

高等学校大专试用教材

# 高等数学

上册

四川省数学会高等数学委员会编

成都科技大学出版社

## 内 容 简 介

本书是为了满足各种类型大专班高等数学与工程数学的教学需要而编写的，全书分上、下两册。上册内容包括函数、极限、连续、一元函数微积分、常微分方程、无穷级数和付氏级数。内容适当，流畅易懂，便于教学与自学。

本书也可作为本科某些专业（对高等数学要求稍低，授课学时较少的专业）的教科书。

高等学校大专试用教材

## 高 等 数 学

上册

四川省数学会高等数学委员会编

责任编辑：王泽彬

装帧设计：孟章良

---

成都科技大学出版社出版发行

成都科技大学印刷厂印刷

开本 787×1092毫米 1/32 印张 16.375

1986年6月第1版 1988年8月第3次印刷

印数：5,401—11,900 字数：354,224

ISBN 7-5616-0252-9/0·25

---

统一书号：15475·4 定价：3.40元

## 前 言

本书是为了满足各种类型大专班高等数学的教学需要而编写的。由四川省数学会高等数学委员会主持编写工作，由成都科技大学、重庆大学、成都电讯工程学院、成都地质学院、重庆建筑工程学院、重庆邮电学院等六所院校的部分教师执笔编写。

全书分上、下两册。上册的内容包括函数、极限、连续、一元函数微积分、常微分方程、无穷级数和付氏级数；下册的内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、线性代数与概率统计。

本书的编写方针是：

1. 符合大专班高等数学的教学要求，适应大专班高等数学的教学需要；
2. 反映我省广大教师的教学经验；
3. 内容适当，概念准确，叙述详细，文字流畅，明白易懂，既可作为教科书也可作为自学参考书；
4. 重视基本运算技能的训练与解决实际问题能力的培养；
5. 超出本书范围的论证，有的尽管只作形象直观の説明，但又要做到疏而不漏；
6. 精选例题与习题使之紧密地与教材内容配合。

本书在编写过程中还参考了全国高等院校工科数学教材编审委员会于1980年审定的《高等数学教学大纲》的基本要求。

为了满足某些专业的特殊要求，本书还编入了一些具有相对独立性的章节，这些章节标有\*号，本书的每章或每节所配习题的答案附于书末，供读者参考。

全书内容可在210学时内讲完，本书不仅可作为各种类型大专班的高等数学与工程数学的教科书，也可作为本科某些对高等数学要求稍低，授课时数较少的专业的教科书。

本书承四川大学胡鹏、敖硕昌两位教授主审，他们仔细地审阅全书，并提出了许多宝贵的修改意见。

本书由重庆大学谢树艺教授、成都科技大学王明慈副教授主编。参加编写的有：成都科技大学王从云、朱明俊；成都地质学院师万瑞、李南赣、邓全福；重庆建筑工程学院曹树孝、白任伦、吴新生；重庆邮电学院陈朝枢、李丽珠、冯晏辉；重庆大学赵中时；成都电讯工程学院朱济生等同志。限于编者的水平，书中缺点、错误在所难免，恳切地希望使用本书的广大读者批评指正。

编者

一九八六年元月于成都

# 目 录

|                          |      |
|--------------------------|------|
| 第一章 函数                   | (1)  |
| § 1 函数的概念                | (1)  |
| § 2 函数的几种特性              | (5)  |
| § 3 反函数, 复合函数和初等函数       | (8)  |
| • § 4 双曲函数               | (10) |
| 习题                       | (12) |
| 第二章 极限                   | (17) |
| § 1 数列的极限                | (17) |
| 习题                       | (23) |
| § 2 函数的极限                | (24) |
| 习题                       | (34) |
| § 3 两个重要极限               | (35) |
| 习题                       | (41) |
| § 4 无穷小与无穷大              | (42) |
| § 5 无穷小的比较               | (47) |
| 习题 (§ 4—§ 5)             | (50) |
| 习题                       | (51) |
| 第三章 函数的连续性               | (53) |
| § 1 函数的连续性与间断点           | (53) |
| § 2 初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质 | (60) |
| 习题                       | (64) |
| 第四章 导数及微分                | (67) |

