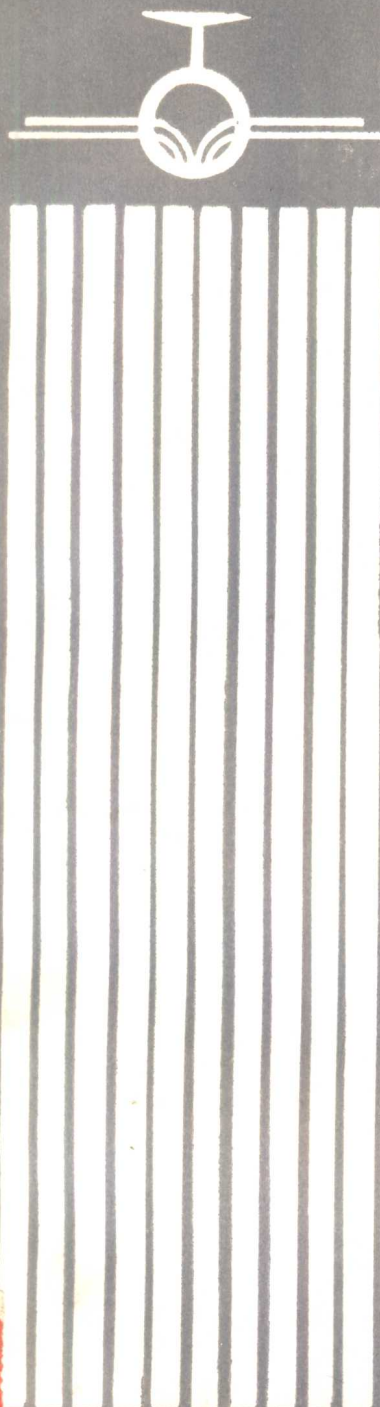


冲压成形 中的 摩擦分析

常荣福 编著



航空工业出版社

冲压成形中的摩擦分析

常荣福 编著

航空工业出版社

1989

内 容 提 要

冲压技术广泛应用于军工、民用等工业部门中,而冲压成形中经常存在的摩擦、磨损和擦伤,又是冲压生产过程中造成废品或损耗的重要原因。因此,对冲压成形中的摩擦进行科学分析,进而在润滑等方面采取相应措施,就成为冲压科研中的热门课题。本书就是为各高等工科院校压力加工专业师生和有关工程技术人员,获得必需的摩擦知识,了解冲压中的摩擦规律,并掌握摩擦分析的思路和方法而编写的,具有较好的实用价值。可供高校有关专业和工矿企业、科研机构工程技术人员参考学习。

冲压成形中的摩擦分析

常荣福 编著

航空工业出版社出版发行

(北京市和平里小关东里14号)

一 邮政编码: 100013—

全国各地新华书店经售

北京同兴印刷厂印刷

1989年7月第1版 1989年7月第1次印刷

787×1092毫米 1/16 印张: 16.625

印数: 1—1500 字数: 415 千字

ISBN 7-80046-128-9/TH·012

定价: 3.40元

序 言

金属薄板冲压加工具有生产率高成本低的优点，广泛为各种工业所采用，并在国民经济中占有相当重要的地位。因此，进一步提高其效益和减少其损耗已成为工业界与学术界共同瞩目的问题。

冲压加工中最大的损耗来自摩擦、磨损与擦伤。摩擦力是冲压加工中必然出现的外载荷之一，恰当利用之，可收到改善板材成形性能和提高产品质量的效果；如果听之任之或用之不当，也可造成模具磨损加快、废品率增高和能耗过大等严重缺陷。

为了进一步提高我国冲压生产的效益，加快我国冲压成形技术的发展，要求从事冲压技术人员能更多地掌握一些有关摩擦学的基础知识，具备更强地分析和利用摩擦的能力。鉴于上述需要，编者将三次授课的讲稿改编成此书。

全书分两部分，共十一章。前四章介绍摩擦学的基础知识；第五章通过一些实例说明金属塑性变形中摩擦的特点；第六到十一章结合冲压工艺的实际，分别对冲裁、弯曲、拉深、拉胀、扩孔以及软模成形等工艺过程中摩擦的影响进行了分析。因编者水平有限，热诚欢迎读者批评指正。

