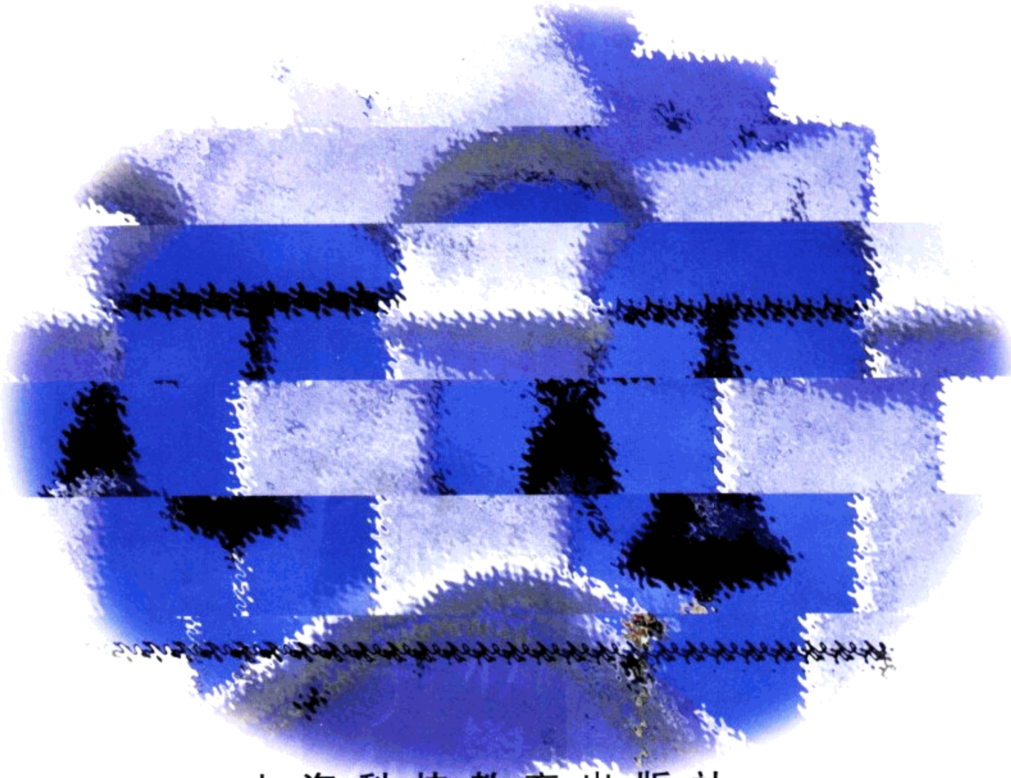
百讲百练

高中数学

高锐灵 编

BAIJIANGBAILIAN



上海科技教育出版社

前　言

高中阶段各学科的知识点繁多，如何在较短的时间内理清脉络，全面掌握教学大纲所规定的基本知识点，提高应试能力，成为教师和学生共同关心的一个问题。为此，我们组织编写了“高中百讲百练”丛书，共分语文、数学、英语、物理、化学5册。

本丛书根据全日制普通高级中学教学大纲，将知识点归纳成约百个单元，每个单元分为“讲”、“练”两部分。“讲”是由“知识点精讲”、“考核角度精讲”、“典型例题”、“注意点”等板块组成，其中“知识点精讲”是对某知识点作精要的讲解，“考核角度精讲”是根据历年高考试题对该知识点的考核角度作简要的总结、分析与预测，“典型例题”则是通过解析具有代表性的例题，帮助学生巩固该知识点内容，提高解题能力。此外，“注意点”还针对掌握该知识点时易忽视的地方、解题时易解错的地方和必需掌握的解题方法和技巧作了补充说明。“练”主要是根据知识点内容，以高考要求安排一系列习题，起巩固所学内容和检测知识掌握程度的作用。本丛书从点滴复习起，内容覆盖整个高中课程，不失为高三毕业班学生系统复习时的良师益友。

参加本丛书编写的都是具有丰富教学经验的教师。书中既有传统的经验总结，更多的是他们自身的教学体会。恳切希望广大师生提出意见，以便修订完善。

目　录

第1讲　集合的概念与运算

【知识点精讲】

1. 一组确定的对象的全体形成一个集合.集合中的元素具有确定性、无序性与互异性.集合可分为有限集与无限集.

2. 子集:对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$.
交集:$A\cap B=\{x\mid x\in A,\ 且x\in B\}$.
并集:$A\cup B=\{x\mid x\in A,\ 或x\in B\}$.
补集:已知全集 I,集合 $A\subseteq I$,由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做集合 A 在集合 I 中的补集,记作 $\overline{A}$.

3. 集合的表示法:列举法、描述法以及图示法.

4. 若集合 A 中含有 n 个元素,则 A 有 2^n 个子集,其中非空真子集有 2^n-2 个.

5. 可以验证:$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

【考核角度精讲】

1. 考查集合本身的知识:如确定集合中的元素;两个集合的并集、交集;简单集合的子集的个数等.

2. 利用集合的思想和表达方式参与代数、几何问题的解题过程,注重知识的联系、迁移.

【典型例题】

例1　设 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0\}$,$B=\{a\mid a$ 使集合A中只有一个元素$\}$,用列举法表示 B.

