共轭曲面原理

上册

陈志新

科学出版社

共轭曲面原理

上册

陈 志 新

科 学 出 版 社

1 9 7 4

内 容 简 介

共轭曲面原理是研究两个曲面相互接触传动的内在规律的一门技术科学．本书分为二篇，第一篇主要讲向量的基本概念及运算；曲面曲率的摩尔圆．第二篇是讨论共轭曲面的整体几何学，其中有叙述共轭曲面概念及其性质，分析连续滚动接触共轭曲面，对共轭曲面问题的一般性论述，对各类共轭曲面问题进行更深入的分析等．

本书举例多，生动，联系实际密切．可供机械原理和机构学方面的基础理论工作者，工程数学工作者以及机械工程人员参考用．

共 轭 曲 面 原 理

上 册

陈 志 新 著

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1974 年 10 月第 一 版　开本：850×1168 1/32

1974 年 10 月第一次印刷　印张：6 13/16

印数：0001—6,500　字数：174,000

统一书号：13031·196

本社书号：331·13—1

定价：0.85 元

序

齿曲面间的啮合，劈锥凸轮（或一般凸轮）曲面间的传动，机械加工中刀刃曲面或刀刃曲线与加工所得的曲面间的关系，旋转发动机转子与壳体轮廓间的对应关系，内齿油泵中内外齿间的啮合，甚至履带车辆的履带刺与它在松软地面上所留下的印迹间的关系等等技术课题，在外表上虽有显著的差别，但若撇开其不同的外形，单纯从几何角度加以抽象的话，那末，将可发现这些多种多样的技术课题却具有相同的本质，即它们实质上都体现着同一种关系——两个曲面相互接触传动的关系．共轭曲面原理就是研究这种关系的内在规律的一门技术科学．

显然，共轭曲面原理是在上述各项技术课题日益发展的基础上建立起来的，它是一门与生产实践有紧密联系的、新兴的技术科学．与其他各门技术科学一样，由于共轭曲面原理具有较高的概括性，所以，它的进展又能反过来促进上述各项技术课题更进一步的发展，以及为这些技术课题揭示出前所未见的前景，甚至还能促使提出具有实践意义的新技术课题．正如毛主席在《矛盾论》中论述经济基础与上层建筑间的辩证关系时说的：“**诚然，生产力、实践、经济基础，一般地表现为主要的决定的作用，谁不承认这一点，谁就不是唯物论者．然而，生产关系、理论、上层建筑这些方面，在一定条件之下，又转过来表现其为主要的决定的作用，这也是必须承认的**”．

共轭曲面原理是一门新兴的技术科学．有关这方面的资料，散见的虽不少，但都分属于不同的技术领域，没有形成一个完整的体系．这种状况，使一般工程技术人员对这些技术课题只能单个单个地加以研究，不能用统观全局的方法来处理和发展这些技术课题．同时，这种状况，也使初学者感到“方法万千，无从入门”．

本书的出版希望能有助于这种现状的改变，使共轭曲面原理具有较完整的体系，从而对加速这门新兴的技术科学的发展会有所裨益，以及更便于初学者对它的掌握.

本书共分四篇. 第一篇为数学基础. 其中第一章为数学知识的复习. 对已熟悉一般高等数学知识的读者来说，此章可以跳过不看. 第二、三章内所阐述的，是在研究共轭曲面原理时常用的专用性数学知识. 在第二章内，引进了一个新的向量运算概念，即向量的回转，并为它规定了一个新的运算符号“⊗”. 在第三章内，引进了曲面曲率的摩尔圆及诱导曲率的摩尔圆两个新概念.