本书初稿曾分别请王宝仁高级工程师、谢冰副教授、任沛田高级工程师进行了审阅，提出了不少修改意见，特此致以谢意。

编 者

1988年6月

目 录

第一部分 摩擦学的基础知识

第一章 表面性质与表面接触	(1)
§1 金属表面的特性	(1)
§2 固体表面间的接触	(7)
§3 接触物理学与接触化学	(17)
第二章 摩擦	(21)
§1 概述	(21)
§2 摩擦的成因	(22)
§3 摩擦理论综述	(29)
§4 非金属材料的摩擦	(32)
§5 滚动摩擦	(38)
第三章 磨损与擦伤	(44)
§1 磨损的特点与分类	(44)
§2 磨损的机理	(45)
§3 影响磨损的因素	(54)
§4 擦伤	(58)
§5 摩擦与磨损的测试方法	(61)
第四章 润滑与润滑剂	(67)
§1 前言	(67)
§2 润滑方式	(67)
§3 流体动压润滑	(69)
§4 边界润滑	(74)
§5 混合润滑	(77)
§6 固体润滑	(78)
§7 润滑剂的成分	(79)
§8 半流体润滑剂	(85)
§9 润滑剂的选用	(86)

第二部分 冲压成形中的摩擦分析

第五章 金属塑性成形的摩擦特点	(92)
§1 镦粗加工中的摩擦	(92)

§ 2	轧制加工中的摩擦	(95)
§ 3	挤压加工中的摩擦	(97)
§ 4	切削加工中的摩擦	(100)
§ 5	金属塑性变形中摩擦的特点	(103)
第六章	下料与冲裁加工中的摩擦	(105)
§ 1	下料加工	(105)
§ 2	冲裁加工	(106)
§ 3	精密冲裁	(118)
§ 4	模具的磨损与寿命	(122)
第七章	弯曲成形中的摩擦	(125)
§ 1	前言	(125)
§ 2	纯弯矩弯曲	(126)
§ 3	板材弯曲的成形极限与试验	(130)
§ 4	板件弯曲后的回弹现象	(136)
§ 5	板件弯曲后的残余应力	(140)
§ 6	压弯成形中的摩擦	(141)
§ 7	绕弯与拉弯成形中的摩擦	(151)
§ 8	辊弯成形与多位滚弯成形中的摩擦	(158)
第八章	拉深成形中的摩擦	(163)
§ 1	前言	(163)
§ 2	拉深成形的机理与摩擦	(164)
§ 3	变薄拉深的机理与摩擦	(184)
第九章	拉胀成形中的摩擦	(192)
§ 1	前言	(192)
§ 2	局部胀形的机理与摩擦	(192)
§ 3	拉胀与拉深的综合成形	(202)
§ 4	加拉压形的机理与摩擦	(214)
§ 5	拉形成形中的摩擦	(214)
第十章	扩孔与收口成形中的摩擦	(219)
§ 1	前言	(219)
§ 2	扩孔成形的机理与摩擦	(220)
§ 3	收口成形的机理与摩擦	(225)
第十一章	几种软模成形中的摩擦	(235)
§ 1	前言	(235)
§ 2	橡皮成形的机理与摩擦	(235)
§ 3	液压机械成形的机理与摩擦	(250)
§ 4	强制润滑拉深成形的机理与摩擦	(252)
§ 5	等静压拉深成形的机理与摩擦	(252)
§ 6	流体静压润滑成形	(253)

§ 7 吹胀成形.....	(254)
§ 8 吹塑成形中的摩擦	(254)
§ 9 爆炸成形中的摩擦	(255)
参考文献.....	(257)

第一部分 摩擦学的基础知识

第一章 表面性质与表面接触

§ 1 金属表面的特性

物体的表面结构、表面缺陷、表面形貌及表面的物理化学性能等都和摩擦、磨损、润滑有着密切的因果关系，所以在讨论表面间的相互作用之前，对这些概念稍加阐述，可能对问题的了解会有裨益。

§ 1.1 金属表面层的结构

金属表层在结构上不同于基体材料，基体材料多为晶体结构，从宏观上常假定是均匀的。而表层结构却是由若干组织不同的层次所组成。图1-1为磨削加工后的钢件表层剖面，由里及表地呈现出如下层次：

(1) 基体材料；

(2) 变形层：经加工曾产生过弹性变形与塑性变形的层次。该层次在加工完后，常有残余应力保留下来；

(3) 加工变质层：又称贝氏层 (Bielly Layer)。该层次因受刀具切削热的作用，局部发生熔化和流动，随即又被基体冷激淬火，于是形成了微细晶质层或非晶质层。该层一般具有较高的硬度；