解　当 $a=0$ 时,$A=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$;当 $a\neq0$ 时,方程 $ax^2+2x+1=0$ 有相同实根的条件是 $\Delta=0$,即 $4-4a=0$. $\therefore a=1$,此时 $A=\{-1\}$. $\therefore B=\{0,1\}$.

说明　该题目中含有两个考查点:(1)对描述法表示的集合的理解;(2)解方程和分类讨论的思想.要求考虑问题周到、严密,否则会遗漏 $a=0$ 时的情况或未考虑集合元素之间的互异性.

例2　如果 $I=\{a,b,c,d,e\}$ 是全集,$M=\{a,c,d\}$,$N=\{b,d,e\}$,求 $\overline{M}\cap\overline{N}$.

解析　本题可以先直接求 $\overline{M}$、$\overline{N}$,再求其交集,但是容易看出 $M\cup N=I$,所以 $\overline{M\cup N}=\overline{M}\cap\overline{N}=\varnothing$.

例3　设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$,$M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$,$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$,求 $\overline{M\cup N}$.

解析　I 表示坐标平面中所有的点(的坐标),M 表示除去点$(2,3)$后的直线 $y=x+1$,N 表示除去直线 $y=x+1$ 的坐标平面,故 $M\cup N$ 表示除去点$(2,3)$的坐标平面上所有点的坐标.所以 $\overline{M\cup N}$ 仅含表示点$(2,3)$的坐标,所以 $\overline{M\cup N}=\{(2,3)\}$.

说明　由于直角坐标系中点与一组有序实数对的一一对应关系,故本题集合中的元素可以看作点的坐标.注意$(2,3)$与$\{(2,3)\}$的区别.

例4　若 $\{y\mid y=\lg(ax^2+2x+1)\}=\mathbf{R}$,求 a 及相应的 x 的取值范围.

解　1°当 $a=0$ 时,$y=\lg(2x+1)$.当 $x>-\dfrac{1}{2}$ 时,y 可取一切实数,此时 $\left\{y\left|y=\lg(2x+1),\ x>-\dfrac{1}{2}\right.\right\}=\mathbf{R}$.

2°当 $a\neq0$ 时,因 $y=\lg(ax^2+2x+1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$,故须 $a>0$ 且 $f(x)=ax^2+2x+1$ 的图象与 x 轴相交,即 $\Delta=4-4a\geqslant0$,$0<a\leqslant1$.由 $ax^2+2x+1>0$ 得

$x \in \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}, +\infty\right)$.

综上所述，当 $a = 0$ 时，$x \in \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$；当 $0 < a \leqslant 1$ 时，$x \in \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}, +\infty\right)$，$\{y \mid y=\lg(ax^2+2x+1)\}=\mathbf{R}$ 成立.

说明　$y=\lg x$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}^+$，值域为 $\mathbf{R}$.

【注意点】

1. 元素与集合的关系是属于和不属于关系，用符号 $\in$ 与 $\notin$ 来表示；集合与集合的关系是包含和不包含关系，用符号 $\subset$、$\subseteq$、$\not\subset$ 等表示.

2. 数 0 是一个元素，它只能属于或不属于某个集合；$\{0\}$ 是含有元素数 0 的集合；$\varnothing$ 是不含任何元素的集合.

3. 任何一个集合是它本身的子集. 空集是任何一个集合的子集，是任何一个非空集合的真子集.

第 1 练　集合的概念与运算

1. 已知 $A=\{(x, y) \mid (x-a)^2+y^2=16\}$，$B=\left\{(x, y) \,\middle|\, \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\right\}$，若 $A \cap B \neq \varnothing$，则实数 a 的取值范围为________.

2. 设全集 $I=\{1, 2, a^2\}$，$A=\{2, a+4\}$，$\overline{A}=\{9\}$，则实数 a 的值为______.

3. 设全集为 $\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x^2-4x-12>0\}$，$B=\{x \mid |x-3|<a\}$，且 $-3 \in B$，则 $A \cup B=$________.

4. 已知集合 $A=\{(x, y) \mid (x+2)^2+(y-3)^2 \leqslant 16\}$，$B=\{(x, y) \mid (x+1)^2+(y-t)^2 \leqslant 1\}$，若 $B \subset A$，则实数 t 的取值范围是________.

5. 集合 $A=\{y \mid y=a^x(a>0, a \neq 1, x \in \mathbf{R})\}$，$B=\{y \mid y=x^2+4x-1\}$，则 A、B 的关系是________.

6. 已知集合 $A=\{x \mid x^2+3x-40 \leqslant 0\}$，$B=\{x \mid t+1 \leqslant x \leqslant 2t-1\}$，若 $A \cap B=\varnothing$，则实数 t 的取值范围为(　　).

(A) $t>4$　　(B) $t<-\dfrac{7}{2}$

(C) $t>4$ 或 $t<2$

(D) $t>4$ 或 $t<-\dfrac{7}{2}$

7. 下列关系中正确的是(　　).

(A) $\{0\}=\varnothing$　　(B) $\varnothing \subset \{0\}$

(C) $0 \in \varnothing$　　(D) $\varnothing \in \{0\}$

8. 设集合 $A=\{x \mid 2<x<3\}$，$B=\{x \mid x \leqslant a\}$，若 $A \subset B$，则实数 a 的取值范围是(　　).

