

遵循修订大纲 配合统编教材

2

第二版

高一适用

# 新编精解本 高中数学万题选

## 立体几何

储瑞年 主编

北京大学出版社

遵循修订大纲 配合统编教材

# 高中数学万题选

## (新编精解本)

立体几何

(高一适用)

储瑞年 主编

编撰者：朱士中 王人伟 王建民  
董世奎 储瑞年

北京大学出版社

· 北 京 ·

**书 名:** 高中数学万题选(新编精解本)·立体几何

**著作责任者:** 储瑞年 朱士中 王人伟 王建民 董世奎

**责任编辑:** 顾卫宇 王明舟

**标准书号:** ISBN 7-301-03548-9/G · 426

**出版者:** 北京大学出版社

**地址:** 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

**网址:** <http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm>

**电话:** 出版部 62752015 发行部 62559712 理科编辑部 62752021

**电子信箱:** zpup@pup.pku.edu.cn

**排印者:** 中国科学院印刷厂

**发行者:** 北京大学出版社

**经销者:** 新华书店

850×1168 32开本 9.75印张 240千字

2001年7月第1版 2001年7月第1次印刷

**定 价:** 12.00元

## 作者简介



储瑞年 北京师范大学实验中学数学高级教师,兼任全国中小学教材审定委员会中学数学学科教材审查委员,北京市重点高中数学试验教材副主编,《数学通报》编委,参与多部高中数学总复习教学参考书的编写。



王人伟 北京航空航天大学附中数学特级教师,数学教研组长,中国数学奥林匹克高级教练,北京队主教练,全国航空普教协会数学组主任委员,参与多部高中数学总复习教学参考书的编写。

## 作者简介



王建民 中国科技大学附中数学特级教师，数学教研组组长，中国数学奥林匹克高级教练，北京市中学数学学科带头人，市兼职教研员，海淀区兼职教研员，参与多部高中数学总复习教学参考书的编写。



董世奎 中学数学高级教师，中国数学奥林匹克高级教练，北京大学附中原数学教研组组长，曾任海淀区兼职教研员，参与多部高中数学总复习教学参考书的编写。

## 编者的话

### (第二版说明)

高中数学万题选(第一版)自1997年出版以来深受广大读者的欢迎,究其原因,正如第一版编者说明中指出的本书编写指导思想是:“使你的学生既有扎实的数学知识,又具有较强的分析能力和解题技巧”“数学思想应用较多,解法灵活多变”.这正好与当前《中共中央国务院关于深化教育改革、全面推进素质教育的决定》中关于在全国推进素质教育,着重培养“能力强、素质高”的人才的要求和目的相吻合;也正好顺应了近几年来教育部考试中心关于我国普通高考加大改革力度,“立足基础、突出能力考查”的精神.正如有些读者所说,本书的最大特点就是具有超前意识——即前瞻性.读者喜欢本书的另一个原因就是它具有极强的实践性和实用性.

为进一步更好地贯彻中央推进素质教育的精神,体现考试中心“立足基础,突出能力考查”“既重视考查中学数学知识的掌握程度,又注意考查进入高校继续学习的潜能”的指导思想,我们在深入调查研究的基础上,不仅保留了第一版的特色,还对内容进行了较大的修订.

现在的第二版是新编精解本,它是根据最新教学大纲,并与现行高一、高二数学统编教材同步使用,在内容和体例编排上突出了:知识网络结构、思维方法点拨、练习题与综合练习题、练习题解答与提示四大知识板块.本书的主要特点是:

一、知识网络结构 每节按教学体系给出知识要点,以及

它们之间的联系;简明扼要叙述重要的概念、定义、公式及常用的方法,它涵盖了按教学要求学生应掌握的知识点。

**二、思维方法点拨** 这是本书的重点.以精选的典型例题为载体,旨在培养学生的逻辑思维能力.本书通过丰富的典型例题,从不同侧面,用多种解法按教学要求点拨学生的数学思想方法、培养学生的思维能力.通过评析指出学生在解题时易犯的错误,总结出解题规律;不失时机地培养学生用等价变换思想、函数思想和方程思想、分类讨论思想、数形结合思想解题的意识和能力.

