会计师资格考试高等数学复习指南

张秀岩　主编

中国林业出版社

（京）新登字 033 号

图书在版编目(CIP)数据

会计师资格考试高等数学复习指南/张秀岩主编．一北京·中国林业出版社，1995．6
ISBN 7-5038-1473-x

Ⅰ．会…　Ⅱ．张…　Ⅲ．高等数学-会计-考核-自学参考资料 Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 07177 号

中国林业出版社出版
（100009　北京西城区刘海胡同 7 号）
香河胶印厂印刷　新华书店北京发行所发行
1995 年 6 月第 1 版　　1995 年 6 月第 1 次印刷
开本：787mm×1092mm　1/16　印张：13.25
字数：339 千字　　　印数：1—3000 册
定价：13.00 元

主　编　张秀岩
编写者　任子中　王成伟　李秀玲　张秀岩　章栋恩

前　言

随着经济的发展，具有全面知识的高水平的会计师越来越成为各行各业迫切需要的人材。为此，国家实行了对会计师的专业技术资格统一考试的规定，数学作为工具，渗透在各科内容中，而且起着日益重要的作用；特别是会计师的乙种考试中，近年增加了对高等数学单独的考试，而很多学习财经会计专业的人员，对涉及到的高等数学的问题感到比较困难，也缺乏必要的指导和训练，本书就是在这种形势下，主要为满足会计师应试人员在最短的时间内，最大限度地掌握必要的数学知识，为应试扫清数学障碍而编写的。

参加编写本书的人员，都有多年从事财经、管理、会计等专业的高等数学教学经验，在编写过程中，严格按照《经济数学基础》的教学大纲，以及《会计师考试应试指南》、财政部组织撰写的教材，并分析了命题特点，研究了考试内容，有针对性地编写的。在编写中力图避免烦琐，突出了实用性、专业性；详细地解析了大量例题，以帮助读者深入理解和灵活应用，提高分析问题和解决问题的能力，并且在很多地方对内容的处理和提法上进行了有益的探讨。

考虑到内容的系统性和完整性，也为给读者提供一个较好的基础，我们介绍了一些在会计师考试中目前可能暂时免考的内容，在这部分内容前我们打了“*”号，虽然这部分内容对读者掌握必要的概念是有帮助的，但可以略过不看。每章内容后面都有习题，并附有答案或提示，读者可以参考。

本书除可以作为会计师考试的指导书，还可作为财经类专科和本科的教学参考书和学生的复习参考资料。

因时间关系，书中错误在所难免，欢迎广大读者批评指正。

编　者

1994 年 12 月

目　　录

前　言

第一篇　微积分……(1)

第一章　函数、极限和连续……(1)

第二章　导数和微分……(15)

第三章　导数的应用……(28)

第四章　不定积分……(40)

第五章　定积分……(51)

第六章　多元函数微分法及其应用……(60)

第二篇　线性代数……(72)

第一章　行列式……(72)

第二章　矩阵……(82)

第三章　n 维向量……(95)

第四章　线性方程组……(103)

第三篇　概率论与数理统计……(111)

第一章　随机事件及其概率……(111)

第二章　随机变量及其概率分布……(122)

第三章　多维随机变量及其分布……(134)

第四章　随机变量的数字特征……(138)

第五章　大数定律和中心极限定理……(146)

第六章　样本及抽样分布……(148)

第七章　参数估计……(155)

第八章　假设检验……(174)

第九章　回归分析……(185)

附　概率分布函数表……(190)

第一篇　微积分

第一章　函数、极限和连续

一、函　　数

（一）函数的概念

1. 定义 1.1　设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 y 随变量 x 而变化，如果变量 x 在实数集合 D 中取某一数值时，变量 y 依照某一规律 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 x 叫自变量，y 叫因变量或函数。x 的取值范围 D 称为函数的定义域，常记为 $D(f)$，函数 y 的取值范围，称为函数的值域。

当自变量 x 取某一个数值 x_0 时，函数 $y=f(x)$ 的对应值记作 $f(x_0)$，有时也记为 $y|_{x=x_0}$。

例 1. 设 $f(x)=2x^2-3x+1$，求 $f(1)$、$f(-2)$、$f(a+1)$、$f(a)+1$、$f(\frac{1}{x})$。

解：本题是求函数值的问题，要根据对应规律对自变量进行运算，在这里，对应规律是：

$$f(\ )=2\cdot(\ )^2-3\cdot(\ )+1$$

求 $f(1)$ 即将 $x=1$ 代入上式的（ ）内进行运算，即：

$$f(1)=2\cdot(1)^2-3\cdot(1)+1=0$$

同理，
$$f(-2)=2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+1=8+6+1=15$$
$$f(a+1)=2\cdot(a+1)^2-3\cdot(a+1)+1=2a^2+a$$
$$f(a)+1=[2(a)^2-3(a)+1]+1=2a^2-3a+2$$
$$f(\frac{1}{x})=2\cdot(\frac{1}{x})^2-3\cdot(\frac{1}{x})+1=\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}+1\quad(x\neq0)$$

