高等学校大专试用教材

高 等 数 学

上 册

四川省数学会高等数学委员会编

成都科技大学出版社

内容简介

本书是为了满足各种类型大专班高等数学与工程数学的教学需要而编写的，全书分上、下两册。上册内容包括函数、极限、连续、一元函数微积分、常微分方程、无穷级数和付氏级数。内容适当，流畅易懂，便于教学与自学。

本书也可作为本科某些专业（对高等数学要求稍低、授课学时较少的专业）的教科书。

高等学校大专试用教材

高 等 数 学

上册

四川省数学会高等数学委员会编

责任编辑：王泽彬

装帧设计：孟章良

成都科技大学出版社出版发行

成都科技大学印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张16.375

1986年6月第1版 1988年8月第3次印刷

印数：5,401－11,900 字数：354,224

ISBN 7－5616－0252－9/0·25

统一书号：15475.4 定价：3.40元

前言

本书是为了满足各种类型大专班高等数学的教学需要而编写的．由四川省数学会高等数学委员会主持编写工作，由成都科技大学、重庆大学、成都电讯工程学院、成都地质学院、重庆建筑工程学院、重庆邮电学院等六所院校的部分教师执笔编写．

全书分上、下两册．上册的内容包括函数、极限、连续、一元函数微积分、常微分方程、无穷级数和付氏级数；下册的内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、线性代数与概率统计．

本书的编写方针是：

1．符合大专班高等数学的教学要求，适应大专班高等数学的教学需要；

2．反映我省广大教师的教学经验；

3．内容适当，概念准确，叙述详细，文字流畅，明白易懂，既可作为教科书也可作为自学参考书；

4．重视基本运算技能的训练与解决实际问题能力的培养；

5．超出本书范围的论证，有的尽管只作形象直观的说明，但又要做到疏而不漏；

6．精选例题与习题使之紧密地与教材内容配合．

本书在编写过程中还参考了全国高等院校工科数学教材编审委员会于1980年审定的《高等数学教学大纲》的基本要求．

为了满足某些专业的特殊要求，本书还编入了一些具有相对独立性的章节，这些章节标有*号，本书的每章或每节所配习题的答案附于书末，供读者参考.

全书内容可在210学时内讲完．本书不仅可作为各种类型大专班的高等数学与工程数学的教科书，也可作为本科某些对高等数学要求稍低，授课时数较少的专业的教科书.

本书承四川大学胡鹏、敖硕昌两位教授主审，他们仔细地审阅全书，并提出了许多宝贵的修改意见.

本书由重庆大学谢树艺教授、成都科技大学王明慈副教授主编．参加编写的有：成都科技大学王从云、朱明俊；成都地质学院师万瑞、李南赣、邓全福；重庆建筑工程学院曹树孝、白任伦、吴新生；重庆邮电学院陈朝枢、李丽珠、冯晏辉；重庆大学赵中时；成都电讯工程学院朱济生等同志．限于编者的水平，书中缺点、错误在所难免，恳切地希望使用本书的广大读者批评指正.

编者

一九八六年元月于成都

目　　录

第一章 函 数

高等数学研究的主要对象就是函数，而函数的概念及其性质，在中学里已作了比较详细的讨论，为了今后学习的方便，这里，我们作一个简要的回顾.

§1 函数的概念

我们在观察某一个现象，或是讨论某一个过程时，常常会遇到许多变量，这些变量之间，往往又是相互联系，相互依赖着的.

例 1 初速度为零的自由落体，其路程与时间有如下的关系：

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

这里，路程 S 和时间 t 就是两个变量，g 是重力加速度，在一定的地点，它是一个常量. 显然，路程 S 随着时间 t 的确定而确定.

例 2 如果一个长方体的长、宽、高分别为 x、y、z，体积为 V，则

$$V=xyz$$

这里，x、y、z、V 都是变量，显然，体积 V 是依赖于长、宽、高来确定的.