(A) $[3, +\infty)$　　(B) $(2, 3)$

(C) $[2, +\infty)$　　(D) $(2, +\infty)$

9. 设 $A=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant a\}$，$B=\{y \mid y=2x+3, x \in A\}$，$C=\{z \mid z=x^2, x \in A\}$，当 $C \subseteq B$ 时，求实数 a 的取值范围.

10. 设全集为 $\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x \mid f(x) \neq 0\}$，$N=\{x \mid g(x) \neq 0\}$，用描述法表示 $\overline{M} \cup \overline{N}$.

11. 设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S，其中由 3 个元素组成的子集数为 T，求 $\dfrac{T}{S}$ 的值.

12. 设 $A=\{(x, y) \mid y=x^2+3\}$，$B=\{(x, y) \mid y=2x+m, x \in [0, 1]\}$，若 $A \cap B \neq \varnothing$，求实数 m 的取值范围.

第2讲　函数与反函数的概念

【知识点精讲】

1. 函数的两个要点：一是自变量的取值范围是确定的，并使解析式与对应关系有意义；二是按照对应关系，对于自变量中的每一个确定的值，都有一个确定的、唯一的函数值与它对应.

2. 两个函数只有当它们的定义域、对应法则相同时，才能认为它们是相同的函数. 同一个对应法则可用不同的方式来表示.

3. 当函数值域 D 中每一个值 y_0 都能找出唯一的一个 x_0（$x_0 \in X$，X 为定义域）使 $f(x_0) = y_0$，这样的函数就具有反函数. 从函数图象看，将 $y = y_0(y_0 \in D)$ 的直线与 $y = f(x)$ 相交，总有一个唯一的交点.

4. 求 $y = f(x)$ 的反函数的步骤：(1)求出原函数的值域 D，作为反函数的定义域；(2)从 $y = f(x)$ 中解出 $x = f^{-1}(y)$；(3) x、y 互换，这是因为习惯上用 x 表示自变量，y 表示函数的缘故. 写出 $y = f^{-1}(x)$ 并表示出反函数的定义域.

【考核角度精讲】

1. 函数的概念和函数关系的建立，在应用性问题中尤为重要.

2. 求反函数及反函数与原函数在图象上的关系.

3. 结合函数的图象、解析式，讨论函数的性态.

【典型例题】

例 1　若函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(0, 1)$，则函数 $y = f(x+4)$ 的反函数的图象必经过点______.

解析　解题要点：①关于平移后的 $y = f(x+4)$ 的图象必过点 $(-4, 1)$；②由于函数与反函数的图象关于直线 $y = x$ 对称. 故 $y = f(x+4)$ 的反函数过点 $(1, -4)$.

例 2　给出函数

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & x \geqslant 4, \\ f(x+1), & x < 4, \end{cases}$$

求 $f(\log_2 3)$ 的值.

解析　这是一种“蓄势待发”的函数，只有当自变量 $x \geqslant 4$ 时，才有一个具体的数值，不然每一次的函数运算都会使自变量增加 1. 而 $\log_2 3 < \log_2 16 = 4$，$\therefore$ $f(\log_2 3) = f(\log_2 3 + 3) = f(\log_2 24) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 24} = \dfrac{1}{24}$. 本题的要点有两个：①经过几次函数运算自变量才会大于 4？②对数恒等式.

例 3　已知定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：(1) $f(-x) = f(x)$；

(2) $f(4-x) = f(x)$.

当 $x \in [0, 2]$ 时，$f(x) = -x^2 + 1$，则当 $x \in [-6, -4]$，求 $f(x)$ 的解析式.

解析　由已知可得 $f(x)$ 是周期为 4 的偶函数，当 $x \in [-6, -4]$ 时，$x + 4 \in [-2, 0]$，$\therefore f(x) = f(x+4) = f(-x-4) = -(-x-4)^2 + 1 = -x^2 - 8x - 16 + 1 = -x^2 - 8x - 15$.

【注意点】

1. 函数若是严格单调，则一定存在反函数.

2. 函数 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称. 即若点 $P(a, b)$ 在原函数的图象上，则以 (b, a) 为坐标的点一定在它们的反函数的图象上.

第 2 练　函数与反函数的概念

1. 已知函数 $f(x)=(x+a)^3$ 对于任意的 $t\in\mathbf{R}$，都有 $f(1-t)=-f(1+t)$ 成立，则 $f(-2)+f(2)=$ ______.
2. 已知函数 $f(x)=x^3+a$，且 $f(-1)=0$，则 $f^{-1}(1)=$ ______.
3. $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x+3)=-f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，则 $f(-15.5)=$ ______.
4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ $(a,\ b,\ c$ 是常数$)$ 的反函数是 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+5}{x-3}$，那么 $a=$ ____，$b=$ ____，$c=$ ____.
5. 在直角坐标系中，函数 $y=2^{|x|}(x\in\mathbf{R})$ 的图象(　　).
   (A) 关于原点对称
   (B) 关于 x 轴对称
   (C) 关于 y 轴对称
   (D) 关于直线 $y=x$ 对称
6. 函数 $y=\sqrt{x-1}+2\ (x\geqslant 1)$ 的反函数的图象是(　　).