**三、练习题与综合练习题** 为便于学生检测学习效果,本书按小节配置了适量的练习题,并按章选编了综合练习题;有的综合练习题是精选的高考试题,使学生通过做这些题目较早地体会本书的实践性和实用性.

**四、练习题解答与提示** 全部练习题附有答案或提示,对综合题、难题附有详解或多种解法,便于教师备课时选配例题和习题,也便于读者自学时参考.

本次修订增强了本书的使用性,加大了培养学生思维能力和自觉地运用数学思想的力度;注重启发思维,强调基础训练、解题思路、数学的思维方法与逻辑推理.它更适合当前高中数学的教学要求,是学生很好的课外辅助读物和教师备课的优秀教学参考书.

参加此次修订的教师有:高一代数董世奎;高一立体几何储瑞年、朱士中;高二代数王人伟;高二解析几何王建民、杜志良.

由于水平有限,书中的错误在所难免,欢迎读者批评指正.

编 者

2001年6月于燕园

# 编者的话

(第一版)

作为一名数学教师和一名高中学生,谁都希望得到一本便于寻找例题和作业,内容丰富、知识面广、系统性强、具有一定深度、数学思想应用较多、解法灵活多变的习题集,陪伴你和你的学生愉快地度过高中阶段的学习,使你的学生既有扎实的数学知识,又具有较强的分析能力和解题技巧.为此,我们根据教学大纲和高考说明编写了此书.

本书的特点是:实用性极强,选题源于教材而高于教材,突出重点,突破难度,内容上做了较多的补充和引伸,寓应试教育于素质教育之中.本书基本上把我们 30 余年教学过程中的典型例题、作业以及在海淀教师进修学校乃至在全国各省市的教师培训班给老师们讲课的精华,按教学顺序都编入了该题选.该题选实际上是我们在北大附中、北航附中和科大附中教学的实录,两届国际数学奥林匹克金牌获得者周宏,今年高考数学满分得主张煜在高中学习时就是用的本题选中的习题.所以该题选特别便于教师在备课时选择补充例题和作业,也特别便于高中学生与教师教学同步寻找补充练习.

本书另一个特点是:既重视双基,又重视能力,由浅入深,层次分明,适用面广.

为了便于读者使用,该书基本上是按与教材同步的形式编写,但为了突出重点,在集合后集中系统编写二次函数的习题.另外把指数、对数相对集中在一起,这样既可集中使用,又可分



散使用。

为了对读者在思维方法和解题方法上有所帮助,我们在书后编写了部分难题的二级提示和解答。

本书可作为高中学生与教材配套的习题集,也可供教师教学时参考。由于水平有限,书中的错误在所难免,欢迎读者批评指正。

编 者

1996年10月于北大附中

# 目 录

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| <b>第一章 直线和平面</b> .....   | ( 1 ) |
| 1.1 平面.....              | ( 1 ) |
| 知识网络结构 .....             | ( 1 ) |
| 思维方法点拨 .....             | ( 3 ) |
| 习题 1-1(答案 227) .....     | ( 7 ) |
| 1.2 空间两条直线.....          | (12)  |
| 知识网络结构 .....             | (12)  |
| 思维方法点拨 .....             | (15)  |
| 习题 1-2(答案 230) .....     | (25)  |
| 1.3 空间直线和平面.....         | (33)  |
| 知识网络结构 .....             | (33)  |
| 思维方法点拨 .....             | (39)  |
| 习题 1-3(答案 235) .....     | (50)  |
| 1.4 空间两个平面.....          | (61)  |
| 知识网络结构 .....             | (61)  |
| 思维方法点拨 .....             | (67)  |
| 习题 1-4(答案 241) .....     | (82)  |
| 综合练习(一)(答案 247) .....    | (94)  |
| <b>第二章 多面体和旋转体</b> ..... | (102) |
| 2.1 多面体 .....            | (102) |
| 知识网络结构 .....             | (102) |
| 思维方法点拨 .....             | (102) |
| 习题 2-1(答案 255) .....     | (143) |
| 2.2 旋转体 .....            | (158) |

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| 知识网络结构 .....          | (158) |
| 思维方法点拨 .....          | (158) |
| 习题 2-2(答案 272) .....  | (173) |
| 2.3 多面体与旋转体的体积 .....  | (187) |
| 知识网络结构 .....          | (187) |
| 思维方法点拨 .....          | (188) |
| 习题 2-3(答案 284) .....  | (207) |
| 综合练习(二)(答案 293) ..... | (218) |
| 习题答案、提示与解答 .....      | (227) |

# 第一章 直线和平面

## 1.1 平 面

### 【知识网络结构】

几何学是研究物体的形状、大小和相互间位置关系的数学学科. 立体几何以空间图形作为研究的对象, 空间图形是由空间的点、线、面构成的, 立体几何主要研究构成空间图形的基本元素的点、线、面的基本关系——位置关系和数量关系.