|            |                 |       |
|------------|-----------------|-------|
| § 1        | 导数的概念           | (67)  |
|            | 习题              | (75)  |
| § 2        | 求导数例题           | (76)  |
| § 3        | 函数的和、差、积、商的求导法则 | (80)  |
|            | 习题(§ 2—§ 3)     | (85)  |
| § 4        | 反函数的求导法则        | (87)  |
| § 5        | 复合函数的求导法则       | (91)  |
|            | 习题              | (100) |
| § 6        | 高阶导数            | (103) |
|            | 习题              | (108) |
| § 7        | 函数的微分           | (109) |
|            | 习题              | (116) |
| § 8        | 参数方程所确定的函数的求导法  | (118) |
|            | 习题              | (122) |
|            | 习题              | (123) |
| <b>第五章</b> | <b>导数的应用</b>    | (126) |
| § 1        | 中值定理            | (126) |
|            | 习题              | (133) |
| § 2        | 函数的单调性和极值       | (135) |
|            | 习题              | (144) |
| § 3        | 最大值和最小值问题       | (146) |
|            | 习题              | (151) |
| § 4        | 曲线的凹向及拐点        | (153) |
| § 5        | 函数图形的描绘方法       | (158) |
|            | 习题(§ 4—§ 5)     | (163) |
| § 6        | 罗比塔法则           | (164) |

|                     |              |
|---------------------|--------------|
| 习题                  | (175)        |
| 习题                  | (177)        |
| <b>第六章 不定积分</b>     | <b>(180)</b> |
| § 1 原函数与不定积分        | (180)        |
| § 2 基本积分表           | (184)        |
| § 3 不定积分的基本性质       | (185)        |
| 习题 (§ 1—§ 3)        | (188)        |
| § 4 换元积分法           | (189)        |
| 习题                  | (203)        |
| § 5 分部积分法           | (204)        |
| 习题                  | (209)        |
| § 6 有理函数的积分法        | (209)        |
| 习题                  | (215)        |
| § 7 积分表的使用方法        | (216)        |
| 习题                  | (219)        |
| 习题                  | (220)        |
| <b>第七章 定积分</b>      | <b>(222)</b> |
| § 1 定积分的概念          | (222)        |
| 习题                  | (231)        |
| § 2 定积分的简单性质 中值定理   | (231)        |
| 习题                  | (237)        |
| § 3 定积分基本定理         | (238)        |
| 习题                  | (243)        |
| § 4 定积分的换元积分法与分部积分法 | (245)        |
| 习题                  | (254)        |
| § 5 广义积分            | (255)        |

|                    |              |
|--------------------|--------------|
| 习题                 | (261)        |
| 习题                 | (262)        |
| <b>第八章 定积分的应用</b>  | <b>(264)</b> |
| § 1 微元分析法的解题思路     | (264)        |
| § 2 定积分的几何应用       | (265)        |
| 习题                 | (281)        |
| § 3 定积分的物理应用       | (282)        |
| 习题                 | (288)        |
| * § 4 曲率           | (289)        |
| 习题                 | (296)        |
| 习题                 | (297)        |
| <b>第九章 微分方程</b>    | <b>(300)</b> |
| § 1 基本概念           | (300)        |
| § 2 可分离变量的微分方程     | (305)        |
| 习题(§ 1—§ 2)        | (310)        |
| § 3 齐次微分方程         | (312)        |
| 习题                 | (318)        |
| § 4 一阶线性微分方程及柏努利方程 | (319)        |
| 习题                 | (327)        |
| § 5 可降阶的高阶微分方程     | (328)        |
| 习题                 | (333)        |
| § 6 二阶常系数齐次线性微分方程  | (334)        |
| 习题                 | (340)        |
| § 7 二阶常系数非齐次线性微分方程 | (340)        |
| 习题                 | (355)        |
| 习题                 | (356)        |

