THEMATICAL ANALYSIS

数学分析

GABRIEL KLAMBAUER著

孙 本 旺 译

数 学 分 析

GABRIEL KLAMBAUER著

孙 本 旺 译

湖南人民出版社

一九八一年·长沙

数 学 分 析

孙本旺 译

责任编辑：孟石华

•

湖南人民出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　　湖南省新华印刷一厂印刷

•

1981年5月第1版第1次印刷

字数：410,000　印张：18　印数：1—11,000

统一书号：13109·59　定价：2.00元

译 者 序

这一本书是美国著名数学家加里福尼亚大学S. Kobayashi教授主编的纯粹与应用数学丛书的第三十一本著作。作者G. Klambauer 是加拿大渥太华大学数学系教授.本书是为学过初等微积分和大学一、二年级优秀学生进一步学习数学分析而编写的参考书。

本书内容包括：实数系统、连续性、微分与积分、一致收敛及度量空间等五章。全书取材精炼，叙述流畅，由浅入深，由具体到抽象。对于一般常见的内容作者只作简要叙述，而着重论述数学分析中的一些优美结果以及与高年级数学课程有密切联系的内容。本书各章均配置了大量经过精选的习题，并附有适当的解法或提示，其篇幅约占全书的三分之一。这些习题的质量，一般高于国内流行的吉米多维奇《数学分析习题集》，而低于G.Po′lya和G. Szegö《分析中问题和定理》这本习题集。因此，阅读本书对于深刻掌握数学分析的理论，对于提高解题能力，以及对于进一步学习一些新的抽象数学都会有较大的裨益和启发。目前国内类似于本书风格的教材甚少，译者不揣简陋，特将此书译成中文，作为学生学习数学分析的参考书。

译者尽可能保持原著的风格和特点，并改正了其中的一些讹误，必要的地方还加了译注。但由于时间仓促，虽经译者和沙钰

同志前后几次校对，仍不免有些地方译意不清或增添谬误。我们热诚希望读者如发现有误或不妥之处，请即告诉我们，以便再版时更正。

本书在出版过程中，国防科技大学汪浩、李运樵、吴克裘、李宗正、崔宗崑等同志做了大量工作，译者谨此一并表示衷心感谢。

译 者

1980.10.

序　言

本书的基本内容包括：实数系统，序列和级数，连续性，单变量函数的微分和积分，一致收敛，以及度量空间的基本理论。读者主要对象是念完初等微积分课程的一、二年级大学生，当他们需要进一步深入数学的训练时，面临着如何从“知道怎样计算”过渡到“概念上弄懂为什么”的问题。本书是专门为这些读者编写的。

本书表现的体裁是简洁的，叙述的方法遵循由浅入深的原则，即由比较熟谙的情形出发逐渐过渡到比较抽象的理论。本书精心提供理论证明，对于重要的结论往往采用几种方法予以证明，这将有助于读者理解和掌握。本书各章末尾均配置大量启发性的习题，其中部分习题还给出了解答。这些习题用于扩大本书所讨论的主要内容，并阐明理论的应用。

编写一本教学参考书时，取材问题是具有决定性意义的；但是作者认为删除问题更为重要，因为“少则得”是人们认识的规律。所以我集中力量论述那些重要性毫无异议的问题，并且适当加以综合，以突出本书真正的目标。如果需要更进一步研究高级的课题，建议读者阅读我编写的研究生教材“实分析”（“Real Analysis”，1973）。

Gabriel Klambauer

目　录

第一章　实数系统

在这一章内，我们考虑实数系统的性质，这些对于微积分的基本概念(例如收敛，连续，可微性与可积性）来说，都是非常重要的。但是，在初学者刚开始学习时，这一章前两节的证明的细节可以略去。