(4) 氧化层：或称污染层。如钢材零件的表层由表及里因被氧化的程度不同，又分为：外层系 Fe_2O_3 ；中层系 Fe_3O_4 ；内层系 FeO 等；

(5) 沉积层：由尘埃或油污沉积而成；

(6) 吸附层：系吸附于金属表面的氧分子或水蒸气层。

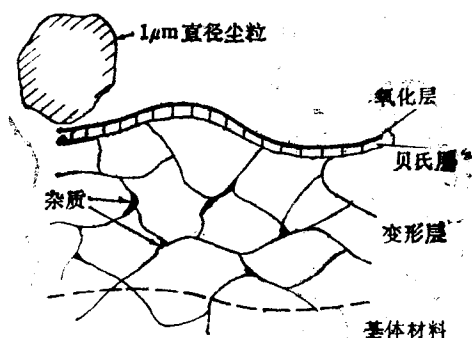


图 1-1 金属表层的结构

§ 1.2 表面形貌

宏观看似乎很光滑的加工表面，在显微镜下观察，却布满高低不平的尖峰和凹谷。这种形貌上的特征对摩擦力的产生有着重要意义。

形成金属表面不平的原因可归结为：

- (1) 结晶时,临近自由表面的晶粒容易伸出表面。
- (2) 塑性变性时,临近自由表面的晶粒在扭转或滑移中容易伸出表面。
- (3) 切削加工时,表面晶粒被撞击导致破碎而形成高低不平的表面。
- (4) 受切削刀具或机床振动的影响,而形成表面的起伏不平。

由上述原因所形成的零件表面形状误差大致可分为以下三类:

- (1) 宏观几何形状误差,常称为表面形状误差。对于平面可用直线度和平面度来表示;对圆柱面可用圆柱度和圆度来表示。
- (2) 表面波紋度:系零件表面周期性出现的一种表面形状误差,如图1-2所示。波紋度有两个重要参数,即与高度特性有关的参数和与间距特性有关的参数。

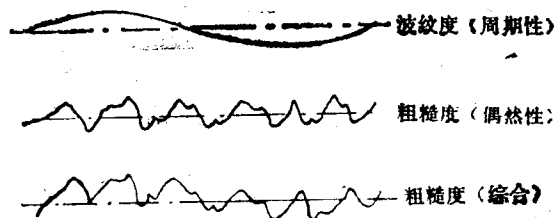


图 1-2 金属表面的波紋度

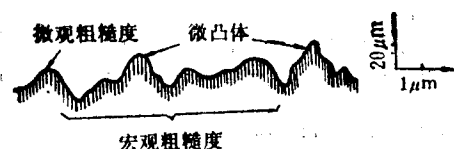


图 1-3 宏观与微观粗糙度

(3) 表面粗糙度:如果将波紋度叫作大尺寸有周期性的形状误差,那么表面粗糙度可称作小尺寸无周期性的形状误差。严格说来,粗糙度还可以划分为宏观与微观两类,如图1-3所示。

总之,金属表面形貌主要由上述三类误差综合构成。

图1-4为辗压板材沿垂直轧向实测的表面形状。实际金属的表面可能分布有划伤、沟槽、起皮、裂纹等缺陷,尤其是脆性氧化层内常分布有裂纹,如图1-5所示。

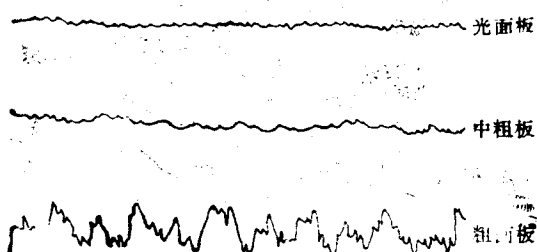


图 1-4 光、中、粗三种板材粗糙度

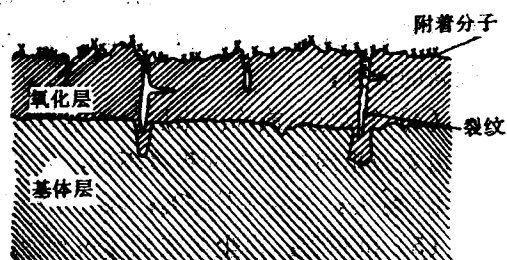


图 1-5 分布在表面的袋纹

摩擦学中非常重视金属表层上的凸起部分,通常称作微凸体 (*Asperities*) 或叫峰元、尖峰、凸峰等。因为实际上,两物体表面总是首先从微体间的接触开始,所以微凸体的形状、高度、分布密度以及其物理化学性质等,都对摩擦有着直接的影响。

