

工程塑性力学选讲

刘信声 徐秉业

清华大学出版社

内 容 简 介

本书简要地介绍了塑性力学的物理关系，着重介绍了塑性力学在工程结构设计和金属塑性成型加工工艺设计方面应用的几个专门问题，其中包括：弹塑性分析、塑性极限分析、安定分析、滑移线法、能量法、塑性拉伸失稳、塑性成型中的实验方法、塑性动力学等。

本书力求用简单的文字和数学公式准确地阐述有关内容，并尽量使每一个专题保持其完整性，以供读者选学。

本书可供土木、水利、机械、化工设备、力学等专业的大学生和研究生作为自学参考书，也可供有关工程技术人员作为科普性读物。

工程塑性力学选讲

刘信声 徐秉业

*

清华大学出版社出版

北京 清华园

北京广益印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/32 印张：7% 字数：177千字

1986年5月第一版 1986年5月第一次印刷

印数：00001~9000

统一书号：15235·211 定价：1.60元

前 言

近二十年来,塑性力学的发展是迅速的,在许多工程领域中都获得了重要应用。使用塑性力学的分析方法,可以准确地估计工程结构和机械零件的承载能力,从而正确地估价它们的安全裕度,并充分发挥材料的潜力。还可以利用材料具有塑性性能的特点,在理论分析的基础上研究金属塑性成型的工艺问题。此外,按照塑性力学的概念还可以更合理地分析金属材料和其他结构材料在静载和动载作用下的各种特性。工程实际问题的出现,不断向现代塑性力学提出了许多需要研究和解决的课题。塑性力学在工程实际中的应用以及它的重要科学意义,已经引起了国内外工程技术人员和科研人员的广泛重视。

塑性力学中的物理关系是非线性的,这为分析问题带来了许多数学上的困难。如果对物理关系进行合理的简化,则可以获得许多对工程实际有重要价值的结果。目前塑性力学已在结构塑性极限分析和金属塑性成型方面获得了许多成功的应用。

作者于1982—1984年期间曾在《机械强度》杂志上连续发表了题为《塑性力学及其在工程中的应用》的讲座。在《讲座》的基础上,作者根据教学实践,将已发表的各讲作了进一步的整理和充实,并增写了和工程实际有密切联系的结构安定分析、塑性拉伸失稳和极限应变、板材压延的薄膜理论、用实验方法确定应力和应变等讲。为了便于读者了解有关张量的概念和表示方法,还增写了关于下标表示法、求和约定和张量的内容作为附录。

在撰写这本《选讲》时,作者力求将内容写得浅显易懂,并

使公式的推导简明清晰。为了便于读者选学有关内容，在编写各讲时，力求将内容写得完整一些。作者期望这本书能够对于从事结构和金属加工工艺设计的工程技术人员以及在工科院校学习的大学生和研究生有所启发和帮助。

由于作者水平所限，书稿虽经反复修订，但错误和不妥之处仍恐难免，诚恳地欢迎读者批评指正。

刘信声、徐秉业于清华大学

一九八五年二月

目 录

第一讲 塑性力学和它的物理关系	1
一、材料力学、弹性力学与塑性力学.....	1
二、变形体模型.....	3
三、材料塑性性能在工程中的某些应用.....	6
四、屈服条件.....	8
五、塑性本构方程.....	12
参考文献.....	17
第二讲 理想弹塑性问题的解法及某些应用	18
一、厚壁圆筒的弹塑性分析.....	18
二、组合厚壁圆筒的分析.....	24
三、厚壁圆筒的残余应力及其自增强作用.....	29
四、等厚度旋转圆盘的弹塑性分析.....	31
五、圆轴的弹塑性扭转.....	36
参考文献.....	39
第三讲 薄板的塑性极限分析	40
一、塑性极限定理和极限分析方法.....	40
二、圆板的基本方程.....	43
三、圆板的极限分析.....	47
四、环板的极限分析.....	53
五、多边形板的极限分析.....	56
参考文献.....	59
第四讲 薄壳的塑性极限分析	60
一、基本假设及旋转轴对称壳体的内力功率	