例 2. 求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-x-6}$

(2) $y=\sqrt{25-x^2}$

(3) $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$

解：(1)分式的分母不能为零，故有 $x^2-x-6=(x-3)(x+2)\neq0$，$x\neq3$ 且 $x\neq-2$ 时函数有定义，定义域为 $x\neq3$ 且 $x\neq-2$，亦可记为：

$$D(f)=(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,+\infty)$$

(2)负数没有平方根，故 $25-x^2\geqslant0$，由此 $-5\leqslant x\leqslant5$，或记作：$D(f)=[-5,5]$

(3)分式分母不能为零，要求 $\ln(x-1)\neq0$　即 $x\neq2$，零和负数无对数，要求 $x-1>0$，即 $x>1$，定义域为　$x>1$ 且 $x\neq2$，亦可记为：$D(f)=(1,2)\cup(2,+\infty)$

2. 分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为“分段函数”。

例如：

$$y=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-1 & x>0\end{cases}$$

都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的分段函数。

关于分段函数，要注意以下几点：

1°分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数；

2°分段函数的定义域是各段定义域的并集；

3°分段函数求函数值时要注意自变量的数值要代入相应的表达式中进行运算。

例 3. 已知函数为

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\leqslant 0\\ x^2+1 & 0<x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{x} & 1<x<4\end{cases}$$

(1)求 $f(x)$ 的定义域

(2)求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(2)$

解：(1)定义域为三段定义域之并集

$$D(f)=(-\infty,0]\cup(0,1]\cup(1,4)=(-\infty,4)$$

(2)$x=0$ 在 $x\leqslant 0$ 范围内，$f(0)=3\cdot(0)+2=2$

$x=1$ 在 $0<x\leqslant 1$ 范围内，$f(1)=(1)^2+1=2$

$x=-1$ 在 $x\leqslant 0$ 范围内，$f(-1)=3\cdot(-1)+2=-1$

$x=\frac{1}{2}$ 在 $0<x\leqslant 1$ 范围内，$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2+1=\frac{5}{4}$

$x=2$ 在 $1<x<4$ 范围内，$f(2)=(2)^2+1=5$

3. 隐函数

定义 1.2　凡能够由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数关系称为隐函数。

例如　(1)$x+y=1$

(2)$x^2+y^2=1$

(3)$x^y+y^x-xy=1$ 等

和隐函数相比较，形如 $y=f(x)$ 的函数，称为显函数，其特点是因变量 y 单独在等式左边，而等式右边仅仅是自变量的表达式 $f(x)$

有些隐函数可化为显函数，此过程称为“显化”，如(1)可化为 $y=1-x$，(2)可化为 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$，有些隐函数不易或不能显化，如(3)，要直接从方程出发研究其特性。

(二)函数的主要性质

1. 奇偶性

定义 1.3　若函数 $y=f(x)$ 在其定义域内任一点 x 都有

(1) $f(-x)=f(x)$ 则称 $f(x)$ 为偶函数

(2) $f(-x)=-f(x)$ 则称 $f(x)$ 为奇函数

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称。

例 4. 判别下列函数的奇偶性

(1) $y=x^2+1$

(2) $y=x\cos x$

(3) $y=x^2+\sin x$

解：(1) $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$

$\therefore f(x)$ 为偶函数

(2) $f(-x)=(-x)\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$

$\therefore f(x)$ 为奇函数

(3) $f(-x)=(-x)^2+\sin(-x)=x^2-\sin x\neq f(x)$

且 $f(-x)\neq -f(x)$

$\therefore f(x)$ 为非奇非偶函数

不具备奇偶性质的函数是大量的，奇偶函数有如下运算规律：

(1)两奇(偶)函数之和或差仍为奇(偶)函数；

(2)两奇(偶)函数之积为偶函数；

(3)一偶函数与一奇函数之积为奇函数。

以上规律对判断函数奇偶性是很有用的。

2. 单调性

定义 1.4　如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$ 则称此函数在区间 (a,b) 内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内是单调减少的。