为了深入的研究变量之间的关系，数学上概括出了函数的概念．本章只讨论两个变量的情况．

定义 假设有两个变量 x 和 y，如果变量 x 在其变化范围 $X\subseteq R$（R为全体实数）内任意取一个实数值时，变量 y按照一个确定的规律 f，有唯一一个实数和它对应，则称 y 是 x 的**函数**．记为$y=f(x)$．其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或x的函数．X 称为函数的**定义域**．$f(x)$ 称为**函数值**．所有函数值的全体称为函数的**值域**，通常用 $Y=\{y=f(x)|\ x\in X\}$表示．也可以简单地记为$Y=f(X)$．

在函数的定义中，要求 x 有明确的取值范围 X，还要有一个确定的对应规律 f，通过它能完全确定变量 y 的值，此时 x 和 y 之间才能构成一个函数关系．因此，定义域和对应规律f是确定函数关系的两大要素．

函数可以用图示法、表格法、分析法来表示，这点在中学里已经讨论过了，所以，我们不再举例．不过，值得强调的是，一个函数有时往往需要用几个式子来分段表示它．

例 3 用直线 $x+y=t$（t为参数）截割正方形 $OABC$，求截得的阴影部分的面积 $s(t)$（参看图1—1）．

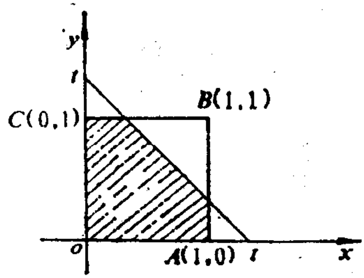

图1-1

解 当$0<t\leqslant 1$时，直线截得的图形为直角三角形，此时的面积

$$s(t)=\frac{1}{2}t^2$$

当$1<t<2$时，直线截得的图形为一五边形（如图1-1），此时的面积

$$s(t)=\frac{1}{2}t^2-(t-1)^2$$

当$t=0$时，直线通过原点，$s(0)=0$.

当$t=2$时，直线通过B点，截得的图形为正方形$OABC$，正好，$s(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^2-(2-1)^2=1$. 综上所述，我们可以得到

$$s(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ \frac{1}{2}t^2-(t-1)^2, & 1<t\leqslant 2.\end{cases}$$

这个关系式表示的是面积s与变量t之间的一个函数关系，只不过，在t的不同取值范围，我们确定$s(t)$的公式不同而已. 因此，切不可误认为它表示的是两个函数. 在实际生活中，我们还可以找到类似的例子.

例 4 假设信件重量为w（单位为克），邮资为s（单位为分），邮局规定，对于国内的外埠平信，按信件重量，每20克付邮资8分，不足20克，以20克计. 那么，邮资和重量之间的关系，可以表示为

$$s(w)=\begin{cases}8, & 0<w\leqslant 20(\text{克});\\ 16, & 20<w\leqslant 40(\text{克});\\ 24, & 40<w\leqslant 60(\text{克}).\\ \vdots & \end{cases}$$

（参看图1-2）

本书只考虑取实数值的函数. 例此，我们约定，在用分

析法表示的函数中，函数的定义域如果没有特别声明，则是指使函数$f(x)$能取得实数值的那些自变量x的全体.

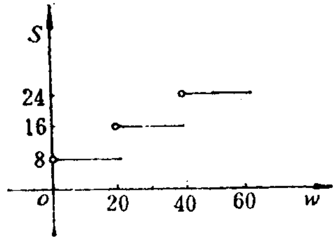

图1-2

例 5 下列式子中，y 是 x 的函数吗？如果是，定义域是什么？

(1) $y=\sqrt{-x}$；(2) $y=c$ (c为常数)；(3) $y=\arcsin(3+x^2)$；(4) $y=\ln(x^2+x-2)$.

解 (1) 对于 $(-\infty, 0]$中的每一个 x 值，都有唯一的一个实数 y 与它对应，所以，y 是 x 的函数. 定义域 $X=(-\infty, 0]$.

(2) 表面上，$y=c$ 没有包含 x，但是，不论 x 取什么实数，y总有唯一确定的值 c 与之对应（参看图 1-3）. 故 y是x的函数. 定义域$X=(-\infty, +\infty)$.

(3) 因为$3+x^2\geqslant 3$，所以，在实数范围内找不到一个y与x相对应，故 $\arcsin(3+x^2)$ 不是 x 的函数.