|                        |       |
|------------------------|-------|
| <b>第十章 无穷级数</b>        | (358) |
| § 1 无穷级数的概念            | (358) |
| 习题                     | (362) |
| § 2 无穷级数的基本性质及其收敛的必要条件 | (363) |
| 习题                     | (368) |
| § 3 正项级数及其收敛性的判定法      | (369) |
| 习题                     | (377) |
| § 4 任意项级数              | (378) |
| 习题                     | (383) |
| 习题(§ 1—§ 4)            | (384) |
| § 5 幂级数及其收敛半径          | (385) |
| 习题                     | (394) |
| § 6 幂级数的运算及其性质         | (395) |
| 习题                     | (398) |
| § 7 麦克劳林级数             | (399) |
| 习题                     | (404) |
| § 8 初等函数的展开式           | (404) |
| 习题                     | (412) |
| § 9 幂级数在近似计算上的应用       | (413) |
| 习题                     | (417) |
| 习题(§ 5—§ 9)            | (417) |
| <b>第十一章 付里叶级数</b>      | (419) |
| § 1 三角级数 三角函数系的正交性     | (420) |
| § 2 函数的付里叶级数           | (422) |
| 习题(§ 1—§ 2)            | (430) |

|             |                    |       |
|-------------|--------------------|-------|
| § 3         | 奇函数及偶函数的付里叶级数..... | (431) |
|             | 习题.....            | (435) |
| § 4         | 函数展开为正弦或余弦级数.....  | (435) |
|             | 习题.....            | (443) |
| § 5         | 任意区间上的付里叶级数.....   | (443) |
|             | 习题.....            | (450) |
| 习题参考答案..... |                    | (451) |
| 第一章.....    |                    | (451) |
| 第二章.....    |                    | (453) |
| 第三章.....    |                    | (454) |
| 第四章.....    |                    | (455) |
| 第五章.....    |                    | (465) |
| 第六章.....    |                    | (469) |
| 第七章.....    |                    | (477) |
| 第八章.....    |                    | (480) |
| 第九章.....    |                    | (483) |
| 第十章.....    |                    | (489) |
| 第十一章.....   |                    | (495) |

# 第一章 函 数

高等数学研究的主要对象就是函数，而函数的概念及其性质，在中学里已作了比较详细的讨论，为了今后学习的方便，这里，我们作一个简要的回顾。

## § 1 函数的概念

我们在观察某一个现象，或是讨论某一个过程时，常常会遇到许多变量，这些变量之间，往往又是相互联系，相互依赖着的。

**例 1** 初速度为零的自由落体，其路程与时间有如下的关系：

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

这里，路程  $S$  和时间  $t$  就是两个变量， $g$  是重力加速度，在一定的地点，它是一个常量。显然，路程  $S$  随着时间  $t$  的确定而确定。

**例 2** 如果一个长方体的长、宽、高分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ，体积为  $V$ ，则

$$V = xyz$$

这里， $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $V$  都是变量，显然，体积  $V$  是依赖于长、宽、高来确定的。

为了深入的研究变量之间的关系，数学上概括出了函数的概念.本章只讨论两个变量的情况.

**定义** 假设有两个变量  $x$  和  $y$ ，如果变量  $x$  在其变化范围  $X \subseteq R$  ( $R$  为全体实数) 内任意取一个实数值时，变量  $y$  按照一个确定的规律  $f$ ，有唯一的一个实数和它对应，则称  $y$  是  $x$  的函数.记为  $y=f(x)$ .其中， $x$  称为自变量， $y$  称为因变量或  $x$  的函数.  $X$  称为函数的定义域.  $f(x)$  称为函数值.所有函数值的全体称为函数的值域，通常用

$Y=\{y=f(x)|x \in X\}$  表示.也可以简单地记为  $Y=f(X)$ .

在函数的定义中，要求  $x$  有明确的取值范围  $X$ ，还要有一个确定的对应规律  $f$ ，通过它能完全确定变量  $y$  的值，此时  $x$  和  $y$  之间才能构成一个函数关系.因此，定义域和对应规律  $f$  是确定函数关系的两大要素.

函数可以用图示法、表格法、分析法来表示，这点在中学里已经讨论过了，所以，我们不再举例.不过，值得强调的是，一个函数有时往往需要用几个式子来分段表示它.