§ 1.3 表面形貌的测量和表示方式

测量表面形貌的方法很多,用显微镜可测出微凸体的方位和间距,但难以测出微凸体的高度;用扫描电镜可获得有关形貌的细节和立体象的资料,但仅限于尺寸较小的样品;用光干涉显微镜也只能显示出精加工后表面的轮廓和横截面;迄今工程上采用最广的是触针测量法的电动轮廓仪。它用一根很尖的金刚石触针划过要测的表面,经过电子放大可描绘出较长的横截面的轮廓。但也有不足处,它只能测单线轮廓,对各向不同的表面,只能用相隔一定距离的多条线表示。

为了提高轮廓仪的分辨率,测时加大垂向的放大倍数,故绘出的轮廓是失真的,如图1-6所示。看起来象犬牙林立的微凸体,实际上微凸体的坡度多数在 $5^{\circ}\sim 7^{\circ}$ 范围内。

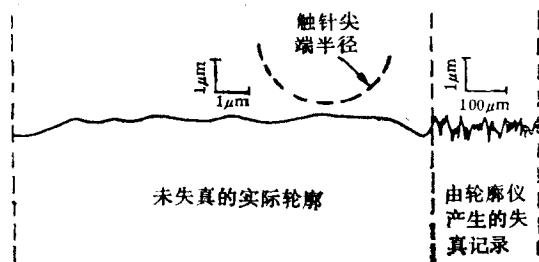


图 1-6 电动轮廓仪的测量原理

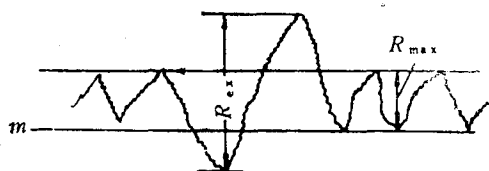


图 1-7 不平度最大高度 R_{max}

评定表面粗糙的指标,一般采用轮廓的算术平均偏差 R_a 和不平度的平均高度 R_z 来表示。从摩擦学的角度看,还应考虑不平度的最大高度 R_{max} 。

(1) R_{max} :是指表面经常出现的最大高度。应注意,如图1-7中偶然出现的特大高度 R_{xx} ,并不能代表整个表面的不平度特征^[17]。

(2) 轮廓算术平均偏差 R_a :在取样长度 L 内,被测轮廓上各点至轮廓中线 m 的距离($y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$)绝对值的平均值,参见图1-8。 R_a 又可缩写为C L A (Center-Line-Average),其计算公式为:

$$R_a = \frac{1}{L} \int_0^L |y| dl$$

或近似地:

$$R_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i| \quad (1-1)$$

式中: n 为测量点的数量。

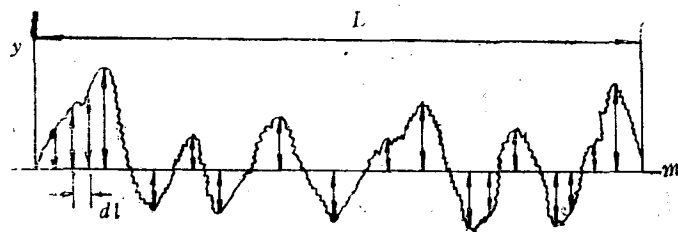


图 1-8 轮廓的 R_a 与 R_z 值的测量

(3) 轮廓的均方根偏差 R_q ：为在取样长度 L 内，被测轮廓上各点至中线 m 的距离的均方根平均值。 R_q 又可缩写为RMS (Root-Mean-Square Roughness)，其计算公式为：

$$R_q = \left[\frac{1}{L} \int_0^L y^2 dl \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-2)$$

R_s 与 R_q 的关系为：

$$R_q = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot R_s \approx 1.25 R_s \quad (1-3)$$

(4) 不平度平均高度 R_s ：又称为微观不平度十点高度。在取样长度 L 内，以某平行于中线的任意直线为起点，测量五个峰点和五个谷点之间的平均距离，参见图 1-9 所示。其计算式如下：

$$R_s = \frac{(y_2 + y_3 + y_4 + y_8 + y_{10}) - (y_1 + y_5 + y_6 + y_7 + y_9)}{5} \quad (1-4)$$