本书的第二篇是讨论共轭曲面的整体几何学，即共轭曲面问题. 此篇共包括六章. 第四章实质上是分析连续滚动接触共轭曲面. 第五章是对共轭曲面问题的一般性论述. 第六、七、八等三章是分别对第一、二、三类共轭曲面问题进行更深入一步的分析. 第九章则是论述更广义的共轭曲面问题. 在这些章内，都列举了具有实践意义的特例. 例如，直线球面蜗杆蜗轮齿曲面分析，蜗螺传动齿曲面分析，钟表齿曲面分析(以上属第五章)，锥齿轮传动中的根切曲面分析，插齿刀插制内齿时的“让刀”干涉分析，车制凸轮曲面时切削角度变化的分析，“双重传动”齿曲面分析，平面齿轮齿曲面分析，内齿油泵齿曲面分析，旋转发动机转子与壳体轮廓曲面分析(以上属第六章)，内螺旋传动齿曲面的制造(属第七章)，按椭圆性速比共轭的平面传动齿曲面的插制（属第八章)，滚齿刀、剃齿刀、珩磨轮、研磨轮等对应齿廓形状的求解，劈锥凸轮曲面分析，格里森制双曲面锥齿轮齿曲面分析，利用奥里康机床连续切削直齿锥齿轮齿曲面所用刀刃曲面的求解（以上属第九章)，等等. 这些特例都是在本书中新提出的.

本书的第三篇是讨论共轭曲面的微分邻域几何学，即共轭曲率问题. 第四篇是讨论有控制的点接触共轭问题. 由于该两篇尚未完稿，计划作为下册出版.

作者在撰写本书过程中，深深体会到科学技术的群众性. 本书所提出的一些较新的见解，都是在毛泽东思想的指引下，从已有

的生产经验中，文献资料中，学术会议的讨论中以及学术交谈中，得到启示才形成的.

限于作者的水平，本书内必定存在不少缺陷与错误，希望读者指正.

目　　录

第二篇　共轭曲面整体几何学——共轭曲面问题

第一篇 数学基础

第一章 向量运算及微分几何学基础复习

§ 1.1 向量的基本概念

客观世界中存在着各种不同类型的量，它们间最本质的区别，在于各种量的相互联系关系不同．例如，最简单的量是数量，它们满足一般所熟悉的加减原则．稍复杂一些的量是向量，它们是按平行四边形规则进行加减的，例如力、位移、速度等都是向量．此外，还有更复杂更广义的张量等．在本书所讨论的内容范围内，使用向量就够了，所以，张量方面的知识不作介绍．

利用向量的本质属性，即此种量间的联系是按平行四边形规则进行复合的，可以在欧氏三维空间内，将任一向量分解成沿直角参考坐标系[1)] x, y, z 轴，即 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 方向的三个分量．也就是任一向量 $\vec{A}$ 可表达成：

$$\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}. \tag{1.1}$$

按 (1.1) 式所表达的向量 $\vec{A}$，若它的原点没有作特殊规定，则此种向量称为自由向量．若向量 $\vec{A}$ 的原点系规定为某一点(通常为坐标系的原点)，则称为点向量或位置向量．自由向量只表明方向和大小，不表明其具体位置；点向量则除表明方向大小外，还表明其具体位置．点向量的终点，相对于规定的原点是一具有确定位置的点．故称原点确定的向量为"点向量"．

若有一自由向量 $\vec{\alpha} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k}$；它的三个分量满足条件 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$，则称向量 $\vec{\alpha}$ 为单位向量．

单位向量 $\vec{\alpha}$ 的三个分量 α_1, α_2, α_3 就等于 $\vec{\alpha}$ 在直角坐标系内的

---

1) 本书内均采用右旋坐标系．

三个方向余弦．因此，根据投影原理，可推得两单位向量

$$\vec{\alpha} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k} \text{ 及 } \vec{\beta} = \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}$$

间的夹角 θ 为：

$$\cos\theta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \tag{1.2}$$

利用单位向量，可以将任一向量表达成单位向量与数量的乘积，即

$$\vec{A} = A\vec{\alpha}. \tag{1.3}$$

§1.2 向量的加减

设有两向量

$$\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},$$
$$\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k},$$

则根据向量的基本性质（平行四边形复合规则），可推得

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (a_1 \pm b_1)\vec{i} + (a_2 \pm b_2)\vec{j} + (a_3 \pm b_3)\vec{k}. \tag{1.4}$$

§1.3 向量的乘积

1. 数量积（或称点积） 两个向量 $\vec{A}$, $\vec{B}$ 的数量积定义为：

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{1.5}$$

由于 $\vec{A} = A\vec{\alpha}$, $\vec{B} = B\vec{\beta}$, 故数量积又可表达为：

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = AB(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3).$$

利用关系式(1.2)，则得：

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta. \tag{1.6}$$

(1.6) 式的几何意义是：两向量间的数量积等于两向量的大小及其夹角余弦的乘积，也就是等于一向量在另一向量上的投影与另一向量的数值间的乘积．故当 $\vec{A}$, $\vec{B}$ 向量相互垂直时，则得：

