在《九章算术注》中，提出了"割圆术"，即以圆内接正多边形穷竭圆，求出 $\pi=3.1416$. 使用了极限的思想和方法.

这时期，不仅观察、实验、归纳等方法得到不断完善，成为重要的科学方法，而且各种数学思想和方法不断产生. 人们对数学思想的不断研究和数学方法的大量出现，为形成数学方法论学科奠定了基础.

**3. 变量数学时期**

变量数学时期是从 17 世纪中叶到 19 世纪 20 年代. 这个时期人们对自然界的认识，从研究客观事物的相对静止状态进而探索运动变化规律. 数学研究的对象亦从常量到变量、从离散量到连续量、从有限到无限、从简单图形到复杂图形，从静态到动态的扩展，使数学发生了根本的变化. 以法国数学家笛卡儿的著作《几何学》为起点，引入了变量概念，诞生了解析几何，实现了数与形的结合，使数学从分散趋于统一. 这一时期的最大成就就是微积分的出现和发展，它是在几代人努力的基础上由牛顿和莱布尼茨完成的，并在实际应用中取得了辉煌成就. 微积分的发明奠定了分析学的基础，以函数为研究对象的级数、微分方程、复变函数等分析理论相继建立. 微分方程、概率论等相关分支学科也相应产生. 随着各门学科的建立和发展，各种科学方法特别是数学方法逐步形成和发展、坐标法和微积分的出现，引起了数学思想方法的重大突破. 从此辩证法进入了数学，成为数学方法论的哲学基础，对数学方法的研究有了突破性进展. 数学方法论的专著

大量出版，例如英国数学家、物理学家牛顿在《自然哲学的数学原理》中对实验、假说、归纳推理等方法进行了系统的研究和总结，法国数学家笛卡儿在《方法论》中论述了演绎方法，并制定了一系列的方法论原则，标志着数学方法论的初步形成.

**4．近代和现代数学时期**

近代和现代数学时期是从19世纪20年代至今．这也是数学方法论作为一门学科的建立和发展的时期．这个时期，数学已成为分支众多，体系庞大的科学，数学的研究对象发生了重大变化，向更一般化、抽象化、多样化发展．例如几何由研究现实的1维、2维、3维空间发展到研究$n$维空间和非欧空间．代数从研究数的代数运算发展到研究抽象代数结构．数学分析从研究函数的基本性态发展到利用更新型的方法在更广阔领域中研究函数．在几何、代数、分析等学科的基础上又出现了许多新的交叉学科．此外，这个时期数学的应用也有了迅猛的发展，出现了许多数学与其他学科相结合的边缘学科．随着近代和现代数学的发展，出现了许多具有划时代意义的数学思想方法，导致数学基础科学的重大变革．例如罗巴切夫斯基和黎曼从否定欧氏几何第五公设出发，创立了非欧几何，使几何学发生了深刻的革命，并导致现代公理化方法的诞生；伽罗瓦从全新的观念出发引入了“群”的概念，创立了群论的思想方法；柯西和魏尔斯特拉斯运用极限的思想方法使微积分达到了严密化和标准化．极限与集合论思想方法的出现，对于整个数学基础特别是对数学结构的探讨，具有极大的促进作用.

在这个时期，许多数学家和思想家开始致力于数学思想

和方法的研究，使数学中各种科学的认识方法和逻辑方法逐步趋于成熟和完善．例如，英国哲学家穆勒在《逻辑体系》一书中，深入总结了归纳法，使归纳法达到科学的形式化．德国数学家赫尔德在《数理方法论》等著作中，对演绎法、归纳法、公理法等进行了科学的研究和总结，使这些方法趋于完善．特别是进入20世纪以来，随着科学技术的飞速发展，科学方法发生了重大变革，出现了一系列新的科学方法．许多数学家开始对数学方法论作学科总结和研究，使数学方法论作为一门独立学科取得了重大进展．在这方面作出巨大贡献的，首推当代杰出的数学家和数学教育家乔治·波利亚．他在数学的广阔领域里有很深的造诣，而且热心教育，十分重视培养学生的能力．他在数学方法方面的代表作有《数学的发现》、《数学与猜想》（又译为《数学与似真推理》）、《怎样解题》等．我国在数学方法论的研究中成绩斐然，有以著名数学家徐利治教授为代表的专著《数学方法论选讲》．