1.关于整数、有理数及无理数

正整数（自然数）的集合N满足两个重要的性质；我们将叙述这些性质并建立它们的等价性。

良序原理　任何非空的正整数集有一最小的数。

数学归纳法原理　如果P是一个正整数集，且具有下列性质：

（i）　P含有数1，及

（ii）　凡当P含有正整数n的时候，它也含有正整数$n+1$，

则P包含一切的正整数，就是说，$P=N$。

命题 1　数 1 是最小的正整数。

证明 1　（根据数学归纳法原理）

命S为所有$\geqslant 1$正整数集合，显然，1是在S内。如果正整数n在S内，则$n\geqslant 1$，于是$n+1>n\geqslant 1$，因此正整数$n+1$也在S内。由数学归纳法原理，则知$S=N$。所以，每一个正整数大于或等于1。

证明2 （根据良序原理）

从良序原理则知：有一最小的正整数，比方说s，假设$s<1$。将不等式$0<s<1$同乘以s，则得$0<s^2<s$，这表示s不是最小的正整数，这就引出了一个矛盾，故假设不成立，所以1是最小的正整数。

推论 如果n是一整数，则在n与$n+1$之间没有整数。

证明 假设有一整数k使得$n<k<n+1$。则得$0<k-n<1$，这与1是最小的正整数的命题矛盾。

注 注意，命题“有一最大的正整数n”是错误的。因为它将意味着$n^2=n$，而后者又将意味着：n必将等于1。这是不可能的。

命题2 数学归纳法原理与良序原理是等价的。这意思是说：我们能够从一个推出另一个，只要假定通常的整数的算术性质被满足的话。

证明 （部分Ⅰ）假设良序原理成立，并命S为正整数的集合，

而具有如下性质：

（i） 1是在S内，及

（ii） 若n是在S内，则$n+1$也在S内。

我们必须证明S就是一切正整数的集合N。

命T为不在S内的所有正整数的集合．若T是非空的，则由良序原理便得：T有一最小的数，比方说t．因为1是在S内的最小正整数（这在命题1中根据良序原理已证明），于是$t>1$．故$t-1$是一正整数，又因为$t-1<t$，它必在S内．再由S的第二性质肯定t（因它等于$(t-1)+1$）也在S内，这是一个矛盾，因为S与T是不相交的集．这说明假设"T是非空的"引出了一个矛盾，所以它是错误的，因此集T是空的，从而$S=N$。

（部分Ⅱ）假设数学归纳法原理成立，再设有一非空的正整数集，比方说S，它没有一最小的数。因为1是最小的正整数（这在命题1中，应用数学归纳法原理已证明），则1不在S内，因而它小于S的所有的数。

命T为所有如下的正整数的集，它们都小于S的所有的数．由上证明可见1是在T内。假设整数n是在T内，如果$n+1$是在S内，则由于在n与$n+1$之间没有整数（根据命题1的推论），$n+1$是S的最小的元素，但这与我们关于S的假设矛盾．所以如果n是在T内，则$n+1$必也在T内．由数学归纳法原理则知T包含所有的正整数，因而S是空的。但这与我们原来的假设"S是非空的"相矛盾。故若S是一个非空的正整数集，则S有一最小的元素，从而证明完毕。

数学归纳法原理有一个修改的但等价的形式如下：

如果关于正整数的命题具有下面两个性质，那么它必对于一切正整数为真。这两性质是：

(i) 对于整数 1 命题为真；

(ii) 如果命题对于正整数 n 为真，则它对于整数 $n+1$ 必也为真。

定义 一整数 a 叫做被一整数 $b\neq 0$ 整除，倘若有一个整数 c 使得 $bc=a$ 的话。我们也说：b 整除 a，或者说，a 是 b 的倍数。我们把这个事实记做 $b\mid a$。若 $b\neq 0$ 及 a 不被 b 整除，则我们写作 $b\nmid a$。