**例 3** 用直线  $x+y=t$  ( $t$  为参数) 截割正方形  $OABC$ ，求截得的阴影部分的面积  $s(t)$  (参看图1-1).

**解** 当  $0 < t \leq 1$  时，直线截得的图形为直角三角形，此时的面积

$$s(t) = \frac{1}{2} t^2$$

当  $1 < t < 2$  时，直线截得的图形为一五边形 (如图1-1)，此时的面积

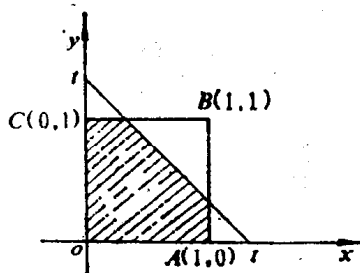


图1-1

$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 - (t-1)^2$$

当  $t=0$  时，直线通过原点， $s(0)=0$ 。

当  $t=2$  时，直线通过  $B$  点，截得的图形为正方形  $OABC$ ，正好， $s(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - (2-1)^2 = 1$ 。综上所述，我们可以得到

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 1; \\ \frac{1}{2}t^2 - (t-1)^2, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

这个关系式表示的是面积  $s$  与变量  $t$  之间的一个函数关系，只不过，在  $t$  的不同取值范围，我们确定  $s(t)$  的公式不同而已。因此，切不可误认为它表示的是两个函数。在实际生活中，我们还可以找到类似的例子。

**例 4** 假设信件重量为  $w$  (单位为克)，邮资为  $s$  (单位为分)，邮局规定，对于国内的外埠平信，按信件重量，每 20 克付邮资 8 分，不足 20 克，以 20 克计。那么，邮资和重量之间的关系，可以表示为

$$s(w) = \begin{cases} 8, & 0 < w \leq 20(\text{克}); \\ 16, & 20 < w \leq 40(\text{克}); \\ 24, & 40 < w \leq 60(\text{克}). \\ \vdots \end{cases}$$

(参看图 1-2)

本书只考虑取实数值的函数。例此，我们约定，在用分

析法表示的函数中, 函数的定义域如果没有特别声明, 则是指使函数  $f(x)$  能取得实数的那些自变量  $x$  的全体.

**例 5** 下列式子中,  $y$  是  $x$  的函数吗? 如果是, 定义域是什么?

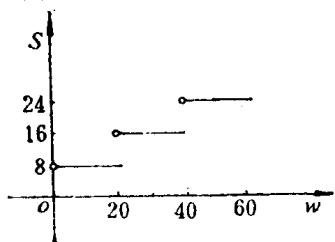


图1-2

- (1)  $y = \sqrt{-x}$ ; (2)  $y = c$  ( $c$  为常数); (3)  $y = \arcsin(3+x^2)$ ; (4)  $y = \ln(x^2+x-2)$ .

**解** (1) 对于  $(-\infty, 0]$  中的每一个  $x$  值, 都有唯一的一个实数  $y$  与它对应, 所以,  $y$  是  $x$  的函数. 定义域  $X = (-\infty, 0]$ .

(2) 表面上,  $y = c$  没有包含  $x$ , 但是, 不论  $x$  取什么实数,  $y$  总有唯一确定的值  $c$  与之对应 (参看图 1-3). 故  $y$  是  $x$  的函数. 定义域  $X = (-\infty, +\infty)$ .

(3) 因为  $3+x^2 \geq 3$ , 所以, 在实数范围内找不到一个  $y$  与  $x$  相对应, 故  $\arcsin(3+x^2)$  不是  $x$  的函数.

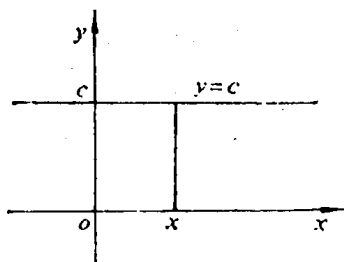


图1-3

(4) 对于  $(-\infty, -2)$  内或者  $(1, +\infty)$  内的每一个  $x$  值, 都有唯一的一个实数  $y$  与它对应, 所以,  $y$  是  $x$  的函数, 定义域  $X = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ .

在实际问题中, 定义域要根据具体问题来确定. 比如, 在

例1中, 如果下落物体开始离地面的高度为  $H$ , 则定义域

$T = \left[ 0, \sqrt{\frac{2H}{g}} \right]$ , 因为, 当  $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$  时, 物体已落到地

面上, 运动过程随即终止了.