和外力功率·····	60
二、旋转轴对称夹层壳的极限条件·····	61
三、夹层球壳的极限分析·····	67
四、夹层圆柱壳的极限分析·····	73
五、讨论·····	81
参考文献·····	82
第五讲 结构的安定分析 ·····	83
一、变值加载下结构的破坏型式及安定状态·····	83
二、厚壁圆筒在循环内压作用下的安定分析·····	84
三、安定定理·····	87
四、塑性应变率满足流动法则时机动安定定理的表 达式·····	92
五、承受恒定内压与循环温度共同作用时厚壁圆筒 的安定分析·····	94
六、幂强化材料旋转圆盘的安定分析·····	98
参考文献·····	105
第六讲 滑移线法的原理及应用 ·····	107
一、塑性平面应变问题的特点·····	107
二、滑移线场和汉基应力方程·····	113
三、滑移线场的边界条件·····	119
四、利用滑移线场理论求解极限载荷·····	121
参考文献·····	125
第七讲 能量法及简化分析法在金属塑性成型中的 应用 ·····	126
一、能量法的一般原理·····	126
二、用能量法求解平面应变状态下的自由锻造 问题·····	129

三、用能量法求解平面应变状态下的拉拔问题·····	131
四、简化分析法的基本方程·····	136
五、用简化分析法求解平面应变状态下的墩粗 问题·····	136
六、用简化分析法求解轴对称的拉拔问题·····	140
七、两种方法的比较·····	145
参考文献·····	146
第八讲 板料压延的薄膜理论 ·····	148
一、基本假设和平衡方程·····	148
二、采用屈雷斯卡屈服条件求内力 p_θ 和 p_r ·····	150
三、采用密赛斯屈服条件求内力 p_θ 和 p_r ·····	154
四、薄膜理论的应用举例·····	157
五、关于应变的分析·····	161
参考文献·····	164
第九讲 塑性拉伸失稳和极限应变 ·····	165
一、拉伸失稳现象的描述和失稳准则·····	165
二、薄壁球壳的受拉失稳·····	168
三、局部应变的一般准则和单向拉伸时局部变形的 类型·····	170
四、薄柱壳的拉伸过程·····	175
五、关于极限应变问题·····	178
六、局部应变的影响因素·····	181
参考文献·····	187
第十讲 用实验方法确定应力和应变 ·····	188
一、基本原理·····	188
二、无旋转分量的定常速度场·····	190
三、主方向保持不变的速度场·····	193

四、具有旋转分量的定常位移速度场·····	195
五、应力的确定·····	198
参考文献·····	199
第十一讲 考虑应变率效应的塑性动力学 ·····	200
一、材料的动力特性及其数学表达式·····	200
二、在复杂应力状态下的本构方程·····	205
三、受冲击载荷作用的厚壁球壳·····	210
四、塑性动力学的其他问题·····	216
参考文献·····	218
附录：下标记号法、求和约定与张量 ·····	219
一、下标记号法·····	219
二、求和约定·····	220
三、 δ 符号·····	222
四、标量、向量与张量·····	224

第一讲 塑性力学和它 的物理关系

由韧性性能比较好的材料所制成的结构或机器部件，当外载荷从零开始增加，直至结构或部件失去承载能力，该构件材料的变形状态经历过弹性、塑性及强化阶段。在不同的变形状态下，构件的受力分析具有明显的差别。为了分析韧性材料的构件在变形各个阶段时的应力、应变分布规律，仅仅利用弹性分析是不够的，还必须考虑到材料的塑性性能，即对结构进行塑性分析。通过塑性分析才能做到充分利用材料，并能合理地确定结构承载的安全系数。

一、材料力学、弹性力学与塑性力学

当作用在物体上的外力取消后，物体的变形不完全恢复，即在变形中产生了一部分永久变形，将这部分不可恢复的变形称为塑性变形。研究塑性变形和作用力之间的关系以及出现塑性变形后物体内部应力、应变分布规律的学科称为塑性力学。

塑性力学在工程实践中具有广阔的应用前景。构件的材料达到塑性阶段时，它并不一定丧失承载能力，还可以继续工作。因此，可将构件设计成一部分达到塑性状态，而另一部分仍保持为弹性状态，即使构件处于弹塑性状态。这种设计既能节省材料，又能可靠地确定构件的安全系数。金属成型理论，例如板料的冲压及其他加工工序的分析等，这些工程实际问题都是塑性力学中的重要课题，将这些工艺过程提高到理论阶段，从而进一步地指导工程实践，对生产技术的发展将具有重要的作用。

