一种妙不可言的趣味学习法
让数学成为你的快乐！

快乐学数学

小学6年级

哈哈，太棒了！
我也可以成为解题高手！

海南出版社

快乐学数学

小学 6 年级

主编 / 唐国庆
编写 / 欧阳维诚

海南出版社

图书在版编目(CIP)数据
快乐学数学.六年级/唐国庆主编.
—海口：海南出版社，2001.8
ISBN 7-5443-0111-7
Ⅰ.快… Ⅱ.唐… Ⅲ.数学课-小学-教学参考资料 Ⅳ.G624.503
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 040389 号

快乐学数学（小学六年级）
主　　编　唐国庆
编　　写　欧阳维诚
责任编辑　洪　声
海南出版社　出版发行
地址　海口市金盘区建设三横路 2 号
邮编　570216
电话　0898-66812775
E-mail hshshs@public.cs.hn.cn
经销　湖南省新华书店经销
印刷　湖南长沙国防科技大学印刷厂印刷
出版日期　2001 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
开本　850×1168 毫米　1/32
印张　7
书号　ISBN 7-5443-0111-7/G·51
定价　9.80 元

出 版 说 明

有一个大家常用的比喻：教会学生学习要让他们跳起来摘下葡萄。需要跳一跳才能摘到，是要发挥学生学习的积极性、主动性原则；跳起后一定能摘到，则是要学生通过自己的努力，获得学习的成功和成功后的喜悦。不仅在教学中应该这样做，在教辅读物的编写、课外作业的安排也应该这样做。

小学教辅读物的编写，应该遵循这一原则，避免两种不良倾向。一个是应试化。书中充满大量的，在同一水平上不断重复的练习题，就像把一盘一盘味道并不太好的葡萄强行喂给学生，使他们大倒味口。一个是成人化。不顾学生实际，把一些过于高难的内容“下放”到少儿读物中，就像把小学生带到高大的果树下，硬要他们跳起来摘下果实，这只能使他们劳而无功，望梅止渴，甚至“摔伤身体”。

为了帮助小学生学好数学，真正达到提高文化科学素质的目的，我们编辑出版这一套《快乐学数学丛书》，力图贯彻帮助学生跳起来摘到葡萄的思想。这套丛书中选用的例题和习题，紧扣教材，既不是教材中例题与习

题的补充与重复，也不是超前内容的简单下放。我们注意到，在九年义务教育小学数学教科书中，每一册里都有一些用方框框出的问题，这些问题比起书中的其它练习题显得灵活新颖，不拘一格，富有启发性。需要学生多动一点脑筋，灵活运用所学知识，但它又不超出教材的范围，掌握了教材内容的学生应该是能够解答这些问题的。本书所选的例题与习题就保持在这一水平上。

这套丛书应该能起到以下三个方面的作用：

（一）基础训练的作用 本书选题精当，虽然数量较少，但以质量取胜。通过本书的阅读和练习，可以加深学生对教材的理解和知识的融会贯通。

（二）趣味数学的作用 本书特别强调例题与习题的趣味性，本书选编了许多趣味性强而又有训练价值的问题，使学生从小就认识数学绚丽多彩、和蔼可亲的鲜活面容，培养学习数学的兴趣。

（三）奥赛教材的作用 本书特别重视与数学竞赛有关的一些思想和方法，在不脱离教材，不加重负担的原则下，尽量把奥赛的一些思想、方法贯穿到例题与习题的解答中。使学生轻松愉快，循序渐进地接受数学竞赛的培训。

由于编者水平有限，加以成书仓促，许多地方还来不及仔细推敲，希望能得到方家的指教。

目　　录

第十一册

第十二册

第十一册

分数乘法

例1 设 A、B 是两个正整数,已知$\frac{1}{8}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$,求 $A+B$.

分析 分数有一个重要的性质:两个分母是相邻正整数的单位分数,它们之差是以这两个连续整数的乘积为分母的单位分数,即

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

例如:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{2\times3}=\frac{1}{2\times3};$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{3\times4}=\frac{1}{3\times4};$$

……

等等.有了这个性质,这一类问题就好做了.

