工科数学基础教程

中册

刘九兰 杨则燊 曾绍标

天津大学出版社

工科数学基础教程

中册

刘九兰　杨则燊　曾绍标

天津大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

工科数学基础教程．中册/刘九兰，杨则燊，曾绍标编著．—天津：天津大学出版社，2000.1
ISBN 7-5618-1256-6

Ⅰ．工…　Ⅱ．①刘…②杨…③曾…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 53537 号

出　版　天津大学出版社
出版人　杨风和
地　址　天津市卫津路 92 号天津大学内（邮编：300072）
电　话　发行部：022－27403647　邮购部：022－27402742
印　刷　天津大学印刷厂
发　行　新华书店天津发行所
开　本　850mm×1168mm　1/32
印　张　13.25
字　数　355 千
版　次　2000 年 1 月第 1 版
印　次　2000 年 1 月第 1 次
印　数　1—3 000
定　价　19.00 元

前　　言

本书是在调查了解高等学校工科各专业对数学知识的需求以及对当前数学教学内容及方法的意见，并分析工科数学改革的趋势，同时认真研究国内外教材改革经验与体会的基础上编写的．本书对工科数学的教学内容与体系的改革进行了初步的探索，并力求探讨进而解决工科数学教学改革中的三大矛盾，即经典内容与近代知识、数学学科本身体系与其它专业对数学需求以及内容众多而学时有限的矛盾．在这方面我们提出了一些思路和方法，其目标是使工科基础数学教材能够适应培养面向21世纪建设人才的需要．

本书作为天津大学教学改革的“九五”重点教材立项，我们在编写过程中特别注意把握以下几点：

1．把高等数学与线性代数两部分内容有机结合起来，并用现代数学观点和思想统一处理工科数学中的一些问题(例如函数与变换，单元函数与多元函数的极限、连续与微分概念，实变量的实值函数与复值函数的导数与积分等)．

2．本书包括工科数学中的高等数学、线性代数、矢量分析与场论的全部内容，复变函数的某些基本内容，数值计算需用的方法原理以及最优化方法中线性规划的基本解法．鉴于各专业所需知识多而学时又有限，故将微积分、解析几何、线性代数、微分方程、场论、复变函数等有关内容通盘考虑，打破数学各分支界限，用现代数学观点组织各部分内容，避免重复，减少学时．

3．力求把数学理论与专业知识有机结合起来．本书注意加强实践环节，在引入新概念与定义前，尽可能通过实例加以说明．在不少章节，用生产和专业实例说明数学知识的具体应用，提高学生

的学习兴趣，并加强经济管理方面的应用.

4. 本书在内容的深度和广度方面既适应于工科各专业对数学的需求，也适用于理科和管理学科对数学的需求，考虑到不同专业的不同需要，有些章节打“ * ”号，供各专业作为选讲选学内容.

本书共 19 章，分上、中、下三册. 上册包括第 0,1～4 章，中册包括 5～11 章，下册包括第 12～18 章. 第 0,3,4,13,14,18 章由杨则燊执笔，第 5,6,7,8,9,10,11,17 章由刘九兰执笔，第 1,2,12,15,16 章由曾绍标执笔.

讲授本书全部内容大约需用 250 学时，也可根据专业需要选讲其中部分内容.

本书由齐植兰教授、蔡高厅教授负责主审，他们对原稿进行了详细审阅，并提出了许多修改意见. 蔡高厅教授作为“九五”重点教材立项负责人，还参与了本书体系与结构的设计. 本书作为国家工科数学教学基地（清华大学）的资助项目，得到了基地负责人和清华大学数学系领导的指导与帮助. 天津大学教务处、出版社、数学系和有关学院的领导，对于本书的编写和出版给予了热情的鼓励和支持. 在此一并表示衷心的感谢.