相对于弹性力学来说，塑性力学是一门年轻的学科。

在力学发展的进程中，刚体力学在研究自然界的力学规律中发挥了很大的作用，但是，应用于结构分析中，它却具有一定的局限性，例如利用理论力学的知识可以求出具有两个支撑简支梁[图 1-1 (a)]的支反力，但是求不出具有三个支撑的超静定梁[图 1-1 (b)]的支反力。为了求出这类梁的支反力，需要利用变形体力学的概念。同样，刚体力学也不能解决有关永久变形的问题。工程实际问题提出了发展变形体力学的需要。1678 年英国学者虎克 (R.Hooke) 公布了他的科研成果。他注意到，在弹性体中，当取消外力后物体恢复到初始状态；他还发现，作用在物体上的外力愈大，物体的变形也愈大，即物体的变形与外力成正比，这个规律即为著名的虎克定律。对于多数材料，当变形不大时，虎克定律是正确的。

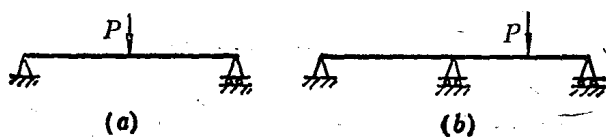


图 1-1

以虎克定律为基础，法国学者纳维叶 (L.Navier)、柯西 (A.L.Cauchy)、泊桑 (S.D.Poisson) 对于确立和发展弹性力学作出了重要的贡献。

在弹性力学中，假设材料是理想弹性的，而且变形足够小，从而找出许多问题的数学上严密的准确解。但是，在求解弹性力学问题时遇到了许多数学上的困难。在弹性力学发展之前，为了解决大量的工程实际问题，材料力学这一学科得到了发展。在材料力学中，还采用了一些简化计算的假设，因此对于大量

的变形体力学问题，根据材料力学方法的分析都能给出相应的解答，其结果是简单的，并能满足工程上的要求。材料力学和弹性力学是按两种不同方法发展起来的，由于采用一些简化，按材料力学方法所能解决的问题比按弹性力学方法所能解决的问题要多一些。随着科学技术的发展，特别是计算机的广泛应用，弹性力学所能解决的问题也愈来愈多。

二、变形体模型

在弹性力学中，用虎克定律来描述材料的物理关系，即采用了线弹性的变形体模型。为了分析结构的承载能力，仅考虑结构的弹性阶段是不够的，还必须研究材料在塑性阶段的力学性质和变形的规律。

从材料力学中广泛使用的软钢拉伸曲线上（图 1-2）可以

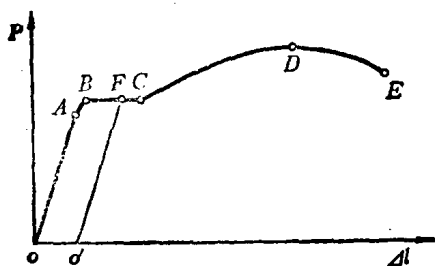


图 1-2

看出，线段 oA 表示弹性阶段，而点 A 所对应的应力称为材料的比例极限。在 oA 阶段，伸长 Δl 与拉力 P 成正比，在这一阶段内使用虎克定律是正确的。当外力超过 B 点后，尽管外力增长很慢，但是材料的伸长却增加得很快。 B 点是塑性流动的开始，所对应的应力称为屈服极限。由 C 点开始，只有当外力 P 增加时，变形才能继续增加，将该点称为材料开始强化的点。在 D 点，载荷 P 达到最大值，将这一点所对应的应

力称为强度极限。由 D 点开始，载荷 P 下降，材料很快达到破坏。

如果在拉伸过程中卸载，例如在 F 点，则拉力与伸长的关系为 Fo' 线所确定，这是由实验得出的结论。由此可见，材料出现塑性变形后并不影响它的弹性性质。当力 P 卸为零时，则得到残余变形 oo' 。由于 Fo' 平行于 Ao ，点 F 处的变形由弹性伸长与塑性伸长两部分组成，以应变表示时则可写成

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (1-1)$$

式中 ϵ^e 为弹性应变； ϵ^p 为塑性应变。

由上述材料所制成的结构，在进行其内力分析、承载能力分析、反复加载和卸载的分析时，都必须考虑材料塑性变形的行为。出现塑性变形后应力与应变之间的关系是非线性的，为了得到结构出现塑性变形后的应力和应变分布规律，必须建立理想化的模型，即变形体模型。常用的变形体模型有：