解 $\frac{1}{8}-\frac{1}{9}=\frac{1}{8\times9}=\frac{1}{72}$,

所以 $\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}.$

所以，$A=9$，$B=72$，$A+B=81$ 就是本题的一个答案．但是它不是唯一的答案．

我们还可以把$\frac{1}{8}$的分子、分母扩大相同的倍数，再拆成两个分数之和．

$\frac{1}{8}=\frac{1\times 3}{8\times 3}=\frac{3}{24}=\frac{2+1}{24}=\frac{2}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$，那么 $A=12$，$B=24$，$A+B=36$．

$\frac{1}{8}=\frac{1\times 5}{8\times 5}=\frac{5}{40}=\frac{4+1}{40}=\frac{4}{40}+\frac{1}{40}=\frac{1}{10}+\frac{1}{40}$，那么 $A=10$，$B=40$，$A+B=50$．

$$\frac{1}{8}=\frac{1\times 2}{8\times 2}=\frac{2}{8\times 2}=\frac{1+1}{8\times 2}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}.$$

那么 $A=16$，$B=16$，$A+B=32$．

完全类似地，第一个答案也可这样求得：

$\frac{1}{8}=\frac{1\times 9}{8\times 9}=\frac{9}{8\times 9}=\frac{9\times 1}{8\times 9}=\frac{8}{8\times 9}+\frac{1}{8\times 9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}$，所以 $A=9$，$B=72$，$A+B=81$．

答案只有以上 4 种，容易看出，分母的约数有 1，2，4，8 四个，每次用 8 的一个约数加 1 去乘分子和分母，就可把$\frac{1}{8}$分为两个单位数字的和．所以本题有四组答案．

例 2 计算

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{99\times 100}+\frac{1}{100\times 1}.$$

分析 如果按照通常的分数加法，先通分再求和，势必非常麻烦．但是这个算式中的每一项是单位分数，且分母都是两个连续整数之和．根据上一题的公式，我们有

$$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

利用这一性质,可以大大地简化运算.

解 原式 $=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{99}-\frac{1}{100})+\frac{1}{100}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}+\frac{1}{100}$

$=1.$

注:在这道算式中,可以把 100 换成任何一个数,如换成 2000,8341,结果都一样,答案都是 1.

例 3 在 6 个括号里填上不同的正整数,使等式成立:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}.$$

分析 如果要求一次就把 6 个数填上去,跨度太大,比较困难.但是,我们在前两道题目中,已经掌握了 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ 这一个公式,可以不断地采用"一分为二"的办法,把一个单位分数分成两个单位分数之和,然后继续这一过程,步步为营,最终必可达到目的.

解 $\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{6\times7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}.$

$\frac{1}{7}=\frac{1}{8}+\frac{1}{7\times8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{56}.$

$\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{8\times9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}.$

$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{9\times10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{90}.$

$\frac{1}{10}=\frac{1}{11}+\frac{1}{10\times11}=\frac{1}{11}+\frac{1}{110}.$

所以，

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{11}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}.$$

如果利用熟知的等式 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$，我们也可以用另外一种方法来求解：

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}.$$

$$\frac{1}{7}=\frac{1}{7}\times 1=\frac{1}{7}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\frac{1}{42}.$$

$$\frac{1}{42}=\frac{1}{42}\times 1=\frac{1}{42}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{84}+\frac{1}{126}+\frac{1}{252}.$$

所以 $$\frac{1}{6}=\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\frac{1}{42}+\frac{1}{84}+\frac{1}{126}+\frac{1}{252}.$$

还可以这样来做：

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}&=\frac{1}{6}\times 1=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\\&=\frac{1}{13}+\frac{1}{12\times 13}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19\times 20}+\frac{1}{37}+\frac{1}{37\times 38}\\&=\frac{1}{13}+\frac{1}{19}+\frac{1}{37}+\frac{1}{156}+\frac{1}{380}+\frac{1}{1406}.\end{aligned}$$

总之，本题的答案是多种多样的.

例 4 计算：

$$\frac{1\times 2\times 3+2\times 4\times 6+\cdots+100\times 200\times 300}{2\times 3\times 4+4\times 6\times 8+\cdots+200\times 300\times 400}.$$

分析 仔细观察分子分母的结构，可以发现，分子的每一个加项都是三个数的连乘积，而且三个因数分别是第一项三个因数的

相同倍数.对分母也有类似的特点.因此,可把分子、分母的第一项作为公因式提出,就使分子、分母中出现相同的因数而约掉.