容易验证下列性质：

$b\mid a$ 及 $a>0$，$b>0$，这蕴涵 $1\leqslant b\leqslant a$；

$c\mid b$ 及 $b\mid a$ 蕴涵 $c\mid a$；

$c\mid a$ 及 $c\mid b$ 蕴涵 $c\mid ma+nb$ 对一切整数 m,n 成立。

定义 如果一整数 $p>1$ 除去 1 外不被任何较小的正整数整除，则称 p 为一素数。凡大于 1 并且不是素数的正整数叫做合成数。

命题 3 大于 1 的整数或者是一素数或者它是素数的乘积。并且分解成素数的因子分解除去因子的次序不计外是唯一的。

证明 我们首先证明这个事实：凡合成数总可分解成素数的

乘积。

假设这断语不真。则有一合成数，它不能够写成素数的一乘积。命 n 为最小的这样的数(由良序原理这样的数 n 是存在的)，因为 n 是一个合成数，我们可书

$$n=ab,\quad 1<a<n,\quad 1<b<n.$$

因 a 小于 n，故 a 是一素数或者是素数的一乘积；对于 b 也有相似的命题。但这样 $n=ab$ 是素数的一乘积，这是一个矛盾。因此，每一个合成数总可以分解成素数的一乘积。

其次证明因子分解是唯一的。假设存在这样一个合成数，对它来说，因子分解不是唯一的，即

$$Q=p_1p_2\cdots p_k=q_1q_2\cdots q_j.$$

由良序原理可设Q为最小的这样的数，这里$p_1, p_2, \cdots, p_k$与$q_1, q_2, \cdots, q_j$都是素数。显然，所有的p都与所有的q互异，因为不然我们可以消去某个p与某个q，从而有一较小的整数，它具有两个不同的因子分解。我们不妨假设

$$p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_k \text{及} q_1\leqslant q_2\leqslant\cdots\leqslant q_j.$$

因为$p_1\neq q_1$，我们不妨假设$p_1<q_1$。现在考虑

$$P=p_1q_2\cdots q_j.$$

因为$p_1|P$及$p_1|Q$，因而$p_1|(Q-P)$。但$Q-P$是正的，因为

$$Q-P=(q_1-p_1)q_2q_3\cdots q_j.$$

我们写q_1-p_1为素数的一乘积，比方说

$$q_1-p_1=r_1\cdots r_s.$$

于是

$$Q-P=r_1\cdots r_sq_2\cdots q_j.$$

我们已经知道p_1不是诸q_i中任何一个。因为$p_1 \nmid (q_1 - p_1)$，故易知$p_1 \nmid r_i$，对一切i.于是所有的q与r都与p_1互异．另一方面，我们已知$Q-P$被p_1整除，故

$$Q-P=p_1 t_1 \cdots t_h,$$

这里诸t都是素数.于是我们有两个互异的关于$Q-P$的因子分解，其中一个出现p_1，而另一个则否．这违背了Q的极小性质，因为$0<Q-P<Q$.

命题 4 在任何给定的素数的有穷集之外恒有另一个素数，就是说没有最大的素数．

证明 命$q=2\cdot3\cdot5\cdots p$为$\leqslant p$的所有素数的乘积．数

$$q+1=(2\cdot3\cdot5\cdots p)+1$$

不被这些素数之中任何一个所整除．但$q+1>1$,因此或者$q+1$是一大于p的素数，或者$q+1$被大于p的一素数整除．所以素数的数目必是无穷的．

注 命p_n记第n个素数，从前一命题的证明，我们看到：对于某一个$m>n$，$p_m \mid p_1 p_2 \cdots p_n+1$，因而$p_{n+1} \leqslant p_m < p_n^n+1$．

现在我们能够用数学归纳法原理很容易地验证估值

$$p_n<2^{2^n}.$$

假设

$$p_1<2^2,\ p_2<2^{2^2},\ \cdots,\ p_n<2^{2^n},$$

则 $p_{n+1}\leqslant p_1p_2\cdots p_n+1<2^{2+4+\cdots+2^n}+1<2^{2^{n+1}}$ 成立，从而证明了所述的估值。