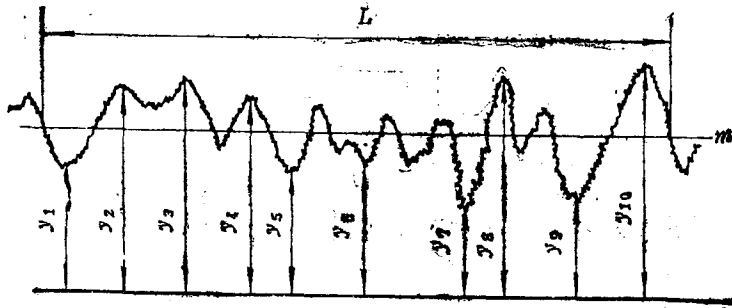


图 1-9 不平度平均高度 R_s 的测量

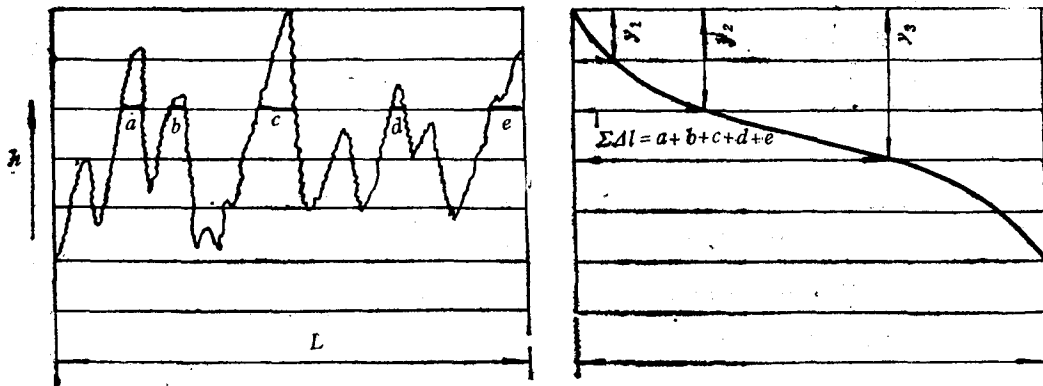


图 1-10 支承面曲线的求法

(5) 支承面曲线：随着表面微凸体的磨损，其支承面积也越来越大。将长度 L 段内的轮廓线沿纵轴作一系列横向平行线，如图1-10所示。按不同的高度 $h_1, h_2, h_3, \dots$ ，等取轮廓线内的长度总和 $\Sigma \Delta L_1, \Sigma \Delta L_2, \Sigma \Delta L_3, \dots$ ，等，可得到一系列点，将这些点联成曲线，即为支承面曲线。此曲线是阿培特(Abbott)最先提出的，故又称为阿培特支承面曲线(Abbott

Bearing Curve)。支承面曲线主要用来计算摩擦副间的真实接触面积，真实接触面积通常只是名义接触面积的很小一部分。大部分加工后的金属表面的支承面曲线从30%到70%一段近似为斜直线，在摩擦学中常用此线段的斜率 P 作为一个说明表面轮廓的特性指数。

(6) 微凸体顶点的平均圆角半径 β 。

(7) 微凸体的平均密度 N_v ，单位是个数/mm²。

(8) 微凸体顶点间的平均距离 L_v 。

§1.4 表面轮廓的统计学特性

从统计学的角度，可将表面轮廓形状的变化看作是一平稳的随机过程。如果忽略其中属于低频谱的周期性变化，仅考虑属于高频谱的随机变化，则偏差高度的分布可写为：

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) dy$$

y 为量自中线 m 的偏差高度， $\psi(y)$ 为高度分布的概率密度函数。

如果将轮廓线沿横坐标分成若干个距离为 Δl 的小段，测出各 l_i 点的 y_i 值，将有相同高度的段合并在一起，则可得到图1-11右侧所示的台阶形分布图，然后再改用光滑曲线表示之。