解 分子的各项依次是

$1\times2\times3=(1\times2\times3)\times1,$

$2\times4\times6=2\times1\times2\times2\times2\times3=(1\times2\times3)\times(2\times2\times2)$
$=(1\times2\times3)\times8,$

$3\times6\times9=3\times1\times3\times2\times3\times3=(1\times2\times3)\times(3\times3\times3)$
$=(1\times2\times3)\times27$

……

$100\times200\times300=100\times1\times100\times2\times100\times3$
$=(1\times2\times3)\times(100\times100\times100)$
$=(1\times2\times3)\times(1000000)$

所以,原式分子$=(1\times2\times3)(1+8+27+\cdots+1000000)$

完全类似的,分母的各加项为:

$2\times3\times4=(2\times3\times4)\times1$

$4\times6\times8=2\times2\times2\times3\times2\times4=(2\times3\times4)\times(2\times2\times2)$
$=(2\times3\times4)\times8$

$6\times9\times12=3\times2\times3\times3\times3\times4=(2\times3\times4)\times(3\times3\times3)$
$=(2\times3\times4)\times27$

……

$200\times300\times400=100\times2\times100\times3\times4\times100$
$=(2\times3\times4)\times(100\times100\times100)$
$=(2\times3\times4)\times1000000.$

所以,分母$=(2\times3\times4)(1+8+27+\cdots+1000000)$

$$原式=\frac{(1\times2\times3)\times(1+8+27+\cdots+1000000)}{(2\times3\times4)\times(1+8+27+\cdots+1000000)}$$
$$=\frac{1\times2\times3}{2\times3\times4}=\frac{1}{4}.$$

例 5 计算:

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+10}.$$

分析 分母是一切连续自然数的和,根据高斯"倒转相加"的求和方法:

$$1+2=\frac{2\times(2+1)}{2}=\frac{2\times3}{2},$$

$$1+2+3=\frac{3\times(3+1)}{2}=\frac{3\times4}{2},$$

……

$$1+2+\cdots+10=\frac{10\times(10+1)}{2}=\frac{10\times11}{2}.$$

所以,本题可以通过分数的适当变形后再用拆项相加的办法求和.

解 原式 $=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{10\times11}$

$$=2\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{10\times11}\right)$$

$$=2\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$

$$=2\times\left(1-\frac{1}{11}\right)$$

$$=1\frac{9}{11}.$$

例 6 在方框内填上适当的整数,使不等号成立.

$$\frac{7}{5}<\frac{17}{\square}<\frac{10}{7}.$$

分析 先考虑左边的不等号，$\frac{7}{5}<\frac{17}{\square}$，那么$\frac{17}{\square}-\frac{7}{5}=\frac{85-7\times\square}{5\times\square}>0$.

因为$7\times12=84<85, 7\times13=91>85$.所以，方括号内填的数不能大于12.再用同样办法考虑右边的不等号.

解 因为$\frac{7}{5}<\frac{17}{\square}$，所以

$$\frac{17}{\square}-\frac{7}{5}=\frac{5\times17-7\times\square}{5\times\square}=\frac{85-7\times\square}{5\times\square}>0.$$

因此，$7\times\square<85$.

因$7\times12=84<85, 7\times13=91>85$.所以，$\square$中的数不能大于12.

又因为$\frac{17}{\square}<\frac{10}{7}$，所以

$$\frac{10}{7}-\frac{17}{\square}=\frac{10\times\square-17\times7}{7\times\square}=\frac{10\times\square-119}{7\times\square}>0.$$

因此，$10\times\square>119$.

但$10\times12=120>119, 10\times11=110<119$.所以，$\square$中的数不能小于12.

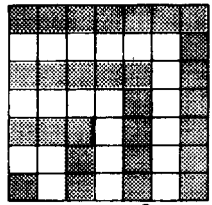
$\square$中填的数既不能大于12，又不能小于12.所以，只能填12.

例7 在下面的数列中

$$\frac{1}{1},\frac{1+2}{1+3},\frac{1+2+3}{1+3+5},\frac{1+2+3+4}{1+3+5+7},\cdots.$$

它的第 2000 项是多少?

分析 2000 项是一个分数,分子是前 2000 个整数之和,它等于



1+3+5+7+9+…

$$1+2+3+\cdots+2000$$
$$=\frac{2000\times(2000+1)}{2}.$$

分母是前 2000 个奇数的和,它等于 $2000^2=2000\times2000$.

关于分母的结果可以从右边这个图形看出.