判断函数的单调性，可依据函数的图形，在第三章中我们将介绍判断函数单调性的一般方法。

3. 周期性

定义 1.5　如果存在正常数 a，使 $f(x+a)=f(x)$，对任意的 $x\in D(f)$ 都成立，则称 $f(x)$ 为周期函数。满足此式的最小正数 a，称为 $f(x)$ 的周期，记作 T。

4. 有界性

定义 1.6　如果存在正数 M，使得对任意的 $x\in(a,b)$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界，否则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上无界。

(三)反函数、复合函数、初等函数

1. 反函数

定义 1.7　设已知函数 $y=f(x)$，如果由此解出的 $x=\varphi(y)$ 是一个函数，则称它为 $f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$。

由于我们习惯用 x 表示自变量，$y=f(x)$ 的反函数也可记作 $y=f^{-1}(x)$。

$y=f(x)$和$y=f^{-1}(x)$关于直线$y=x$是对称的。

2. 复合函数

定义 1.8　设$y=f(u)$ $(u\in D(f))$，$u=\varphi(x)$ $(x\in D(\varphi))$，当$x\in D(\varphi)$时若$u=\varphi(x)$的值域落入$D(f)$内则y是x的函数，记作$y=f[\varphi(x)]$，称y是x的复合函数，u称为中间变量。

3. 基本初等函数

下列函数称为基本初等函数

(1)常量：$y=C$

(2)幂函数：$y=x^{\alpha}$(α为任何实数)

(3)指数函数：$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$

(4)对数函数：$y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1)$

(5)三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{ctg}x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

(6)反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\mathrm{arctg}x$，$y=\mathrm{arcctg}x$，
$y=\mathrm{arcsec}x$，$y=\mathrm{arccsc}x$

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合构成的函数叫做初等函数。

初等函数是能够用一个分析式表达的，如：$y=\mathrm{arctg}\sqrt{x^2+1}$，$y=1+\lg(1+x^2)$，$y=e^{\sin(x^2+1)}$，分段函数不是初等函数。

(四)常见的经济函数

1. 总成本函数：产量为x个单位的总成本函数为$C(x)$，$C(x)=C_0+C_1(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，其中$C_0$为固定成本，是一个常数$C_0=C(0)$，$C_1(x)$为可变成本，简单情形下，$C_1(x)=C_1x$。

2. 平均成本函数：产量为x的平均成本函数，记为$A(x)$

$$A(x)=\frac{C(x)}{x}\qquad \text{其中}C(x)\text{为总成本函数}$$

3. 价格函数：价格P是销售量x的函数

$$P=P(x)\qquad(0\leqslant x\leqslant b)\qquad P\text{通常是减函数}$$

4. 需求函数：需求x是价格P的函数$x=x(P)$

在经济分析中，我们假定，产量＝销售量＝需求量＝x

5. 总收入(收益)函数$R(x)$：

$$R=R(x)=Px\qquad(0\leqslant x\leqslant b)$$

其中P为价格，x为销售量

6. 利润函数：总收入R去掉总成本C就是利润函数L

$$L=L(x)=R(x)-C(x)$$

二、极　　限

(一)极限的概念

1. 数列的极限

定义 1.9　对于数列$\{x_n\}$，如果当$n\to\infty$时，x_n无限地趋于一个常数A，则称当n趋于无穷大时，数列$\{x_n\}$以常数A为极限，或称数列收敛于A，记作　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$　或　$x_n\to A$(当$n\to\infty$时)否则，称数列$\{x_n\}$没有极限。如果数列没有极限，就称数列是发散的。

例 5. 写出下列各数列的一般项，通过观察指出收敛数列的极限值

(1)$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\cdots\cdots$

(2)$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\cdots\cdots$

(3)$1,-1,1,-1,1,-1,\cdots\cdots$

(4)$1,3,5,7,9,\cdots\cdots$

解：(1)一般项 $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(2)一般项 $x_n=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

(3)一般项 $x_n=(-1)^{n-1}$数列发散

(4)一般项 $x_n=2n-1$ 数列发散

2. 当 $x\to\infty$时，函数的极限

定义 1.10　对于函数 $y=f(x)$，如果当 $x\to\infty$($|x|$无限增大)时，$f(x)$无限地趋近一个常数 A，则称 $x\to\infty$时，函数 $f(x)$的极限是 A，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ $(x\to\infty)$