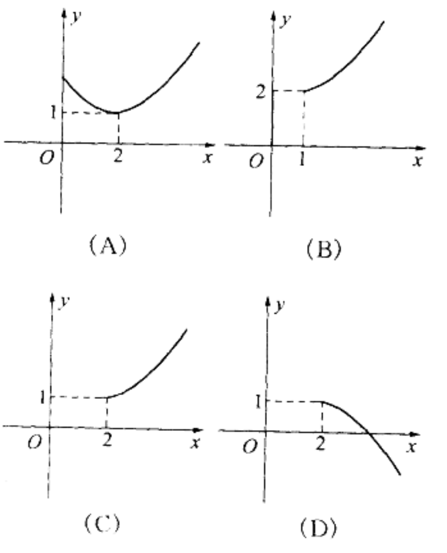


图 2-1

7. 函数 $y=2^{x-1}+3$ 的反函数的图象必过点(　　).
   (A) $(2,\ 5)$　　(B) $(1,\ 4)$
   (C) $(4,\ 1)$　　(D) $(3,\ 1)$
8. 函数 $y=(x+1)^2$ 在区间 $(-\infty,\ -1)$ 上的反函数是(　　).
   (A) $y=1+\sqrt{x}\ (x>0)$
   (B) $y=1+\sqrt{x}$
   (C) $y=-1-\sqrt{x}\ (x>0)$
   (D) $y=-1-\sqrt{x}$
9. 当 $0<k<1$ 时，求关于 x 的方程 $|1-x^2|=k(x+1)$ 的实根个数.

*10. 已知 x_1 是方程 $x+\lg x=3$ 的根，x_2 是方程 $x+10^x=3$ 的根，求 x_1+x_2 的值.

11. 已知 $f(x)$ 满足 $ax\cdot f(x)=b+f(x)$ $(ab\neq 0)$，$f(1)=2$，且 $f(x+2)=-f(2-x)$ 对定义域中任意 x 恒成立，求 $f(x)$ 的解析式.

第3讲　函数的定义域和值域

【知识点精讲】

1. 在函数 $y=f(x)$ 中，自变量 x 的取值范围 D 叫做函数的定义域，和 x 相对应的 y 的值的集合叫做函数的值域.

2. 确定函数的定义域时，需注意以下几点：

①分母不能为零；②偶次方根内的式子非负；③真数大于零，底数大于零且不等于1；④当指数为零时，幂底数不能为零；⑤正、余切，正、余割函数中对自变量的限制.

3. 求函数值域的常用方法：①利用函数的单调性；②二次函数的配方法；③反函数的定义域为原函数的值域；④利用基本不等式；⑤分式函数的常数分离法（求此类函数的值域要避免利用二次方程的判别式法）；⑥利用函数图象；⑦换元法.

【考核角度精讲】

1. 利用不同的数学知识：方程、不等式、等价变形、分类讨论等求定义域；利用几个函数定义域的交集求一个较复杂函数的定义域.

2. 求闭区间内二次函数的值域，这既是重点，又是难点. 区间的端点可以是变动的，图象的对称轴也可以是移动的. 此类题目应结合图象进行分类讨论求解.

3. 利用函数的定义域或值域求参数的取值范围.

【典型例题】

例1　若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 的值域为 $[a, b]$，则 $y=f(x+1)$ 的值域为______.

解析　当 $x\in\mathbf{R}$ 时，同样有 $x+1\in\mathbf{R}$，定义域相同，对应法则相同，则值域一定相同，亦为 $[a, b]$.

例2　已知函数 $y=\sqrt{kx^2-8x+k-6}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 k 的取值范围.

解析　显然 $k\neq0$，$kx^2-8x+k-6\geqslant0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的充要条件为

$$\begin{cases}k>0,\\ \Delta=(-8)^2-4k(k-6)\leqslant0,\end{cases}$$

解得　　$k\in[8, +\infty)$.

例3　已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}$，$x\in[1, +\infty)$. (1)当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的值域；(2)若对任意 $x\in[1, +\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

解析　(1)当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=x+\dfrac{1}{2x}+2$，$f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上为单调递增函数，$f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $f(1)=\dfrac{7}{2}$，故函数值域为 $\left[\dfrac{7}{2}, +\infty\right)$.

(2) 在 $[1, +\infty)$ 上，$f(x)>0$ 恒成立等价于 $x^2+2x+a>0$ 恒成立. 设 $y=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$，此函数在 $[1, +\infty)$ 上递增，$y_{\min}=3+a$，所以当且仅当 $3+a>0$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，故 $a>-3$.

本小题也可这样考虑：$a>-(x^2+2x)$，从 $y=-x^2-2x$，$x\in[1, +\infty)$，知 $y\leqslant-3$，故 $a>-3$.

【注意点】

1. 在给出一个函数的解析式时，要同时指明定义域，若未指明，那么就认为定义域就是自然定义域——使解析式有意义的实数 x 的集合.

2. 当函数图象具有某种对称性时，可以用来求定义域或值域. 如，求 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/x}$ 的

值域，此函数关于 y 轴对称，当 $x\geqslant 0$ 时 $y\in(0,1]$，故值域为 $(0,1]$.

第 3 练　函数的定义域和值域

1. 函数 $f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-16}}$ 的定义域是______.

2. 函数 $y=\dfrac{3}{\sin^2 x}+\sin^2 x\ (x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z})$ 的值域是______.

3. $y=x+\dfrac{1}{x}$, $x<0$ 的值域为______.

4. 设 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4\ (a,\ b\in\mathbf{R})$，若 $f\left(\lg\dfrac{1}{3}\right)=5$，则 $f(\lg 3)=$______.