1. 理想弹塑性模型

如图 1-3 (a) 所示，在这种模型中，不考虑材料的强化阶段。适用于应变不太大的结构分析中。

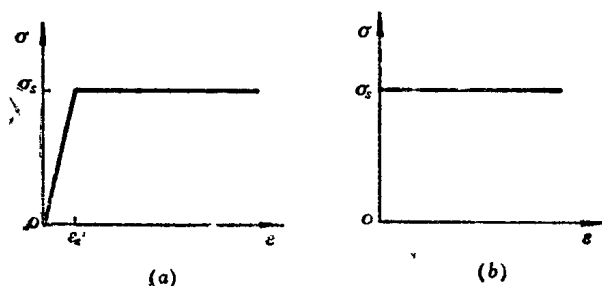


图 1-3

2. 理想刚塑性模型

如图 1-3 (b) 所示。在弹性变形相对于塑性变形较小时，可忽略弹性变形。

3. 弹性线性强化模型

如图 1-4 (a) 所示，考虑了材料的强化效应，并假设材

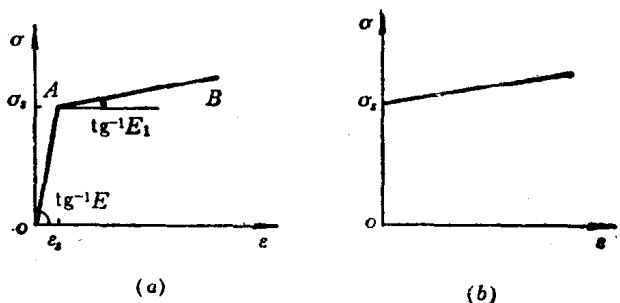


图 1-4

料强化服从于线性强化的规律。应力与应变关系的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E \varepsilon && \text{当 } \varepsilon \leq \varepsilon_s \text{ 时} \\ \sigma &= \sigma_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s) && \text{当 } \varepsilon > \varepsilon_s \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式中 E 及 E_1 为线段 OA 及 AB 的斜率。

4. 刚性线性强化模型

如图 1-4 (b) 所示。

5. 幂强化模型

为避免线性强化模型表达式在 ε_s 处的不连续，采用图 1-5 所示的模型是比较方便的，该模型的表达式为

$$\sigma = A \varepsilon^m \quad (1-3)$$

式中 m 为强化指数，且为介于 0 与 1 之间的正数。当 $m=0$ 时，代表刚塑性模型；当 $m=1$ 时，则代表理想弹性体模型，

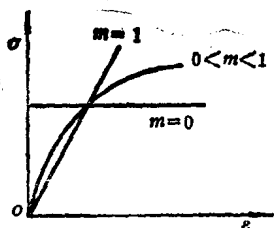


图 1-5

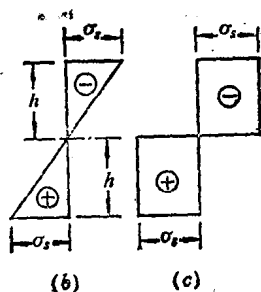
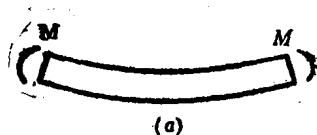


图 1-6

此时取 $A = E$ ，则可得到虎克定律的表达式。

变形体模型的选择，要根据所使用的材料以及研究的范围来确定。

三、材料塑性性能在工程中的某些应用

在设计中，若考虑材料的塑性性能，则结构的承载能力将比只按弹性计算要大。例如由理想弹塑性材料所制成的纯弯梁〔图 1-6 (a)〕，其截面为 $b \times 2h$ ，当截面中最大应力达到屈服极限 σ_s 时〔图 1-6 (b)〕，所对应的弹性极限弯矩为

$$M_e = \frac{2}{3} b h^2 \sigma_s$$

当截面中所有应力都达到 σ_s 时〔图 1-6 (c)〕，所对应的塑性极限弯矩为

$$M_p = b h^2 \sigma_s$$

由此得

$$\frac{M_p}{M_e} = 1.5$$

即，塑性极限弯矩比弹性极限弯矩大 50%。由此可知，考虑材料的塑性性能可以充分发挥材料的潜力，从而提高结构的承载能力。

对于矩形截面的悬臂梁，在自由端受集中力 P 的作用，其挠度为 f [图 1-7 (a)]。 $P \sim f$ 曲线如图 1-7 (b) 所示。当 $P \leq P_A$ 时为弹性阶段，且 $P_A = M_e/l$ ，即在固支端处截面上