工科数学教学内容和体系的改革是一个迫切而又艰难的课题，我们的探索和尝试仅仅是初步的. 由于我们的水平和经验所限，本书难免有许多不妥之处，恳请同行专家和热心读者批评指正.

编者

1999.6.

中册目录

第5章　行　列　式

行列式是一种重要的数学工具，它具有许多特殊的性质和便于记忆的形式，所以在科学技术中有着广泛的应用.

本章首先从解二元和三元线性方程组入手，引出二阶和三阶行列式概念及其计算方法，然后着重介绍 n 阶行列式的定义、性质及计算，最后介绍 n 阶行列式在求解 n 元线性方程组中的应用.

第1节　二阶和三阶行列式

行列式是一种特定的算式，是根据线性方程组的求解的需要而引进的. 首先介绍二阶和三阶行列式.

设由两个方程式组成的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

用加减消元法来解这个方程组. 以 a_{22}乘第1个方程，a_{12}乘第2个方程，然后两式相减，便消去了 y，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

用同样的方法，可以消去 x，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，那么可以得到

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\[2ex] y = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

把这一组 x,y 的值代入方程组(1),可以验证它确实是原方程组的解,而且方程组(1)有且只有这一组解.

这样,就可以用公式(2)来解二元线性方程组(1),为了便于记忆这个公式,我们引进二阶行列式的概念.记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

我们规定 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为一个二阶行列式,它代表一个数值,这个数值为两项的代数和.其中一项是主对角线(左上角与右下角的连线)上两个元素的乘积,并添上正号;另一项是副对角线(右上角与左下角的连线)上两个元素的乘积,并添上负号.我们称这种规定为对角线法.

按照上面的规定,那么公式(2)中 x,y 的分子也可用二阶行列式表示,记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

我们称 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为方程组(1)的系数行列式,于是上面的结论就可以叙述为:二元线性方程组(1)当它的系数行列式 $D\neq0$ 时有唯一解,且这个解可以用如下公式表示

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_1}{D}, \\ y=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

例 5.1.1 计算下列二阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} -3 & 21 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ x-1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} -3 & 21 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 6-(-1)\cdot 21=-18+21=3$;

(2) $\begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ x-1 & 1 \end{vmatrix} = x^2-(x-1)(x-1)=2x-1$.

例 5.1.2 解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 3x+7y=6. \end{cases}$$

解 这个方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=14-9=5\neq 0,$$

所以这个方程组有唯一解，又因为

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}=49-18=31,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=12-21=-9.$$

于是得到解

$$\begin{cases} x=\dfrac{31}{5}=6\dfrac{1}{5}, \\ y=\dfrac{-9}{5}=-1\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

下面讨论三元线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{3}$$

仍然使用加减消元法解这个方程组，首先消去 x_2,x_3 得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-$$

$a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-$

$b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3,$ (4)

用同样方法消去 x_1,x_3 得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-$$

$a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_2=a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-$

$a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}.$ (5)

消去 x_1,x_2 得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-$$

$a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_3=a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{33}+b_1a_{21}a_{32}-$

$a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}.$ (6)

因此,如果当

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-$$

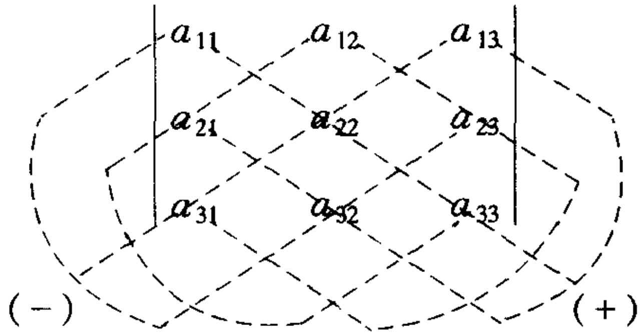
$$a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时,即可解出 x_1,x_2,x_3.为了简单地表出这个方程组的解,我们引进三阶行列式的概念.