## § 2 函数的几种特性

### I 单值函数和多值函数

在函数的定义中, 我们约定, 对于自变量  $x$  在  $X$  内任取一个实数时, 因变量  $y$  只有唯一的一个实数与它对应, 此时, 我们称  $y$  是  $x$  的**单值函数**. 如果对于  $X$  内的任意一个  $x$ , 因变量  $y$  按照确定规律  $f$  有两个或两个以上的实数与之对应, 则称  $y$  为  $x$  的**多值函数**. 例如

$$y^2 = x \quad (x \geq 0);$$

$$y = \operatorname{Arcsin} x \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

今后, 在我们没作特别声明的时候, 总是假设所研究的函数都是单值函数.

### I 单调函数

假设函数  $f(x)$  定义在  $(a, b)$  内, 如果对于  $(a, b)$  内的任意两点  $x_1 < x_2$ , 都有  $f(x_1) \leq f(x_2)$  (或  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ), 则称  $f(x)$  是  $(a, b)$  内的**单调增函数** (或**单调减函数**). 如果对于  $(a, b)$  内的任意两点  $x_1 < x_2$ , 都有  $f(x_1) < f(x_2)$  (或  $f(x_1) > f(x_2)$ ), 则称  $f(x)$  是  $(a, b)$  内的**严格单调增函数** (或**严格单调减函数**). 例如

$y = \ln x$  是  $(0, +\infty)$  内的严格单调增函数;

$y=2^{-x}$  是  $(-\infty, +\infty)$  内的严格单调减函数;

§ 1 中的例 4 所举函数则是单调增函数.

一个函数可能在定义域内的某部分是单调增的, 在另外的部分又是单调减的. 例如

$y=x^2$  在  $(-\infty, 0)$  内是严格单调减的, 在  $(0, +\infty)$  内是严格单调增的.

显然, 严格单调函数必然是单调函数. 今后, 为了方便起见, 我们常把严格单调函数就称为单调函数.

## II 有界函数

如果对定义在  $X$  上的函数  $f(x)$ , 存在着一个正数  $M$ , 恒有

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in X$$

则称  $f(x)$  是  $X$  内的**有界函数**. 记号  $\forall x \in X$ , 表示所有  $X$  内的  $x$ . 我们也可以在定义域的一部分上来谈有界性. 例如

$y=3+\sin 2x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是有界的;

$y=\frac{1}{1+x^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内亦是有界的;

$y=\frac{1}{x-1}$  在  $(1, +\infty)$  内是无界的, 但是, 在区间

$(2, 3)$  内却是有界的.

## IV 奇函数与偶函数

假设函数  $f(x)$  在  $A$  上有定义, 如果对于任意  $x \in A$ , 有  $-x \in A$ , 且  $f(-x) = -f(x)$  (或  $f(-x) = f(x)$ ), 则称函数  $f(x)$  在  $A$  上是**奇函数** (或**偶函数**). 例如

$$f(x)=x^3, \quad f(x)=x+\sin x, \quad f(x)=x \cdot \cos x$$

$$f(x)=\begin{cases} -1, & x < 0; \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

都是奇函数:

$$f(x)=x^2-\cos x, \quad f(x)=x^{2n} \quad (n \text{ 为正整数}),$$

$f(x)=|x|$  都是偶函数.

具有奇, 偶性的函数只是少数, 大量的函数既非奇函数, 也非偶函数. 奇函数的图形对称于原点, 偶函数的图形对称于  $y$  轴, 记住这点是有好处的.

## V 周期函数

如果函数  $f(x)$  满足如下关系:

$$f(x+l)=f(x)$$

其中  $l$  为实常数, 则称  $f(x)$  为周期函数. 使上式成立的最小正数称为  $f(x)$  的最小周期, 通常就简称为  $f(x)$  的周期. 例如

$\operatorname{tg} x$ ,  $|\cos x|$  就是周期为  $\pi$  的周期函数.

正弦交流电的电压与时间之间具有关系

$$u=U\sin(\omega t+\varphi)$$

其中,  $U$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  为常数,  $u$  就是周期为  $\frac{2\pi}{\omega}$  的周期函数.

具有周期性的函数也是极少的, 大量的函数都不是周期函数. 例如,  $x^2$ ,  $e^x$  都不是周期函数.