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0. \tag{1.7}$$

因而可推得：

$$\left.\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{j} &= 0, \\ \vec{j} \cdot \vec{k} &= 0, \\ \vec{k} \cdot \vec{i} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

2. 向量积(或称叉积) 两个向量 $\vec{A}$, $\vec{B}$ 间的向量积定义为:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{1.9}$$

即

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}. \tag{1.9a}$$

根据定义 (1.9) 式,可推得:

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} \tag{1.10}$$

及

$$\left.\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}, \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}. \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

3. 混合积 三个向量 $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ 间的混合积 $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ 可根据 (1.5), (1.9) 两式求得:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.12}$$

由 (1.12) 式可推得:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \tag{1.13}$$

以及

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= 0, \\ \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

(1.14) 式的几何意义是: 两向量间的向量积垂直于该两向量.

4. 复向量积 三个向量 $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ 间的复向量积 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ 可根据 (1.9) 式求得:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}). \tag{1.15}$$

(1.15) 式的证明, 系将等式两边分别按 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 三分量展开, 然后相互比较.

5. 复混合积 四个向量 $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ 间的复混合积 $(A \times B) \cdot$

$(\vec{C}\times\vec{D})$ 可利用上述诸关系求得:

$$
\begin{aligned}
(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) &= \vec{A}\cdot[\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})] \quad \text{(按(1.13)式)}\\
&= \vec{A}\cdot[\vec{C}(\vec{B}\cdot\vec{D})-\vec{D}(\vec{B}\cdot\vec{C})] \quad \text{(按(1.15)式)}\\
&= (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C}). \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

利用(1.16)式可得:

$$
\begin{aligned}
(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) &= (\vec{A}\cdot\vec{A})(\vec{B}\cdot\vec{B})-(\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{A}\cdot\vec{B})\\
&= A^2B^2-(AB\cos\theta)^2 = A^2B^2\sin^2\theta,
\end{aligned}
$$

即

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\sin\theta. \qquad (1.17)$$

(1.17)式的几何意义是: 两向量间向量积的数值等于两向量的大小及其夹角正弦的乘积, 也就是等于此两向量所构成的平行四边形的面积值.

§1.4 点向量的坐标转换

如图1所示, 若有一点向量 $\vec{A}$, 其原点为 O, 终点为 P. 现 P 点不动, 而原点由 O 变动至 O', 并设 $\overrightarrow{OO'}=\vec{L}$; 则相对于点 O', P 点的点向量将变为 $\vec{A}'$, 即

$$\vec{A}'=\vec{A}-\vec{L}. \qquad (1.18)$$

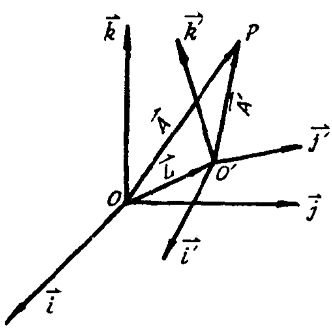

图1 点向量的坐标转换

(1.18)式为点向量的坐标转换关系式. 将此式展开, 就可推得一般常用的坐标转换关系方程式.

设以 O 为原点的参考坐标系为 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$; 以 O' 为原点的参考坐标系为 $\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$; 并令:

$$
\left.\begin{aligned}
\vec{i}' &= a_{11}\vec{i}+a_{12}\vec{j}+a_{13}\vec{k},\\
\vec{j}' &= a_{21}\vec{i}+a_{22}\vec{j}+a_{23}\vec{k},\\
\vec{k}' &= a_{31}\vec{i}+a_{32}\vec{j}+a_{33}\vec{k}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.19)
$$

(1.19)式中的 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{33}$ 等9个系数称为直角坐标转换矩阵的9个元素. 由于 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 及 $\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$ 各为直角坐标系, 且每

个向量均为单位向量，所以，上述 9 个系数并不是彼此独立的，而须满足下列六个独立关系式，即

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, \\
&a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \\
&a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \\
&a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0, \\
&a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0, \\
&a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

亦即 a_{11}, a_{12}, ···等 9 个系数中独立参量仅 3 个.