本单元研究立体几何的基本概念——平面, 主要内容是: 平面的概念、画法及符号表示; 平面的基本性质; 水平放置的平面图形的直观图的画法. 本单元的知识和方法是全章的基础.

#### 1. 平面

平面不是用逻辑的方法定义的原始概念(也叫原名), 而是从桌面、黑板面、平静的水面等物体的感性认识中抽象出来的. “平”和“展”(无限伸展)是平面的两个基本特征.

在了解平面这一概念的基础上, 要学会平面的画法和平面的符号表示.

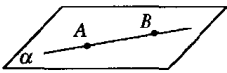
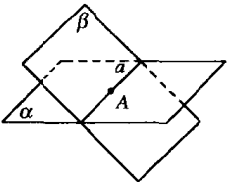
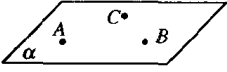
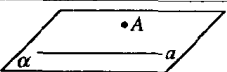
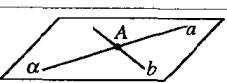
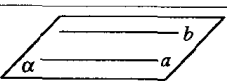
#### 2. 平面的基本性质

平面的三个公理和三个推论(见表 1-1)刻画空间点、线、(平)面的位置关系及基本特征, 是由点、线、面构成空间图形的基本准则.

#### 3. 水平放置的平面图形的直观图的画法

富有立体感, 且能表达空间图形中各基本元素的位置关系与数量关系是直观图的主要特征. 画出水平放置的平面图形的直观

表 1-1 平面的三个公理及其推论

| 名 称         | 符号表示                                                                              | 图 形                                                                               | 作 用          |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 公理 1        | 若 $A, B \in \alpha$ , 则 $AB \subset \alpha$                                       |  | 判定直线在平面内     |
| 公理 2        | 若 $A \in \alpha, A \in \beta$ , 则存在唯一的 $a$ , 使 $A \in a, a = \alpha \cap \beta$   |  | 判定两平面相交或点在线上 |
| 公理 3 及其三个推论 | 若 $A, B, C$ 不共线, 则平面 $ABC$ 存在且惟一                                                  |  | 确定平面的存在性和惟一性 |
|             | 若 $A \notin \alpha$ , 则使 $A \in \alpha$ , 且 $a \subset \alpha$ 的平面 $\alpha$ 存在且惟一 |  |              |
|             | 若 $a \cap b = A$ , 则使 $a \subset \alpha$ 且 $b \subset \alpha$ 的平面 $\alpha$ 存在且惟一  |  |              |
|             | 若 $a \parallel b$ , 则使 $a \subset \alpha$ 且 $b \subset \alpha$ 的平面 $\alpha$ 存在且惟一 |  |              |

图是画出空间图形的直观图的基础,是培养空间想像能力的基础和关键.

应掌握水平放置的平面图形的直观图的斜二测画法的规则;在原图中建立直角坐标系  $Oxy$  时,使  $x$  轴、 $y$  轴能通过多一点的顶点或特殊点,在直观图中对应的两轴夹角为  $45^\circ$ ,即  $\angle x'O'y' = 45^\circ$ ;凡原图中在  $x$  轴( $y$  轴)或平行于  $x$  轴( $y$  轴)的直线上的点,在直观图中应在  $x'$  轴( $y'$  轴)或平行于  $x'$  轴( $y'$  轴)的直线上;凡原图中在  $x$  轴上或平行于  $x$  轴的线段,在直观图中长度不变,凡原图中在  $y$  轴上或平行于  $y$  轴的线段,在直观图中长度折半.

## 【思维方法点拨】

**例 1** 分别在同一图形中画出：

- (1) 两个水平放置的平面；
- (2) 一个水平放置与一个铅直放置的平面；
- (3) 一个水平放置与两个铅直放置且有公共点的平面.