由此可见，数学方法与数学是同时产生并同步发展的．数学的发展史也就是数学方法论产生和发展的历史，数学的每一项重大成果的取得无不与数学思想方法的突破与创新有关．

## §2．学习和研究数学方法论的意义和目的

数学方法论是数学教育学科的一个重要部分，学习与研究数学方法论不论对促进数学的发展，数学功能的发挥，还是对改革数学教育，培养数学人才，都具有十分重大的意义．

## 一、有利于促进数学的发展与数学功能的发挥

数学方法论是研究数学发展规律的科学，它着重于从数学与方法学的结合上总结数学的思想、方法和法则，揭示数学的发展规律．通过对数学客观基础的研究和对数学内容的辩证分析，可使人们对数学的本质有进一步的认识．历史上，数学的每一项重大成果的取得，无不与数学思想方法的突破与创新有关．所以，掌握数学方法论开拓新的思想方法，有助于数学成果的取得．

另外，数学具有工具和方法的作用．它的功能是多方面的，不论对于科学功能、社会功能和思维功能，都需要运用数学知识、数学的思想方法去解决各门科学和社会实践中的实际问题，发挥数学在人们思维活动与思维发展中的独特作用，通过数学方法的研究和实践，对于发挥数学的功能具有极大的促进作用．

因此，学习与研究数学方法论，有助于认识数学的本质，促进数学的发展与数学功能的发挥．

## 二、有利于数学教育的改革和数学人才的培养

当前，我国数学教育正在蓬勃发展，时代对数学教育提出了面向世界、面向现代化、面向未来的更高要求．因此，更新旧的教育观念和教学思想，改进旧的教学方法，促进数学的学习与人才的成长，已成为数学教育改革的重要任务，而加强数学方法论的学习与研究，对于促进数学教育改革具有重大的指导意义和推动作用．

**1．有利于改善数学教师的业务素质和知识结构**

数学方法论是研究数学发展规律的科学，通过数学方法论的学习与研究．有助于理解数学的本质和规律、理解数学的思维过程和思想方法，促进由对合理方法的不自觉的运用向有意识的，自觉应用的转化，从而改善数学教师的业务素质和知识结构，提高驾驭教材的能力．

**2．有利于促进教学方法的改革**

当前，我国数学教育改革的重要任务之一，就是改革教学方法，使教师由“知识传授型”转化为“能力培养型”，作为数学教师，实现教学方法的突破与创新的关键，一是教育观念与教学思想的更新，二是教师本身知识结构与业务素质的改善与提高，三是具有勇于探索积极实践的精神．通过数学方法论的学习与研究，不仅有助于认识数学的思想方法和发展规律，而且有助于理解教材中数学知识的发生过程，掌握其中的思维规律和方法，在传授数学知识时注意数学方法论方面的训练和培养，这对于教学方法的改革与创新具有重要的指导作用．

**3．有利于数学的学习与数学人才的成长**

在数学学习中，既要学习前人已经获得的旧的知识，又要通过实践探索和理论研究获得新的知识．这里前一种属于继承，后一种属于创新．无论如何要有效地获得知识，都需要掌握数学方法论的基本知识，具备数学方法论的基本素养．因为它不仅有助于加深对数学知识的理解，而且有助于掌握数学理论和数学方法的精神实质，从而提高分析问题和解决问题的能力．这对于培养学习数学的才能，运用数学的才能和

发展数学的才能，都具有重大的现实意义和深远的历史意义。

## 三、学好数学方法论的几点意见

### 1. 学好数学方法论，要学习有关的数学史

由于数学方法论与数学是同时产生并同步发展的，数学的发展史也就是数学方法论产生和发展的历史。所以在学习数学方法论时，要结合学习有关的数学史，学习对数学作出重大贡献的数学家的思想方法。

例如，日本数学家细井淙的《东西方数学思想史》，美国数学家克莱因的名著《古今数学思想》等著作都能帮助我们从历史角度学习、研究数学方法论。

### 2. 学好数学方法论，要学习有关的科学哲学

由于数学方法论是一般自然科学方法论的一个特殊范畴，它包含于科学哲学。因此，在学习数学方法论时，学一点科学方法论，学一点科学哲学，从更高的观点来了解掌握数学方法论的精神实质，必将受益匪浅。

例如，日本数学家三宅刚一发表的《数学哲学思想史》等都可作为这方面的学习材料。

### 3. 学习数学方法论要联系实际，不断总结不断积累

学习数学方法论必须密切联系数学教学实际。在数学教学中，不仅要注意数学知识的传授，更要注意数学方法论方面的能力训练和培养。强调数学方法论与数学教学的有机结合，自觉地运用数学方法论的思想指导数学教学，这对提高教学质量将起到积极的作用，同时也促进了数学方法论的学

习.