如：对函数 $f(x)=1+\frac{1}{x}$，当$|x|$无限增大时，$f(x)$无限接近常数 1，故$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$

如果 $x\to\infty$时，x 保持大于零，记为 $x\to+\infty$

$x\to\infty$时，x 保持小于零，记为 $x\to-\infty$

如函数 $f(x)=e^{-x}$，当 $x\to+\infty$时，$f(x)$无限接近常数 0，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

对函数 $f(x)=e^{x}$，当 $x\to-\infty$时，$f(x)$无限接近常数 0，故 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$

显然，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\overset{存在}{=\!=}A$ 的充分必要条件是

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$都存在，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

对函数 $y=\mathrm{arctg}x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{\pi}{2}$　二者不等

故$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{arctg}x$ 极限不存在。

3. 当 $x\to x_0$ 时函数的极限

定义 1.11　对于函数 $y=f(x)$，如果当 x 任意地无限接近而又不等于 x_0 的时候，函数 $f(x)$ 无限地趋于一个常数 A，则称当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限是 A，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ $(x\to x_0)$

注意 1°$x\to x_0$ 意指 x 任意接近而又不等于 x_0，故函数在 x_0 点取值情况对函数当 $x\to x_0$ 时极限值没有影响，如 $f(x)=\frac{x}{x}$，$f(x)$在 $x=0$ 点无定义，但$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}=1$

2°$x\to x_0$ 指 x 以任意方式接近 x_0

单侧极限

当 $x\to x_0$ 时，x 保持大于 x_0，记作 $x\to x_0^+$

当 $x\to x_0$ 时，x 保持小于 x_0，记作 $x\to x_0^-$

当 $x\to x_0^+$ 时，若 $f(x)$与常数 A 无限接近，则称 A 为 $f(x)$在 x_0 处的右极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0+0) = A$$

当 $x \to x_0^-$ 时，若 $f(x)$ 与常数 A 无限接近，则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0-0) = A$$

定理 1.1　当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限等于 A 的充分必要条件是：

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

例 6.

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \leqslant 0 \\ x^2+1 & 0 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{2}{x} & 1 < x \end{cases}$$

分别讨论 $x \to 0$ 及 $x \to 1$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在？

解：

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{x \to 0} (3x+2) = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2+1) = 1$$

$$\because \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) \qquad \therefore \lim_{x \to 0} f(x) \text{不存在}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2+1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2}{x} = 2$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

（二）无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

定义 1.12　对于函数 $y=f(x)$，如果在自变量 x 的某个变化过程中，函数 $f(x)$ 的极限为 0，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为无穷小量。

注意：1°无穷小量是一个函数（因变量），在自变量的某个变化过程中，其绝对值可任意接近 0，常数中只有零才是无穷小。

2°无穷小必须与一个变化过程相联系。

3°无穷小开始并不一定小，只是绝对值越变越小。

如：$y=x^2$　　$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$　　$x \to 0$　　x^2 是无穷小

　　　　　　$\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$　　$x \to 1$　　x^2 不是无穷小

2. 无穷大量

定义 1.13　对于函数 $y=f(x)$，如果在自变量 x 的某个变化过程中 $f(x)$ 的绝对值越来越大且可以无限地增大，则称在该变化过程中 $f(x)$ 为无穷大量。

注意：1°无穷大量是一个函数（因变量）；

2°无穷大量必须与一个变化过程相联系；

3°无穷大量刚开始并不一定很大，只是绝对值越变越大。

如：$y=\dfrac{1}{x-1}$　$x \to 1$ 时　y 为无穷大

$y=\dfrac{1}{x}$　$x \to 0$ 时　y 为无穷大

$x \to \infty$时　y 为无穷小

$x \to x_0 (x_0 \neq 0)$　y 即非无穷大，也非无穷小

定理 1.2 （无穷小量与无穷大量的关系）

在自变量 x 的同一变化过程中

(1)若 $f(x)$ 为无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小

(2)若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大

3. 无穷小量的运算性质

以下均指在同一个变化过程中

(1)有限个无穷小量之和仍为无穷小量

(2)无穷小量与有界函数的乘积为无穷小量

(3)有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量

例 7. 求极限$\lim\limits_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x}$

解：$\because \lim\limits_{x \to 0} x = 0$　x 无穷小量

又$|\sin\frac{1}{x}| \leqslant 1$　$\sin\frac{1}{x}$为有界变量

$\therefore x\sin\frac{1}{x}$为无穷小量　$\lim\limits_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