规定三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

可见,一个三阶行列式 D 是一个数值,这个数值是 3! 项的代数和;每一项上都是 3 个元素的乘积,且这个元素取之于三阶行列式 D 的不同行不同列上,这些项前面正负号各占一半,而且正负号可由下图规律给出.



凡是实线上的三个元素乘积所得的项前面取正号,虚线上的三个元素乘积所得的项前面取负号.我们称此法为对角线法.

例 5.1.3 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 利用对角线计算

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= 1\times3\times(-1)+2\times5\times7+3\times2\times1 \\ &\quad -3\times3\times7-2\times2\times(-1)-1\times5\times1 \\ &= -3+70+6-63+4-5=9.\end{aligned}$$

根据三阶行列式定义,可以把消元后所得到的式子(4),(5),(6)中的数用三阶行列式表示:

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32} \\ &\quad -b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3. \end{aligned}$$

同样地,可看出其中

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$Dx_1=D_1, \tag{4}$$

$$Dx_2=D_2, \tag{5}$$

$$Dx_3=D_3, \tag{6}$$

于是得到三元线性方程组解的公式.

如果方程组(3)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么方程组(3)有唯一解,且

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}, \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}. \end{cases}$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 是用常数项 b_1,b_2,b_3 代替系数行列式 D 中的第 j 列元素后所得到的行列式.

例 5.1.4　解下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-4, \\ 2x_1+x_2-3x_3=7, \\ -x_1+x_2-x_3=2. \end{cases}$$

解　因为这个方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0,$$

因此该方程组有唯一解,又因为其中

$$D_1=\begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=5,$$

所以得到

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=1, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=2, \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1. \end{cases}$$

从上面例子看出,应用二、三阶行列式来解系数行列式不等于零的二元、三元线性方程组是十分方便的. 为了把这个结论推广到未知量更多的线性方程组,我们需要把二、三阶行列式的概念推广,引出 n 阶行列式的定义.

习题 5-1

1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ -7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & -2 \\ 15 & 12 & -3 \\ 25 & 32 & 7 \end{vmatrix}$；　　　(4) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 12 & 24 & 36 \\ -5 & -4 & -3 \end{vmatrix}$.

2. 解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases} 4x - y - 2z = 4, \\ 2x + y - 4z = 8, \\ x + 2y + z = 1; \end{cases}$　　　(2) $\begin{cases} x - y + z = a, \\ x + y - z = b, \\ -x + y + z = c. \end{cases}$

3. 证明 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 是通过两个定点 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ 的直线.

第 2 节　n 阶行列式

上一节已经介绍了二阶和三阶行列式及其计算. 在许多问题中,需要用到更高阶的行列式. 为了定义 n 阶行列式,下面我们先介绍排列与逆序数.

5.2.1　排列与逆序数

定义 5.2.1　由 1,2,…n 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列. 记为 $i_1 i_2 \cdots i_n$.

例如,由 1,2,3 可以组成的三阶排列有 123,132,213,231,312,321. 共有 3! 个. 显然,n 阶排列共有 n! 个.

按数字由小到大的自然顺序的排列 $123\cdots n$ 称为 n 阶标准排列. 在其它的 n 阶排列中,都可以找到一个大数排在一个小数的前面,这样的排列顺序是与自然顺序相反的,我们称它为逆序.

定义 5.2.2　在一个 n 阶排列中,如果一个大数排在一个小数之前,就称这两个数构成一个逆序. 在 n 阶排列 $i_1 i_2 \cdots i_k \cdots i_n$

中，在 前面且比它大的数的个数称为 i_k 的逆序数. 在 n 阶排列 $i_1 i_2 \cdots$ 中所有数的逆序数之和称为该排列的逆序数，记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例如 $\tau(4231)=3+1+1+0=5$,

$\tau(32154)=2+1+0+1+0=4$,

显然 $\tau(123\cdots n)=0$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列为偶排列. 标准排列算作偶排列.