在数学方法论的学习过程中，也要注意经验的总结与资料的积累. 对于运用数学方法论的思想方法所获得的好的教学经验和体会应及时总结. 看书有了收获，应作好读书笔记. 对于典型的题目要分门别类作资料卡片，对于有代表性的解题方法要作小结. 通过不断总结不断积累不断应用，将会很快提高教师在教学中应用数学方法论的能力.

# 第二章　数学的发现方法

在数学上要有所发现、有所发明、有所创造和有所前进，首先应将具有一定数量和质量的经验材料，进行加工整理成为数学材料，从而形成数学猜想，建立数学命题，这种思维方法属于数学的发现方法. 正如G·波利亚所指出的："数学的创造过程是与任何其他知识的创造过程一样的. 在证明一个数学定理之前，你得猜测这个定理的内容，在你完全作出详细证明之前，你先得推测证明的思路."“只要数学的学习过程稍能反映出数学的发明过程的话，那么就应当让猜测，合情推理占有适当的位置.”这正说明不论对于数学上的发现与创新还是对于数学教育而言，数学的发现方法都具有十分重要的作用. 提出数学猜想的发现方法是多种多样的，常用的方法有：数学模型方法、观察法与实验法、归纳法与类比法、抽象法与概括法、一般化方法与特殊化方法等.

## §1.　数学模型方法

数学模型方法简称MM方法，它是处理数学问题的一种经典方法. 近年来，由于电子计算机的广泛应用和科学技术的数学化趋势，使得数学模型方法普遍应用于自然科学及社会科学的领域之中.

## 1.1 数学模型方法的含义

### 一、模型的含义

通过抽象、概括和一般化，把要研究的对象或问题转化为本质(关系或结构)同一的另一对象或问题．通常把被研究的对象或问题称为原型，而把转化后的相对定型的模拟化或理想化的对象或问题称为模型．对于某个研究对象，所建立的相应的模型，必须能反映原型的整体结构、关系或某一过程、某一局部、某一侧面的本质特征和变化规律．因此，模型是关于客观对象的整体认识．科学研究的完成标志是从理论上建立合适的模型．

模型分为物质模型和思想模型两种，而科学研究所要建立的是思想模型．

思想模型是现实原型的近似反映，现实原型是建立思想模型的客观基础．思想模型是通过对客观对象的结构、功能及有关因素规律性的研究而综合出的观念形态．它来源于现实模型，但又不同于现实原型．科学理论模型应排除原型中那些偶然的、非本质的、次要的因素，而只是对原型中那些必然的、本质的、主要的属性、关系及整体联系的综合认识．另外，一切科学理论模型都只是相对的，随着科学技术的发展，就会将新的理论模型去代替原有的理论模型．

由于研究方式的不同，模型的性质也不相同．因此，模型又分为很多类，而数学模型就是其中的一类．

## 二、数学模型

### 1．数学模型的含义

数学模型就是将某种事物的特征和数量关系借助形式化数学语言而建立起来的一种数学结构．换句话说，数学模型是关于部分现实世界和为一种特殊目的而作的一个抽象的、简化的数学结构．它不仅是在理想化的条件下，对现实原型近似的、简化的反映，而且常以抽象的数学关系式来揭示现实原型的各种特性以及它们之间的规律．

数学模型是将事物或运动过程，用数学概念、公式以及逻辑关系在数量上加以描述．随着对数学模型认识的扩大及深化，数学也得到了发展．例如：$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$是描述离散数量的数学模型：每一个代数方程式或公式都是一个数学模型．如$S=\pi R^2$是计算圆形物体面积的数学模型．

数学模型有广义和狭义两种解释．广义的解释是：一切数学概念、数学理论体系、各种数学公式、各种方程(代数方程、函数方程、差分方程、微分方程、积分方程、……)以及由公式系列构成的算法系统等都可称为数学模型．狭义的解释是：只有那些反映特定问题或特定的具体事物系统的数学关系结构，才称为数学模型．

### 2．数学模型的种类

数学模型是对特定对象系统中的数量关系的描述，而特定问题却是千差万别的，因此，数学模型也就各种各样．但若按它们现实原型的本质来划分，数学模型大致有以下几类：

(1) 确定性数学模型