解 它的第 2000 项是这样一个分数,它的分子是前 2000 个自然数的和:

$$1+2+\cdots+2000,$$

分母是前 2000 个奇数之和:

$$1+3+\cdots+3999.$$

所以第 2000 项 a_{2000} 是

$$a_{2000}=\frac{1+2+\cdots+2000}{1+3+\cdots+3999}=\frac{\frac{1}{2}(2000)\times(2000+1)}{2000\times2000}$$
$$=\frac{2001}{4000}.$$

例 8 设 A、B、C、D 是前 50 个自然数中不同的数,求使分数的乘积

$$\frac{A+B}{A-B}\times\frac{C+D}{C-D}$$

的最大可能值.

分析 要一个分式的值大,应该使它的分母的值尽可能地小.分子的值则尽可能的大.因为 A、B、C、D 是前 50 个自然数中

不同的数,所以 $A-B$ 的最小值只能为1,即 A、B 应取相邻的自然数,同理 C 与 D 也是相邻的自然数,而 $A+B$ 的最大值应是 A、B 取尽可能大的值,但 A 的最大值只能是50.

解 取 $A=50, B=49, C=48, D=47$,则

$$\begin{aligned}\frac{A+B}{A-B}\times\frac{C+D}{C-D}&=\frac{50+49}{50-49}\times\frac{48+47}{48-47}\\&=99\times95\\&=9045.\end{aligned}$$

有最大值.

例9 用1,3,5三个数字组成两个带分数(每个带分数都要用到这三个数字),使下面的等式成立:

$$\square\frac{\square}{\square}\times\frac{3}{10}=\square\frac{\square}{\square}.$$

分析 因为每个带分数必须由1,3,5三个数字组成,只能组成三个不同的带分数,即

$$1\frac{3}{5},\ 3\frac{1}{5},\ 5\frac{1}{3}.$$

又因为 $\frac{3}{10}$ 是真分数,它与一个带分数的乘积必然要小于原来的带分数,所以,上式中左边的带分数必须填较大的带分数 $3\frac{1}{5}$ 或 $5\frac{1}{3}$ 中的某一个.这样就会出现三种不同的填法,经过检验,可以找出正确的填法.

另一方面,由于 $\frac{3}{10}<\frac{1}{2}$,所以作为被乘数的带分数应该比积的两倍还大,由此可见被乘数只能填 $5\frac{1}{3}$,检验其是否合于等式就可

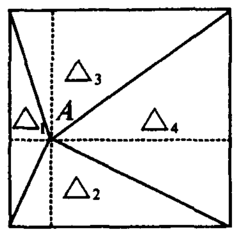
以了.

解 填法如下:

$$\boxed{5}\frac{1}{\boxed{3}}\times\frac{3}{10}=\boxed{1}\frac{\boxed{3}}{\boxed{5}}.$$

因为 $5\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{16}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$.所以,填法是正确的.

例 10 在边长为 10cm 的正方形里找一点 A,使这点与正方形各边的两个顶点组成的四个三角形面积之比为 1:2:3:4.怎样找到这个点 A 呢?



分析 假设 A 点已经找到,并且 A 点与正方形各边的两个顶点所组成的三角形为 $\triangle_1$,$\triangle_2$,$\triangle_3$,$\triangle_4$.因为它们的面积之和为 $10\times10=100(\text{cm}^2)$,所以.

$$\triangle_1 \text{ 的面积}=100\times\frac{1}{1+2+3+4}=10(\text{cm}^2),$$

$$\triangle_2 \text{ 的面积}=100\times\frac{2}{1+2+3+4}=20(\text{cm}^2),$$

$$\triangle_3 \text{ 的面积}=100\times\frac{3}{1+2+3+4}=30(\text{cm}^2),$$

$$\triangle_4 \text{ 的面积}=100\times\frac{4}{1+2+3+4}=40(\text{cm}^2).$$

因为四个三角形的底边都是 10cm,所以,$\triangle_1$,$\triangle_2$,$\triangle_3$,$\triangle_4$ 的底边上的高分别为 2cm,4cm,6cm 和 8cm.

由此可知,$\triangle_1$ 与 $\triangle_4$ 的高线分正方形的边长为 4:6,$\triangle_2$ 与 $\triangle_3$ 的高线分正方形为 2:8,两条分线的交点 A 即为所求的点.

解 如图所示,在正方形内作两条分别平行于正方形两组对