利用关系式(1.20)，由(1.19)式可得：

$$\left.\begin{aligned}
\vec{i} &= a_{11}\vec{i}' + a_{21}\vec{j}' + a_{31}\vec{k}', \\
\vec{j} &= a_{12}\vec{i}' + a_{22}\vec{j}' + a_{32}\vec{k}', \\
\vec{k} &= a_{13}\vec{i}' + a_{23}\vec{j}' + a_{33}\vec{k}'.
\end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

现令：

$$\left.\begin{aligned}
\vec{A} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \\
\vec{A}' &= x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}', \\
\vec{L} &= x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}.
\end{aligned}\right\}$$

将上述三式代入(1.18)式，并利用(1.21)式，可得：

$$\left.\begin{aligned}
x' &= a_{11}(x - x_0) + a_{12}(y - y_0) + a_{13}(z - z_0), \\
y' &= a_{21}(x - x_0) + a_{22}(y - y_0) + a_{23}(z - z_0), \\
z' &= a_{31}(x - x_0) + a_{32}(y - y_0) + a_{33}(z - z_0).
\end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

(1.22)式即为直角坐标系中的坐标转换关系方程式.

§1.5 向量的微分

若向量 $\vec{A}$ 为某一参变量 s 的函数，则 $\vec{A}$ 对 s 的导数 $\frac{d\vec{A}}{ds}$ 定义为：

$$\frac{d\vec{A}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{A}(s + \Delta s) - \vec{A}(s)}{\Delta s}. \tag{1.23}$$

利用 $\vec{A} = A\vec{\alpha}$ 及 $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$，(1.23)可展开为：

$$\frac{d\vec{A}}{ds}=\frac{dA}{ds}\vec{\alpha}+A\frac{d\vec{\alpha}}{ds} \tag{1.24}$$

及

$$\frac{d\vec{A}}{ds}=\frac{da_1}{ds}\vec{i}+\frac{da_2}{ds}\vec{j}+\frac{da_3}{ds}\vec{k}+a_1\frac{d\vec{i}}{ds}+a_2\frac{d\vec{j}}{ds}+a_3\frac{d\vec{k}}{ds}. \tag{1.25}$$

若所选用的参考坐标系 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 方向与 s 无关,即 s 变动时 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 守恒,则(1.25)式可简化为:

$$\frac{d\vec{A}}{ds}=\frac{da_1}{ds}\vec{i}+\frac{da_2}{ds}\vec{j}+\frac{da_3}{ds}\vec{k}. \tag{1.25a}$$

当所微分的向量为单位向量时,则根据单位向量的定义知:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=1,$$

故

$$\vec{\alpha}\cdot\frac{d\vec{\alpha}}{ds}=0. \tag{1.26}$$

(1.26)式的几何意义是: 单位向量的导数,或单位向量的变化量,垂直于单位向量本身.

§1.6 曲线的单位切线向量与单位法线向量

设点向量 $\vec{R}$ 为一参变量 u 的函数,即

$$\vec{R}=\vec{R}(u)=x(u)\vec{i}+y(u)\vec{j}+z(u)\vec{k}, \tag{1.27}$$

则随着 u 的不断变化,$\vec{R}(u)$ 的终点将在空间形成一条曲线,即(1.27)式为一曲线的参数方程式.

由(1.23)式知,$\frac{d\vec{R}}{du}$ 平行于曲线(1.27)的切线,故曲线的单位切线向量 $\vec{\tau}$ 为:

$$\vec{\tau}=\frac{\frac{d\vec{R}}{du}}{\sqrt{\frac{d\vec{R}}{du}\cdot\frac{d\vec{R}}{du}}}=\frac{\frac{dx}{du}\vec{i}+\frac{dy}{du}\vec{j}+\frac{dz}{du}\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}}. \tag{1.28}$$

显然,随着 u 的变化,$\vec{\tau}$ 也将不断地变化,亦即 $\vec{\tau}=\vec{\tau}(u)$. 现

定义 $\vec{\tau}$ 的导数 $\frac{d\vec{\tau}}{du}$ 的方向为主法线方向，则曲线的单位主法线向量 $\vec{\xi}$ 为:

$$\vec{\xi}=\frac{\frac{d\vec{\tau}}{du}}{\sqrt{\frac{d\vec{\tau}}{du}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{du}}}. \tag{1.29}$$

由 (1.26) 式知 $\vec{\tau}\cdot\vec{\xi}=0$, 即单位切线向量 $\vec{\tau}$ 与单位主法线向量 $\vec{\xi}$ 相互垂直.