5. 已知集合 $A=\{y\mid y=2^x,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=x^2,\ x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B$ 等于(　　).

(A) $\{2,4\}$

(B) $\{(2,4),(4,16)\}$

(C) $\{y\mid y\geqslant 0\}$

(D) $\{x\mid x>0\}$

6. 在函数① $y=1-x$；② $y=5x+1$；③ $y=x^2-5$；④ $y=\dfrac{3}{x}$ 中，定义域与其值域相同的函数有(　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个

(C) 3 个　　(D) 4 个

7. 函数 $f(x)=-2x^2+8x-1$, $x\in[0,3]$ 的值域是(　　).

(A) $[-1,5]$　　(B) $[-1,7]$

(C) $[5,7]$　　(D) $[0,7]$

*8. 已知 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$，$f(x)=x^2+px+q$ 和 $g(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$ 是定义在 A 上的函数，当 $x,\ x_0\in A$ 时，有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，$g(x)\geqslant g(x_0)$ 且 $f(x_0)=g(x_0)$，则 $f(x)$ 在 A 上的最大值是(　　).

(A) 8　　(B) 4

(C) 10　　(D) $\dfrac{17}{4}$

9. 已知 $A=\{x\mid x^2-mx+m^2-19=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x\mid \log_2(x^2+2x-7)=0\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求实数 m 的值.

10. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

(1) 画出 $f(x)$ 的图象；

(2) 求 $f(x)$ 的定义域和值域；

(3) 求 $f(a^2+1)$ 的值.

第4讲 函数的奇偶性

【知识点精讲】

1. 从图象看，讨论函数的奇偶性，必须与图象的对称性结合在一起. 首先，定义域必须关于原点对称；其次，偶函数的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于原点对称.

2. 从解析式看，当 $x_0 \in D$ 时，对于偶函数总有 $f(x_0) = f(-x_0)$，且点 $A(x_0, f(x_0))$ 与点 $B(-x_0, f(x_0))$ 关于 y 轴对称；对于奇函数，总有 $f(-x_0) = -f(x_0)$，且点 $M(x_0, f(x_0))$ 与点 $D(-x_0, -f(x_0))$ 关于原点对称.

3. 验证函数的奇偶性分两步：一是定义域关于原点对称；二是 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系是相等(即为偶函数)还是等于相反数(即为奇函数)，或两者都不成立(即为非奇非偶函数). 特别地，当奇函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义时，必有 $f(0)=0$.

【考核角度精讲】

1. 判断函数的奇偶性.

2. 对于奇(偶)函数给出某个区间的解析式，求出关于原点对称的区间上的解析式.

3. 与函数的周期性、单调性相结合讨论函数的性态.

【典型例题】

例1 判断 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 的奇偶性.

解析 显然定义域为 **R**，关于原点对称. 又 $f(x)$ 为对数函数，故利用对数的性质，由 $f(x)+f(-x)=\ln(1+x^2-x^2)=0$，得 $f(x)=-f(x)$，故 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 为奇函数.

例2 已知 $f(x)$ 是奇函数，当 $x \in (-1, 0)$ 时，$f(x)=\lg(1-x)$. 求当 $x \in (0, 1)$ 时，$f(x)$ 的解析式.

解析 设 $x \in (0, 1)$，则 $-x \in (-1, 0)$，则

$$f(-x)=\lg[1-(-x)]=\lg(1+x).$$

又 $f(-x)=-f(x)$，

$\therefore -f(x)=\lg(1+x)$，

故 $f(x)=\lg\dfrac{1}{1+x}$，$x \in (0, 1)$.

例3 已知函数 $f(x)$ 的周期为6，且等式 $f(3+x)=f(3-x)$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 成立，求证：$f(x)$ 是偶函数.

证明 令 $3+x=t$，则 $3-x=6-t$，$\therefore f(t)=f(6-t)$. 又 $f(x)$ 的周期为6，$\therefore f(6-t)=f(-t)$，$\therefore f(t)=f(-t)$，$\therefore f(t)$ 即 $f(x)$ 为偶函数.

例4 定义在 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意 $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ 都有 $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$，试讨论 $f(x)$ 的奇偶性.

解 令 $x_1=x_2=0$，$\therefore f(0)+f(0)=f(0)$，$\therefore f(0)=0$. 令 $x_2=-x_1$，则 $f(x_1)+f(-x_1)=f\left(\dfrac{x_1-x_1}{1-x_1^2}\right)=f(0)$.

$\therefore f(x_1)=-f(-x_1)$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是奇函数.

说明 (1)利用已知条件，灵活取自变量的值是一种有效的解题方法. (2)在 $f(x)$、$g(x)$ 的公共定义域中，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的奇偶性相同(或相反)，则 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$ 为偶(或奇)函数.

【注意点】

1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ 为偶函数的充要条件是 $b=0$.

2. 判断分段函数的奇偶性必须考察每一"段"上 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

第 4 练　函数的奇偶性

1. 指出下列函数的奇偶性:

(1) $y = \lg\frac{1-x}{1+x}$ 是______;

(2) $y = \frac{(1+2^x)^2}{2^x}$ 是______.

2. 若 $f(x)$ 为奇函数,则 $f(x) + f(-x) =$ ______;若 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(\sqrt{2}+1) - f\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right) =$ ______.