定义 5.2.3 在一个 n 阶排列中，将其中某两个数位置对调，其余数不动，得到另一个 n 阶排列，这个过程称为对换. 若对调的是相邻的两个数，则称为相邻对换，否则称为不相邻对换.

5.2.2 排列的性质

性质 1 对换排列(Ⅰ)中的任意两个数得到排列(Ⅱ)，则排列(Ⅰ)与(Ⅱ)奇偶性相反.

证明 先证相邻对换的情况.

$(\mathrm{I})a_1 a_2 \cdots a_e a b b_1 b_2 \cdots b_m \xrightarrow{(a,b)} (\mathrm{II})\, a_1 a_2 \cdots a_e b a b_1 b_2 \cdots b_m$，设在排列(Ⅰ)中 $a_1, a_2 \cdots a_e, b_1, b_2 \cdots b_m$ 的逆序数和为 Δ,

a 的逆序数为 t,

b 的逆序数为 q,

则 $\tau(\mathrm{I})=\Delta+t+q$.

下面求 $\tau(\mathrm{II})$. 在排列(Ⅱ)中，$a_1, a_2, \cdots, a_e, b_1, b_2, \cdots, b_m$ 的逆序数和仍为 Δ.

当 $a<b$ 时，a 的逆序数为 $t+1$,

b 的逆序数仍为 q,

则 $\tau(\mathrm{II})=\Delta+(t+1)+q=\tau(\mathrm{I})+1$.

当 $a>b$ 时，a 的逆序数为 t,

b 的逆序数却为 $q-1$，

则　$\tau(\mathrm{II})=\Delta+t+(q-1)=\tau(\mathrm{I})-1$.

总之　$\tau(\mathrm{II})=\tau(\mathrm{I})\pm 1$. 故　排列(Ⅰ)与(Ⅱ)的奇偶性相反

注意　由以上实际上已证明：

$$若(\mathrm{I})\xrightarrow{t\text{ 次相邻对换}}(\mathrm{II})$$

则　当 t 为奇数时，(Ⅰ)与(Ⅱ)奇偶性相反；

当 t 为偶数时，(Ⅰ)与(Ⅱ)奇偶性相同.

再证不相邻对换的情况.

$(\mathrm{I})a_1a_2\cdots a_eab_1b_2\cdots b_sbc_1c_2\cdots c_m \xrightarrow{(a,b)}(\mathrm{II})a_1a_2\cdots a_ebb_1b_2\cdots$
$b_sac_1c_2\cdots c_m$.

以上过程可以看作是经过若干次相邻对换完成的：

$(\mathrm{I})\xrightarrow{(a,b_1)}\cdots\xrightarrow{(a,b_2)}\cdots\longrightarrow\cdots\xrightarrow{(a,b_s)}a_1a_2\cdots a_eb_1b$
$b_sabc_1c_2\cdots c_m\xrightarrow{(a,b)}a_1a_2\cdots a_eb_1b_2\cdots b_sbac_1c_2\cdots$
$\xrightarrow{(b_s,b)}\cdots\xrightarrow{(b_{s-1},b)}\cdots\longrightarrow\cdots\xrightarrow{(b_1,b)}(\mathrm{II})\ a_1a_2\cdots$
$a_ebb_1b_2\cdots b_sac_1c_2\cdots c_m$,

可见　$(\mathrm{I})\xrightarrow{(2s+1)\text{次相邻对换}}(\mathrm{II})$，

故　排列(Ⅰ)与(Ⅱ)奇偶性相反.

性质 2　任一个 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n \xrightleftharpoons{t\text{ 次对换}} 123\cdots n$，且数 t 的奇偶性与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的奇偶性相同.

(证明留给读者自己完成)

性质 3　在 $n!$ 个 n 阶排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明　设其中奇排列有 p 个，偶排列有 q 个，则 $p+q=n!$，