命题5 若p是一素数，则$\sqrt{p}$不是一有理数，(就是说，两个正整数之比)，而是一个无理数。

证明 断语是说：

$$p=\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{m^2}{n^2}$$

对于自然数m，n来说是不可能的。假设它是可能的，则将有方程

$$pn^2=m^2.$$

但一平方数恒有偶数个的素数因子。上面的方程因而是不可能的，因为在左边我们有一个数，其素数因子的数目是奇数；而在右边同一个数却有偶数个的素数因子，这与素数因子的唯一性相违背。

注 从前一命题的证明我们能够容易地看出：若k（>1）不是一个平方整数，则$\sqrt{k}$必为一无理数。事实上，命p为k的一个素数因子而带有一个奇数幂，则$kn^2=m^2$在左边将有素数因子p，带有一奇数幂，但在右边则否，违反命题3。

命题6　命 k 为一自然数，但不是一平方整数．命U 记所有这样的正有理数的集，它们的平方是大于 k，并命 L记所有不属于U的有理数．则U没有最小数，而L没有最大的数．

证明　假设L含有一最大的数，比方说 a，而U含有一最小的数，比方说 b．则由假设 $a^2<k$ 及 $b^2>k$．我们现在选取两个正整数m与 n 使得

$$m^2>kn^2.$$

并置

$$\frac{ma+nk}{na+m}=a' \quad 及 \quad \frac{mb+nk}{nb+m}=b',$$

则

$$a'-a=\frac{n(k-a^2)}{na+m}>0 \quad 及 \quad b'-b=\frac{m(k-b^2)}{nb+m}<0,$$

$$(a')^2-k=\frac{(ma+nk)^2-k(na+m)^2}{(na+m)^2}=\frac{(m^2-kn^2)(a^2-k)}{(na+m)^2}<0,$$

$$(b')^2-k=\frac{(mb+nk)^2-k(nb+m)^2}{(nb+m)^2}=\frac{(m^2-kn^2)(b^2-k)}{(nb+m)^2}>0.$$

于是$a'>a$，$(a')^2<k$ 及 $0<b'<b$，$(b')^2>k$；这表示a'是在L之内而b'是在U之内，这与a为L的最大数及b为U的最小数的假设违反．

注　命题 6 说明：不是每一个非空的正有理数的集有一最小的数．命题 5 及紧跟其后的注表明：有无穷多个无理数．为了能

认识无理数比有理数多得多，注意我们能够做出一个由开区间组成的集合，这些开区间的全体覆盖数轴上所有的有理点，就是说，数轴上每一个有理点属于这个开区间的集合的某一成员，然而区间的长度之和是任意地小；甚至有理数的集虽是稠密的（这意思是说：任何两个有理数之间都有另一个有理数，例如中点）这个也是真的．事实上，因为有理数可以与正整数的集N做成一一对应（这个事实我们马上就要证明），我们可以考虑一个序列

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots$$

其中r_1，r_2，r_3，…为所有的有理数，并且围绕数轴上的有理点作一开区间I_k，以r_k为其中点，并且I_k具有长度$2^{-k}c$。这样作出的区间覆盖一切有理点的集，并且它们的长度之和是

$$\frac{c}{2}+\frac{c}{2^2}+\frac{c}{2^3}+\cdots=c\text{.}$$

剩下还要验证有理数的集可以与正整数的集N做成一一对应。现在就让我们验证这个事实。

我们首先考虑一个如何序化正有理数$\frac{n}{m}$的法则.（为了避免重覆，假设n与m的最大公约数是1）我们说$\frac{n_1}{m_1}$在$\frac{n_2}{m_2}$之前，假如下列条件(i)或(ii)成立：

(i) $n_1+m_1<n_2+m_2$,

(ii) $n_1+m_1=n_2+m_2$ 及 $n_1<n_2$.

这个规定给予我们一种序化正有理数的方法如下：

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{5}{1},\cdots.$$