3. 若非零函数 $f(x)$、$g(x)$ 的奇偶性相同,则在其公共定义域内,$G(x) = f(x) \cdot g(x)$ 为______;若 $f(x)$、$g(x)$ 的奇偶性不同,则 $G(x) = f(x) \cdot g(x)$ 为______.

4. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且是周期为 2 的周期函数,当 $x \in [2, 3]$ 时,$f(x) = x$,则 $f\left(\frac{3}{2}\right) =$ ______.

5. 在下面给出的简图中,函数 $y = f(|x|)$ 的图象只可能是(　　).

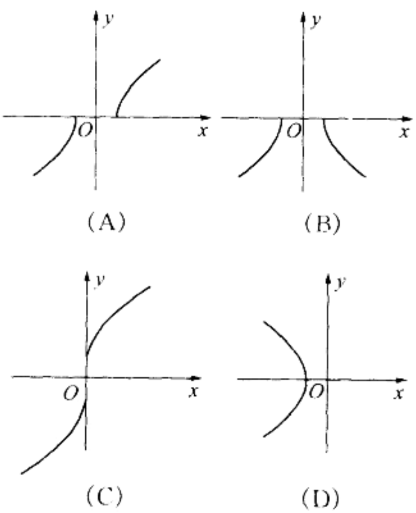


图 4-1

6. 已知 $f(x)$ 为偶函数,对于任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(2+x) = -2f(2-x)$,且 $f(-1) = 4$,则 $f(-3)$ 等于(　　).

(A) 2　　(B) -2

(C) 8　　(D) -8

7. 已知不恒为零的函数 $f(x)$ 对任意实数 x、y 满足 $f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)]$,则函数 $f(x)$(　　).

(A) 是偶函数不是奇函数

(B) 是奇函数不是偶函数

(C) 既是奇函数又是偶函数

(D) 既不是奇函数又不是偶函数

8. 已知 $f(x) = x\left(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2}\right)$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 证明: $f(x) > 0$.

9. 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的任意一个函数,求证: $f(x) + f(-x)$ 为偶函数,$f(x) - f(-x)$ 为奇函数.

第5讲　函数的单调性

【知识点精讲】

1. 从图象上看，单调性表示函数的一种在自变量的某范围内，当自变量变大时，因变量保持一致的变大(或变小)的趋势. 从解析式看，是表示在一个特定区域内，当 $x_1 < x_2$ 时 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 总有一个确定的相同的大小关系.

2. 用定义证明函数单调性的方法为：对任意 $x_1,\ x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时，$f(x_2) - f(x_1) > 0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在 D 上是增函数；反之，$f(x_2) - f(x_1) < 0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在 D 上是减函数.

3. 在研究形如 $y = x + \frac{a}{x}$ 的函数的单调性时需分两种情况讨论：(1)当 $a \leqslant 0$ 时，是单调增函数；(2)当 $a > 0$ 时，函数是奇函数. 当 $x > 0$ 时，在 $x \in (0,\ \sqrt{a}]$ 上是单调减，在 $x \in [\sqrt{a},\ +\infty)$ 上是单调增；由对称性，当 $x < 0$ 时，在 $x \in (-\infty,\ -\sqrt{a}]$ 上是单调增，在 $x \in [-\sqrt{a},\ 0)$ 上是单调减.

【考核角度精讲】

1. 根据函数的解析式或图象的大致情况判断或证明函数的单调性. 其中将 $f(x_2) - f(x_1)$ 的差变形为商与积的形式，再判断其正、负是证明的关键.

2. 利用函数的单调性讨论参数的取值情况.

【典型例题】

例1　讨论函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}\ (x \neq 0)$ 的单调性.

解析　$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) + a \cdot \frac{x_1 - x_2}{x_2 x_1} = \frac{(x_2 - x_1)}{x_2 x_1} \cdot (x_2 x_1 - a)$.

(1) 若 $a \leqslant 0$，如图5-1，当 $x_1 < x_2 < 0$ 或 $0 < x_1 < x_2$ 时都有 $f(x_2) - f(x_1) > 0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 与 $(0,\ +\infty)$ 这两个区域上分别都是增函数(但在整个定义域上并不单调，想一想为什么?).

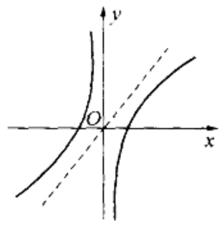


图5-1

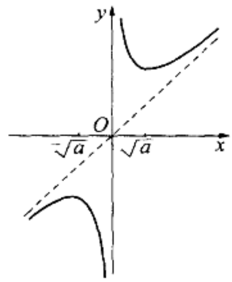


图5-2

(2) 若 $a > 0$，如图5-2，当 $-\sqrt{a} < x_1 < x_2 < 0$，或 $0 < x_1 < x_2 < \sqrt{a}$ 时，$x_2 x_1 - a < 0$，$f(x_2) - f(x_1) < 0$，$\therefore f(x)$ 分别在 $[-\sqrt{a},\ 0)$、$(0,\ \sqrt{a}]$ 上为减函数；当 $x_1 < x_2 < -\sqrt{a}$ 或 $\sqrt{a} < x_1 < x_2$ 时，$x_1 x_2 - a > 0$，$f(x_2) - f(x_1) > 0$，$\therefore f(x)$ 分别在 $(-\infty,\ -\sqrt{a}]$、$[\sqrt{a},\ +\infty)$ 上为增函数.