现定义

$$\vec{\beta}=\vec{\tau}\times\vec{\xi}. \tag{1.30}$$

由于 $\vec{\tau}$, $\vec{\xi}$ 为相互垂直的单位向量, 故 $\vec{\beta}$ 也是一单位向量. 并且由 (1.14) 式知 $\vec{\xi}\cdot\vec{\beta}=0$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}=0$, 即 $\vec{\beta}$ 垂直于 $\vec{\tau}$ 和 $\vec{\xi}$. $\vec{\beta}$ 称为曲线的单位副法线向量.

在曲线的任一点处, 切线、主法线、副法线三个方向 $\vec{\tau}$, $\vec{\xi}$, $\vec{\beta}$ 构成一直角坐标系（右旋的），称为曲线的 Frenet 标形（或基本三菱形).

§ 1.7 曲线的曲率

若将曲线参数方程式中的参数 u 转换成以曲线的长度 s 作为参数, 则 (1.28) 式将简化成:

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{R}}{ds}. \tag{1.28a}$$

并由 (1.29) 式可得:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\sqrt{\frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds}}\,\vec{\xi}=k\vec{\xi}, \tag{1.31}$$

其中

$$k=\sqrt{\frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds}}, \tag{1.32}$$

k 称为曲线的曲率.

由(1.30)式可推得:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}\times\vec{\xi}+\vec{\tau}\times\frac{d\vec{\xi}}{ds}=k\vec{\xi}\times\vec{\xi}+\vec{\tau}\times\frac{d\vec{\xi}}{ds}=\vec{\tau}\times\frac{d\vec{\xi}}{ds}. \quad (1.33)$$

由上式可知 $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ 垂直于$\vec{\tau}$. 但由(1.26)式又知 $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ 垂直于$\vec{\beta}$, 故 $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ 将垂直于 $\vec{\tau}$ 及 $\vec{\beta}$, 即平行于 $\vec{\xi}$; 因此由(1.33)式可得:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds}=-\kappa\vec{\xi}, \quad (1.33a)$$

其中

$$\kappa=-\vec{\xi}\cdot\left(\vec{\tau}\times\frac{d\vec{\xi}}{ds}\right)=(\vec{\tau}\times\vec{\xi})\cdot\frac{d\vec{\xi}}{ds}=\vec{\beta}\cdot\frac{d\vec{\xi}}{ds}, \quad (1.34)$$

κ 称为曲线的挠率.

由于 $\vec{\tau}, \vec{\xi}, \vec{\beta}$ 为一右旋直角坐标系, 则 $\vec{\xi}=\vec{\beta}\times\vec{\tau}$. 利用此关系式及(1.31), (1.33a)两式, 可推得:

$$\frac{d\vec{\xi}}{ds}=\frac{d\vec{\beta}}{ds}\times\vec{\tau}+\vec{\beta}\times\frac{d\vec{\tau}}{ds}=-\kappa\vec{\xi}\times\vec{\tau}+\vec{\beta}\times(k\vec{\xi})=-k\vec{\tau}+\kappa\vec{\beta}. \quad (1.35)$$

(1.31), (1.33a), (1.35) 三式总称为 Frenet 公式. 它们是切线、副法线、主法线三个单位向量对曲线长度 s 求导数所得向量, 在 Frenet 标形内的展开表达式.

§1.8 曲面的切平面及法线

设点向量 $\vec{R}$ 为两参变量 u, v 的函数, 即

$$\vec{R}=\vec{R}(u, v)=x(u, v)\vec{i}+y(u, v)\vec{j}+z(u, v)\vec{k}. \quad (1.36)$$

则随着 u, v 的变化, $\vec{R}(u, v)$ 的终点将在空间形成一曲面, 亦即(1.36)式为一曲面的参数方程式.

与求曲线的切线相似, 可求得曲面上任一点处沿 u 方向(v = 常数的方向)的单位切线向量 $\vec{t}_u$ 为:

$$\vec{t}_u=\frac{\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial u}}{\sqrt{\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial u}}}. \quad (1.37)$$