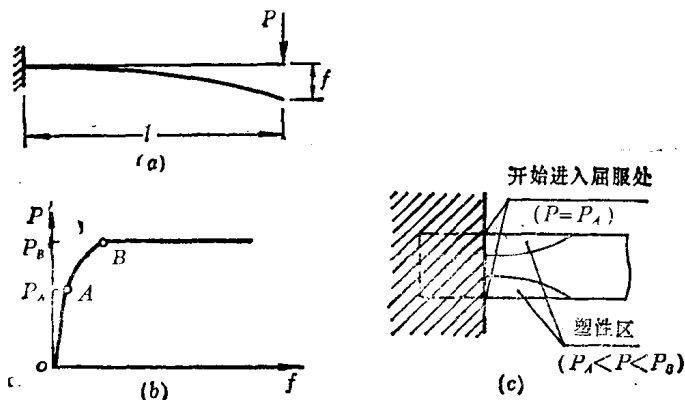


图 1-7

的最大应力达到 σ_s ；当 $P_A < P < P_B$ 时为弹塑性阶段，即在固支端附近出现部分塑性区 [图 1-7 (c)]，在塑性区内的应力为 σ_s ；当 $P = P_B$ 时，在固支端处截面的应力全部达到 σ_s ，即该截面的弯矩为塑性极限弯矩 M_p ，相当于该截面处形成“塑性铰”，而悬臂梁将变成一个机构，因此失去承载能力。将 P_B 称为该梁的极限载荷，且 $P_B = M_p/l$ 。

在按弹性分析的设计中，往往将载荷限制在不出现任何塑

性变形的某一临界值之内，例如使 $P < P_A$ 。这种设计不能充分利用材料，由此所确定的安全系数是指离开出现塑性变形的裕度，然而，结构出现塑性变形并不意味着失去承载能力，因此这种安全系数不反映结构离失去承载能力的安全裕度。在按塑性分析的设计中，结构中允许出现塑性变形区域，而其载荷小于极限载荷，由此所确定的安全系数才真正具有安全裕度的意义。

由以上分析可知，塑性力学所描述的物理本质比弹性力学更为一般和广泛，它能够更加准确地描述客观实际，并解决了弹性力学所不能解决的某些问题。

在金属的塑性成型中，例如拉拔、镦粗、挤压、薄板和薄壳的压延等，都可以按照塑性力学的分析方法求出这些过程所需要的力，这些数据对于合理设计工艺和选取工卡具都是非常重要的。

利用材料产生塑性变形后具有强化的性质，可以提高材料的屈服极限，这是在弹性设计中尽量扩大材料的弹性工作范围的一种方法。

塑性变形有时是有害的，例如对于预应力结构，如果产生了塑性变形，则预应力将相应减小，在这种情况下应避免塑性变形的产生。

四、屈服条件

在塑性力学中，必须知道材料受力达到什么程度时才开始产生塑性变形。对于轴向拉伸，当应力达到 σ_s 时便开始出现塑性变形；对于纯剪的情况，当剪应力达到 k 时便出现塑性变形，换句话说， k 为剪切屈服极限。在复杂应力状态下，材料由弹性状态向塑性状态转变时，应力之间所满足的条件称为屈服条件。

但是，在目前还没有确定屈服条件的理论上的方法，屈服条件是经验的规范，即屈服条件是根据实验提出并被实验所证实的。常用的两种屈服条件是虎勃 (M.T.Huber) - 密赛斯 (R.Mises) 屈服条件与屈雷斯卡 (H.Tresca) 屈服条件。

1. 虎勃-密赛斯屈服条件。

早在 1904 年由虎勃提出这个条件，他认为当弹性歪形能达到临界值时金属的屈服开始发生。他的想法以波兰文发表，遗憾的是没有引起普遍的注意。密赛斯于 1913 年独立地提出类似的想法。因此，将这种条件称为虎勃-密赛斯屈服条件，在某些文献中则称为密赛斯屈服条件。

虎勃-密赛斯屈服条件的数学表达式为

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6 k^2 \quad (1-4)$$

如果在问题中主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 的方向是事先知道的，则该问题的考虑是很方便的。但是，在许多情况下主方向是未知的并且是需要确定的，此时，式 (1-4) 成为

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 6 k^2 \quad (1-5)$$

若取应力强度 (或称为等效应力) 为

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (1-6)$$

则式 (1-4) 或式 (1-5) 可表示成

$$\sigma_i = \sqrt{3} k \quad (1-7)$$

将上式所示屈服条件用于单向拉伸实验中，即假设仅仅有主应力 σ_1 ，其屈服点的值为 σ_s ，由此可得

$$k = \sqrt{\frac{\sigma_s}{3}} \quad (1-8)$$