例2　已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 2]$ 内单调递减，若 $a = f(-1)$，$b = f(\log_2 4)$，$c = f(\log_2 3)$，试比较 $a,\ b,\ c$ 的大小.

解析　由题意可知，在 $[0,\ 2]$ 的范围内，函数值随自变量的增大而减小. 而 $a = f(-1) = f(1)$，$1 < \log_2 3 < \log_2 4$，$\therefore a > c > b$.

例3　已知 $f(x)$ 是定义在 $(-1,\ 1)$ 上的奇函数，在区间 $[0,\ 1)$ 上单调递减，且 $f(1-a) + f(1-a^2) < 0$，求实数 a 的取值范围.

解析　(1) 利用定义域限制 a 的范围：

$\begin{cases} -1 < 1-a < 1, \\ -1 < 1-a^2 < 1, \end{cases}$ 得 $a \in (0, \sqrt{2})$.

(2) 由奇函数关于原点对称知，$f(x)$在整个定义域单调递减.

$\therefore f(1-a) < -f(1-a^2)$
$= f(a^2-1)$.

$\therefore 1-a > a^2-1$. $\therefore a \in (-2, 1)$.

综合(1)、(2)，得 $a \in (0, 1)$.

【注意点】

1. 当在 x_0 处函数值出现最大值或最小值时，则 x_0 两边函数的单调性就可能会发生变化，如二次函数、三角函数.

2. 当函数在某一点无定义时(即 $x \neq x_0$)，则在它的两边函数单调性也可能会不同，如 $y=\frac{1}{x^2}$ 在 $x>0$ 与 $x<0$ 时单调性不同.

第5练　函数的单调性

1. 设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$，满足 $f(1-x)=f(1+x)$，则 $f(2^x)$ 与 $f(3^x)$ 的大小关系是______.

2. 已知 $f(x)$ 满足对任意 $x_1<x_2$ 有 $f(x_1)<f(x_2)$，且 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$. 写出一个满足上述条件的函数解析式______.

3. 设 $f(x)$ 对任意 x、y 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且 $f(2)=4$，则 $f(-1)=$______.

4. 若 $f(x)=\frac{ax+1}{x+2}$ 在区间 $(-2, +\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是(　　).

(A) $0<a<\frac{1}{2}$

(B) $a<-1$ 或 $a>1$

(C) $a>\frac{1}{2}$

(D) $a>-2$

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在 $x<0$ 时 $y=f(x)$ 是增函数，如果 $x_1<0$, $x_2>0$，且 $|x_1|<|x_2|$，则(　　).

(A) $f(x_1)>f(x_2)$

(B) $f(x_1)<f(x_2)$

(C) $f(x_1)+f(x_2)>0$

(D) $f(x_1)+f(x_2)<0$

6. 已知 $f(x)$ 的反函数是 $g(x)$，则下列命题成立的是(　　).

(A) 若 $f(x)$ 为奇函数且单调增，则 $g(x)$ 也同样

(B) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $x+y=0$ 对称

(C) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$g(x)$ 也是偶函数

(D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象与直线 $y=x$ 一定相交于一点

7. 在下列各组函数中，$f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数的是(　　).

(A) $f(x)=x^2$, $g(x)=\log_3 x$

(B) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$

(C) $f(x)=(x-1)^3$, $g(x)=3^x$

(D) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\log_4 x$

8. 已知 $y=\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-ax+5)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上是减函数，求实数 a 的取值范围.

9. 已知 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1$，若 $f(x)=ax^2-2x+1$ 在 $[1, 3]$ 上的最大值为 $M(a)$，最小值为 $N(a)$，$g(a)=M(a)-N(a)$.

(1) 求 $g(a)$ 的函数表示式；

(2) 判断 $g(a)$ 的单调性，并求出 $g(a)$ 的最小值.

第6讲　函数的图象

【知识点精讲】

1. 函数 $y=f(x)$ 的图象与下列函数图象的关系：

(1) $y=f(-x)$：关于 y 轴对称；(2) $y=-f(x)$：关于 x 轴对称；(3) $y=f(|x|)$：将 $x>0$ 时的 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，得出 $x<0$ 时的 $y=f(|x|)$ 的图象；(4) $y=|f(x)|$：把 $y=f(x)$ 的在 x 轴下方的图象对称到 x 轴上方；(5) $y=f(kx)\ (k>0)$：可将 $y=f(x)$ 的图形沿 x 轴压缩到 $\frac{1}{k}$，若 $k<0$，则先关于 y 轴对称再压缩；(6) $y=kf(x)$：将 $y=f(x)$ 上点横坐标保持不变，纵坐标乘以 k（这是图象的纵向拉伸或压缩）.

2. 函数图象的平移. (1)将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 a 个单位($a>0$)得到 $y=f(x+a)$ 的图象；向右平移 a 个单位($a>0$)得到 $y=f(x-a)$ 的图象. (2)将 $y=f(x)$ 的图象向上平移 a 个单位($a>0$)得到 $y=f(x)+a$ 的图象，向下平移 a 个单位($a>0$)得到 $y=f(x)-a$ 的图象.

【考核角度精讲】

1. 利用基本的初等函数作函数草图，研究函数性质.

2. 利用函数图象研究交点个数、根的个数，推出函数的解析式.