**解** (1) 图 1-1 是两个水平放置的平面  $\alpha$  与  $\beta$ .

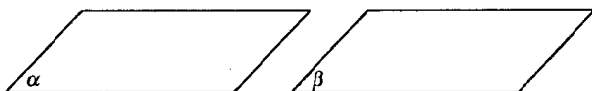


图 1-1

(2) 图 1-2 和图 1-3 是一个水平放置的平面  $\alpha$  与一个铅直放置的平面  $\beta$ .

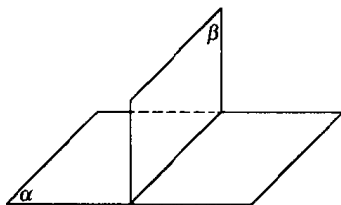


图 1-2

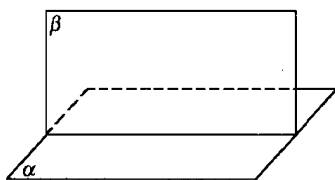


图 1-3

(3) 图 1-4 与图 1-5 是一个水平放置的平面  $\alpha$  与两个铅直放置且有公共点的平面  $\beta$  与  $\gamma$ .

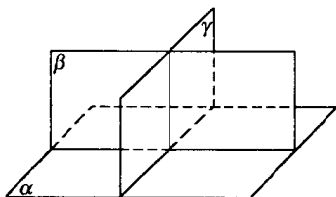


图 1-4

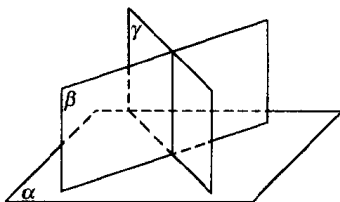


图 1-5

**评析** 水平放置与铅直放置是两种日常生活与生产中最常见的平面的形象,理应熟悉.既有助于概念的理解,又有助于画法的掌握.

**例 2** 已知正方体  $ABCD-A'B'C'D'$ .

(1) 画出两对角面  $ABC'D'$  与  $A'B'CD$  的交线;

(2)  $P$  是棱  $C'C$  上一点, 画出直线  $A'P$  和平面  $ABCD$  的交点.

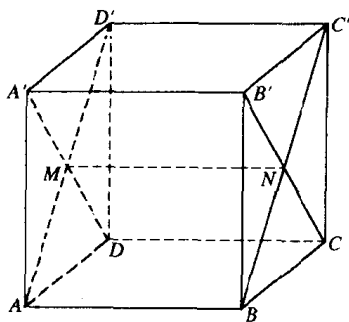


图 1-6

**解** (1) 连结  $A'D$  和  $AD'$  交于点  $M$ , 连结  $B'C$  和  $BC'$  交于点  $N$  (如图 1-6).

$\because M \in$  直线  $A'D$ ,  $A'D \subset$  平面  $A'B'CD$ ,  $\therefore M \in$  平面  $A'B'CD$ ;

$\because M \in$  直线  $AD'$ ,  $AD' \subset$  平面  $ABC'D'$ ,  $\therefore M \in$  平面  $ABC'D'$ .

由此可知, 点  $M$  是平面  $A'B'CD$  和平面  $ABC'D'$  的公共点.

同理可证: 点  $N$  是平面  $A'B'CD$  和平面  $ABC'D'$  的公共点.

连结  $MN$ , 则由公理 1 可知  $MN$  是平面  $A'B'CD$  和平面  $ABC'D'$  的交线.

(2) 连结  $AC$ ,  $A'C'$ , 则  $AC$  是对角面  $A'ACC'$  与底面  $ABCD$  的交线 (如图 1-7).

$\because P \in$  直线  $C'C$ ,  $C'C \subset$  平面  $A'ACC'$ ,  $\therefore P \in$  平面  $A'ACC'$ .

连结  $A'P$ , 并延长交  $AC$  延长线于  $Q$ .  $\because Q \in$  直线  $AC$ ,  $AC \subset$  平面  $ABCD$ ,  $\therefore Q \in$  平面  $ABCD$ .

又点  $Q$  在直线  $A'P$  上, 可知点  $Q$  是直线  $A'P$  和平面  $ABCD$  的交点.