4. 无穷小量的比较

定义 1.14　设 α, β 是同一极限过程中的两个无穷小量，若 $\lim\frac{\alpha}{\beta} = C \neq 0$($C$ 为常数)则称 α 与 β 是同阶无穷小，特别地当 $C=1$ 时，称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$

若 $\lim\frac{\alpha}{\beta} = 0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小

若 $\lim\frac{\alpha}{\beta} = \infty$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小

例如：$\lim\limits_{x \to 0}\frac{x+x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0}(1+x) = 1$

$\therefore x+x^2$ 和 x 是等价无穷小

$\lim\limits_{x \to 0}\frac{2x+x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0}(2+x) = 2$

$\therefore 2x+x^2$ 和 x 是同阶无穷小

$\lim\limits_{x \to 0}\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$

$\therefore x^2$ 是比 x 高阶的无穷小

$\lim\limits_{x \to 0}\frac{x}{x^2} = \infty$

$\therefore x$ 是比 x^2 低阶的无穷小

(三)极限的四则运算

在以下讨论中，我们总假定是同一个极限过程

定理 1.3　若$\lim f(x)$，$\lim g(x)$都存在，则

(1)$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$

(2)$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

特别地，$g(x)=C$，C 是常数，则

$$\lim[C\cdot f(x)]=C\lim f(x)$$

(3)当$\lim g(x)\neq 0$ 时，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

运用以上定理计算极限时应注意：

1°取极限过程要一致；

2°各极限都应存在；

3°商时分母不为零；

4°运算次数要有限。

例 8. 求$\lim\limits_{x\to1}(2x-1)$

解：$\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=\lim\limits_{x\to1}(2x)-\lim\limits_{x\to1}1=2\lim\limits_{x\to1}x-1=2-1=1$

例 9. 求$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$

解：$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\dfrac{(\lim\limits_{x\to2}x)^3-1}{(\lim\limits_{x\to2}x)^2-5\lim\limits_{x\to2}x+3}=\dfrac{2^3-1}{2^2-5\cdot2+3}=-\dfrac{7}{3}$

注：以上两例可直接代值

$$\lim_{x\to1}(2x-1)=f(1)=2\cdot1-1=1$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=f(2)=\frac{2^3-1}{2^2-5\cdot2+3}=-\frac{7}{3}$$

这样做是有条件的，不过只要直接代值是有意义的，我们一般可以这样求极限，理由见后面。

例 10. 求$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

解：$\because\lim\limits_{x\to3}x^2-9=0$　　$\therefore$不能直接用定理

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$$

例 11. 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-3}{x^2-3x+2}$

解：$\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+2)=0$ 不能用定理

但$\lim\limits_{x\to1}(4x-3)=4\cdot1-3=1\neq0$

$\because\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{4x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(4x-3)}=\dfrac{0}{1}=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-3}{x^2-3x+2}=\infty$（无穷小量的倒数为无穷大量）

例 12. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+2x+3}$

解：本题分子、分母极限均为无穷大，不能用定理。将分子、分母同除以 x^2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+1}{x^2+2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}=\frac{3+0+0}{1+0+0}=3$$

一般地

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n}(a_0b_0\neq 0)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m}{b_0x^n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & \text{当 } m=n\\ 0 & \text{当 } m<n\\ \infty & \text{当 } m>n\end{cases}$$

对于分段函数，分段点处的极限值求法见例 2，非分段点处的极限值易求。

（四）两个重要极限

1. 第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

注意其特点：①$\frac{\sin x}{x}$

②$\frac{0}{0}$即分子、分母极限均为 0

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$不是这种极限，因分母极限为$\infty$

例 13. 求下列极限

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$；(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}$；(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

解：(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{(3x)}\cdot 3=3\cdot 1=3$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{\cos 0}=1$

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{2x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$

2. 第二个重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

其特点是底的极限为 1，指数的极限为∞，记为 1^∞型。

此极限还有两种形式：

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e \qquad (n\text{ 为自然数})$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

例 14. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{\frac{x}{3}}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+1})^x$

解：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{\frac{x}{3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{(-\frac{x}{2})}\right]^{-\frac{x}{2}\cdot(-\frac{2}{3})}$

$$=\left[\lim_{-\frac{x}{2}\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-\frac{x}{2})}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-\frac{2}{3}}=e^{-\frac{2}{3}}\quad(\text{当 } x\to\infty \text{ 时}, -\frac{x}{2}\to\infty)$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+1})^x$ 分子、分母同除以 x