【典型例题】

例1　已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(a+x)=f(a-x)$，求证：$f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

证明　设 $P(x_0,\ y_0)$ 是 $y=f(x)$ 图象上的任一点，则 $y_0=f(x_0)$. 又 P 关于直线 $x=a$ 的对称点为 $P'(2a-x_0,\ y_0)$，由已知 $f(a+x)=f(a-x)$，得 $f(2a-x_0)=f(a+a-x_0)=f[a-(a-x_0)]=f(x_0)=y_0$，即点 $P'(2a-x_0,\ y_0)$ 也在 $y=f(x)$ 的图象上. ∴ $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

例2　将 $y=-1-2^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，得到图象 C_1，将 C_1 的图象关于原点对称得到 C_2，将 C_2 的图象沿 x 轴向左平移一个单位得到 C_3，求 C_3 所对应的函数解析式.

解析　$y=-1-2^x \longrightarrow x=-1-2^y \longrightarrow y=\log_2(-1-x) \longrightarrow -y=\log_2(x-1) \longrightarrow -y=\log_2 x \longrightarrow y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

例3　若直线 $y=x+c$ 与函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的图象有两个不同的交点，求 c 的取值范围.

解析　如图6-1，当直线介于两条边界位置之间时（不取切线），与函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的图象有两个不同的交点，此时，$c\in[1,\sqrt{2})$.

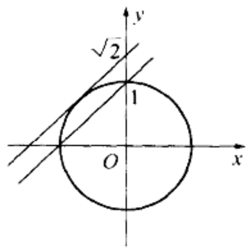


图6-1

例4　已知关于 x 的方程 $x^2-2x+\lg(3a-2a^2)=0$ 没有负实数根，求实数 a 的取值范围.

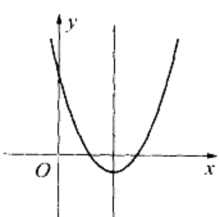


图6-2

解析　设$y=x^2-2x+\lg(3a-2a^2)$，当a取某个定值时，其图形为抛物线，如图6-2，顶点在直线$x=1$上，$y=(x-1)^2+\lg(3a-2a^2)-1$. 因当图象与y轴的交点的纵坐标$\lg(3a-2a^2)\geqslant 0$时，原方程无负实数根，而此时$3a-2a^2\geqslant 1$，故$a\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

【注意点】

利用函数图象可确定相应的方程解的个数.

第6练　函数的图象

1. 对于函数$f(x)=2^x-2^{-x}$，有下列四个结论，(1)$f(x)$的图象关于原点对称；(2)$f(x)$在**R**上是增函数；(3)$f^{-1}(2)=\log_2 3$；(4)$f(|x|)$有最小值0，其中正确结论的序号是________.

2. 已知$y=f(x)$存在反函数$y=f^{-1}(x)$，若把$y=f(x)$的图象在直角坐标平面内绕原点顺时针转动90°，则得到的图象的函数解析式是________.

3. 将$f(x)=\lg(1-x)$的图象沿x轴向左平移一个单位，再关于y轴对称所得图象的函数解析式是______.

4. $y=\log_2(x+1)$的图象与$y=f(x)$的图象关于直线$x=1$对称，则$f(x)$的表达式是________.

5. 设$f(x)$是以4为周期的偶函数（$x\in$**R**），已知$x\in[0,2]$时，$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，以下成立的是(　　).

(A) $f(3)<f\left(\frac{7}{2}\right)<f\left(\frac{5}{2}\right)$

(B) $f(3)<f\left(\frac{5}{2}\right)<f\left(\frac{7}{2}\right)$

(C) $f\left(\frac{5}{2}\right)<f(3)<f\left(\frac{7}{2}\right)$

(D) $f\left(\frac{7}{2}\right)<f(3)<f\left(\frac{5}{2}\right)$

6. 已知$f(x)=\dfrac{x-1}{a}$ $(a>0,\ a\neq 1)$，在同一坐标系下，$y=f^{-1}(x)$与$y=a^{|x-1|}$的图象只可能是(　　).

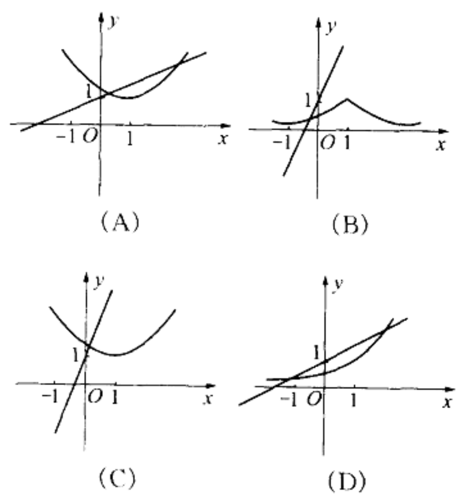


图6-3

7. 已知$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 1,\\ \log_{\frac{1}{2}}x, & x>1,\end{cases}$试作出$y=f(x)$的草图.

8. 已知$f(x)=10^x$，求作$y=|f^{-1}(x-1)|$的草图.

9. 已知$f(x)=\log_a(a^x-1)$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

(1) 证明：函数$f(x)$的图象在y轴的一侧；

(2) 设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ $(x_1<x_2)$是$f(x)$图象上的两点，证明：直线AB的斜率大于0.