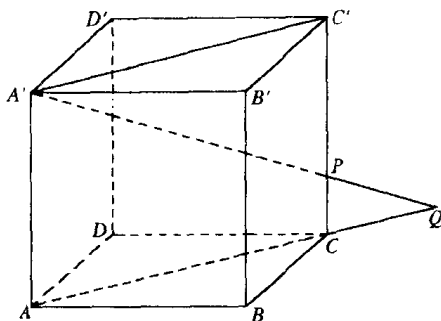


图 1-7

**评析** 依据公理 1, 2, 为确定两平面的交线, 应先确定两平面的相异的两公共点; 为确定平面外一直线与平面的交点, 应先确认直线所在的一个平面与已知平面相交, 再确定两平面的交线与已知直线的交点.

**例 3** 已知一条直线与两条平行直线都相交, 求证这三条直线共面.

**分析** 证明三线共面, 一般应由已知条件, 依据公理 3 或推论, 由其中两直线确定一个平面, 再依据公理 1 证第三条直线在此平面内.

**证明** 设直线  $a, b, l$  满足  $a \parallel b, l \cap a = A, l \cap b = B$ .

由公理 3 的推论 3 可知:  $a, b$  确定一个平面  $\alpha$ , 如图 1-8.

$\because l \cap a = A, l \cap b = B, \therefore A \in \alpha,$

$B \in \alpha.$

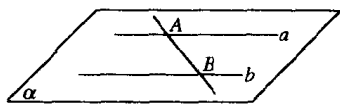


图 1-8

由公理 1 可知直线  $AB \subset$  平面  $\alpha$ , 即  $l \subset \alpha$ .

故直线  $a, b, l$  共面.

**评析** 在空间证明三线共面, 与在平面证明三点共线的方法相类似.

此题的结论也可扩展为: 互相平行的  $n (n \geq 2)$  条直线与同一直线相交, 则所有直线共面.



此题还可以用“同一法”证明：

$\because l \cap a = A, \therefore l$  与  $a$  确定平面  $\alpha$ .

$\because a \parallel b, \therefore a$  与  $b$  确定平面  $\beta$ .

$\because l \cap b = B, B \in l$ , 可知  $B \in \alpha$ ;  $l \cap b = B, B \in b$ , 可知  $B \in \beta$ ,  
 $\therefore a \subset \alpha, B \in \alpha; a \subset \beta, B \in \beta$ .

由公理 3 的推论 1 可知  $\alpha, \beta$  必重合, 即  $a, b, l$  共面.

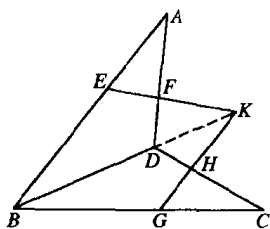


图 1-9

**例 4** 已知  $ABCD$  是空间四边形<sup>①</sup>,  $E, F, G, H$  分别在边  $AB, AD, CB, CD$  上, 且直线  $EF$  和  $GH$  交于点  $K$ , 求证点  $K$  在直线  $BD$  上(如图 1-9).

**分析**  $BD$  是平面  $ABD$  与平面  $CBD$  的交线, 因此只需证  $K$  是这两个平面的公共点.

**证明**  $\because$  直线  $EF \cap$  直线  $GH = K, \therefore K \in$  直线  $EF$ . 而  $EF \subset$  平面  $ABD, \therefore K \in$  平面  $ABD$ . 同理可证  $K \in$  平面  $CBD$ . 因此点  $K$  是平面  $ABD$  与平面  $CBD$  的公共点.

又  $BD$  是平面  $ABD$  和平面  $CBD$  的交线, 由公理 2 可知: 点  $K$  在直线  $BD$  上.

**评析** 要在空间证明一点在一条直线上, 只需证明这个点是两个平面的公共点, 而直线是两平面的交线.

此题也可以改述为证明  $B, D, K$  三点共线. 为证明三点共线, 只需证这三个点都是两个平面的公共点.

应注意空间图形与平面图形的性质的联系和区别.

**例 5** 已知三个平面  $\alpha, \beta, \gamma$  两两相交得三条交线,  $\alpha \cap \beta = l, \beta \cap \gamma = m, \gamma \cap \alpha = n$ , 求证:  $l, m, n$  三条直线或者相交于一点(三线

---

<sup>①</sup> 首尾相接的四条不共面的线段, 且最后一条线段的“尾”与最第一条线段的“首”相接组成的四边形.