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{(1+\frac{1}{x})}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{-x\cdot(-1)}}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$$

三、连　　续

(一)函数在一点处的连续性

下面讨论中,记 $\Delta x=x-x_0$ $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 注意这里 Δx 是一个记号,并不是 $\Delta\cdot x$,Δy 同样。

1. 定义关于函数在一点的连续性,有以下两个等价定义

定义 1.15 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,否则称 $f(x)$ 在 x_0 处间断。

关于 $f(x)$ 在一点的连续性有如下等价定义。

定义 1.16 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

2. 单侧连续性

定义 1.17 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续;若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续。

显然,$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在该点处左连续且右连续。

3. $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件

(1) $f(x_0)$ 存在

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

以上三个条件是验证函数在一点连续性的依据。

例 15. 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<2\\ 1+x^2 & x\geqslant 2\end{cases}\quad \text{在 } x=2 \text{ 处连续}$$

证:
$f(2)=1+2^2=5$

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(1+x^2)=5$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 存在

又$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$

$\therefore f(x)$在$x=2$处连续

4. 函数的间断点

三个条件之一不满足即以下三种情况之一发生则$f(x)$在点x_0不连续，x_0为$f(x)$的一个间断点。

(1)在x_0点处$f(x)$无定义

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在

(3)虽然$f(x_0)$有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在但

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$$

作为情形1的一个简单例子，$y=\dfrac{1}{x}$在$x=0$点无定义，故$x=0$为$\dfrac{1}{x}$的间断点。

例16.

$$设\ f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}\qquad 考察\ f(x)在\ x=0\ 点的连续性$$

解：$f(0)=0$存在

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0}(x+1)=1\qquad \lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)$$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在　　$\therefore f(x)$在$x=0$处不连续

例17. a为何值时，函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x}{x+2} & x\neq 1\\ a & x=1\end{cases}\qquad 在点\ x=1\ 处连续$$

解：$f(1)=a$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x}{x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to 1}x=1$$

要使$f(x)$在$x=1$处连续

须使$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=a$

即　$a=1$

(二)函数在一个区间上的连续性

定义1.18　若$f(x)$在(a,b)内的每一点都连续，则称$f(x)$在区间(a,b)内连续，若$f(x)$在(a,b)内连续，且在左端点a处右连续，在右端点b处左连续，则称$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，使得函数$y=f(x)$连续的区间称为$f(x)$的连续区间。

注意：1. 在某个区间上连续的函数，从图形上看是一条连续的曲线(在这个区间上)；

2. 可以证明，初等函数在其定义域内每一点都是连续的；

3. 求函数连续区间的方法

对于初等函数：连续区间＝定义区间

对于分段函数：一般说除分段点外是连续的，分段点处连续性要做讨论。

（三）用连续性求极限

由定义在连续的条件下，有以下公式

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$（当 $g(x)$ 在 x_0 点不连续，但 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在时，此公式仍成立）

例 18. 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$

解：此极限看似复杂，实际上只要将 2 代入即可

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}=\frac{2^2+\sin 2}{e^2\sqrt{1+2^2}}=\frac{4+\sin 2}{\sqrt{5}\,e^2}$$

例 19. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}=\cos\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\cos e$

（四）闭区间上连续函数的性质

在闭区间$[a,b]$上连续的函数，有以下几个基本性质，应记住它们的条件和结论。

定理 1.4 （有界定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 必在$[a,b]$上有界。

定理 1.5 （零点定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$、$f(b)$ 异号，则 $f(x)$ 在开区间(a,b)内至少有一个零点，即在(a,b)内至少有一个数 c，使 $f(c)=0$。

定理 1.6 （介值定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，c 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一数，则在(a,b)内至少有一个数 ξ，使得 $f(\xi)=c$

定理 1.7 （最大、最小值定理）闭区间$[a,b]$上的连续函数 $f(x)$ 一定能取到它在这个闭区间的最大值和最小值。

习　题　一

一、填空题

1. 设 $f(x)=2x+3$，则 $f[f(x)-3]=$________

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{|x|-x}$ 的定义域是________

3. 无穷小量与有界变量之积是________

4. 无穷大量的倒数是________

5. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x+1 & x\neq 0 \\ A & x=0 \end{cases}$

   若 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则 $A=$________

6. $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$

   则在(a,b)上至少有一点 c 使________

二、单项选择

1. 下列各对函数中，不相同的函数是 （　　）

   (A) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$

   (B) $f(x)=\lg\sqrt{x}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{2}\lg x$