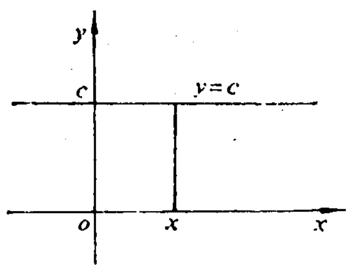

图1-3

(4) 对于 $(-\infty, -2)$ 内或者 $(1, +\infty)$ 内的每一个 x 值，都有唯一的一个实数 y 与它对应，所以，y 是x的函数，定义域 $X=(-\infty, -2)\cup(1, +\infty)$.

在实际问题中，定义域要根据具体问题来确定. 比如，在

例1中，如果下落物体开始离地面的高度为 H，则定义域 $T=\left[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$，因为，当 $t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$ 时，物体已落到地面上，运动过程随即终止了．

§2 函数的几种特性

Ⅰ 单值函数和多值函数

在函数的定义中，我们约定，对于自变量 x 在 X 内任取一个实数时，因变量 y 只有唯一的一个实数与它对应，此时，我们称 y 是 x 的**单值函数**．如果对于 X 内的任意一个 x，因变量 y 按照确定规律 f 有两个或两个以上的实数与之对应，则称 y 为 x 的**多值函数**．例如

$$y^2=x\ (x\geqslant 0);$$

$$y=\mathrm{Arcsin}\,x\ (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

今后，在我们没作特别声明的时候，总是假设所研究的函数都是单值函数．

Ⅱ 单调函数

假设函数 $f(x)$ 定义在 (a,b) 内，如果对于 (a,b) 内的任意两点 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的**单调增函数**（或**单调减函数**）．如果对于 (a,b) 内的任意两点 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的**严格单调增函数**（或**严格单调减函数**）．例如

$y=\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 内的严格单调增函数；

$y=2^{-x}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的严格单调减函数；

§1中的例4所举函数则是单调增函数.

一个函数可能在定义域内的某部分是单调增的，在另外的部分又是单调减的.例如

$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内是严格单调减的，在 $(0,+\infty)$ 内是严格单调增的.

显然，严格单调函数必然是单调函数. 今后，为了方便起见，我们常把严格单调函数就称为单调函数.

Ⅲ 有界函数

如果对定义在 X 上的函数 $f(x)$，存在着一个正数 M，恒有

$$|f(x)|\leqslant M \qquad \forall x\in X$$

则称 $f(x)$ 是 X 内的**有界函数**.记号 $\forall x\in X$，表示所有 X 内的 x.我们也可以在定义域的一部分上来谈有界性.例如

$y=3+\sin 2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的；

$y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内亦是有界的；

$y=\dfrac{1}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 内是无界的，但是，在区间 $(2,3)$ 内却是有界的.

Ⅳ 奇函数与偶函数

假设函数 $f(x)$ 在 A 上有定义，如果对于任意 $x\in A$，有 $-x\in A$，且 $f(-x)=-f(x)$ （或 $f(-x)=f(x)$），则称函数 $f(x)$ 在 A 上是**奇函数**（或**偶函数**）.例如

$$f(x)=x^3,\qquad f(x)=x+\sin x,\qquad f(x)=x\cdot\cos x$$

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 1, & x>0\end{cases}$$

都是奇函数；

$f(x)=x^2-\cos x$，$f(x)=x^{2n}$（n为正整数），

$f(x)=|x|$ 都是偶函数．

具有奇，偶性的函数只是少数，大量的函数既非奇函数，也非偶函数。奇函数的图形对称于原点，偶函数的图形对称于y轴，记住这点是有好处的．

V 周期函数

如果函数$f(x)$满足如下关系：

$$f(x+l)=f(x)$$

其中l为实常数，则称$f(x)$为**周期函数**．使上式成立的最小正数称为$f(x)$的**最小周期**，通常就简称为$f(x)$的**周期**．例如

$\mathrm{tg}\,x$、$|\cos x|$ 就是周期为π的周期函数．

正弦交流电的电压与时间之间具有关系

$$u=U\sin(\omega t+\varphi)$$

其中，U、ω、φ为常数，u就是周期为$\dfrac{2\pi}{\omega}$的周期函数．

具有周期性的函数也是极少的，大量的函数都不是周期函数．例如，x^2、e^x都不是周期函数．