大多数加工表面的轮廓高度都呈高斯(Gaussian) 正态分布，如图1-12所示。

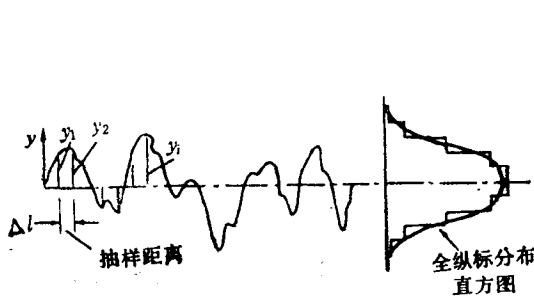


图 1-11 轮廓高度的分布曲线

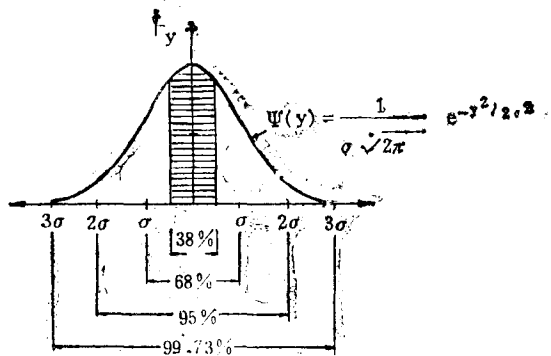


图 1-12 典型的高斯分布曲线

该分布曲线通常写成下面的标准形式：

$$\psi(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \quad (1-5)$$

式中 σ 为高度分布的标准偏差，其定义与(1-2)式中的 R_q （即RMS值）相同。

图1-12中的高斯曲线其横坐标是从 $-\infty$ 扩展到 $+\infty$ ，但具体的表面轮廓是不可能的，一般按 $\pm 3\sigma$ 的有限极限值截取，此段曲线下所包括的面积为99.73%。若按 $\pm 2\sigma$ 截取，则只包括95%。这样就可以使随机事物获得定量的指数 σ 。

应该指出，并不是所有的金属表面轮廓都符合高斯正态分布的规律，也有不少表面轮廓是按偏态高斯曲线、矩形或三角形等曲线形态分布的。但实测证明，冷、热辗压的金属薄板几乎全是按高斯曲线分布，这对研究板材成形中的摩擦问题带来很大的方便。

§1.5 表面的物理化学性质

这里所说的表面是指干净未被污染的表面，这种表面在大气条件下是难以存在的，但是在压力加工的过程中却可瞬时显现。这是由于金属经塑性变形，表面面积扩张，短期出现未被污染的新生表面。这些洁净表面的出现对摩擦和磨损都有很重要的意义。

金属为多晶体结构，有体心立方、面心立方和密排六方晶格三种。以图1-13所示的面心立方晶格为例，原子1的邻近原子为位于同平面的2，3，4，5和平面上下晶格内的6，6'，7，7'，8，8'，9，9'共有12个结合键。设此时原子1应具有的结合键能为 $6\sqrt{3}b$ ，但当原子1位在自由表面上时，则其周围将少掉6'，7'，8'，9'四个原子，结合键只有8个，其用掉的结合键能为 $4\sqrt{3}b$ 。因此位于自由表面的每个原子较晶体内部原子尚有 $2\sqrt{3}b$ 键能未用，这部分富裕出来的键能就是构成物体表面自由能的主要部分。

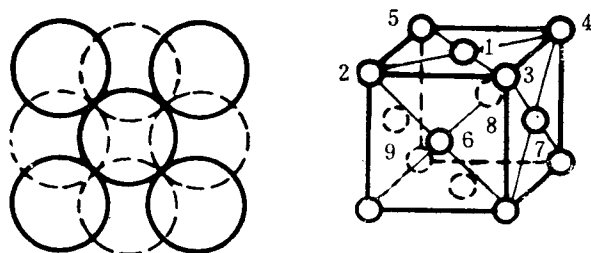


图 1-13 面心立方晶格的原子排列

表面自由能的另一组成部分为表面熵。表面熵由两部分组成，一为振动熵，一为组态熵，这两种熵的增加将使表面能降低。

液体表面的分子都受指向液体内部的吸引力作用，如将液体内的分子移到表面，就要克服此引力而做功。这就是说，表面分子比内部分子有较大的势能。表面全部分子所具有的势能的总和就叫表面能。液体有缩小表面面积的倾向，通常称表面张力。

固体的表面能可通过将液体滴到表面上时，液珠形成的形状来推算。参见图1-14，当固体、液体、气体三者的表面自由能达到平衡时，则有以下式：

$$e_{12} + e_{23} \cos \alpha = e_{13}$$

$$\alpha = \arccos \left[\frac{e_{13} - e_{12}}{e_{23}} \right] \quad (1-6)$$

式中：

α ——固液界面切线的夹角；

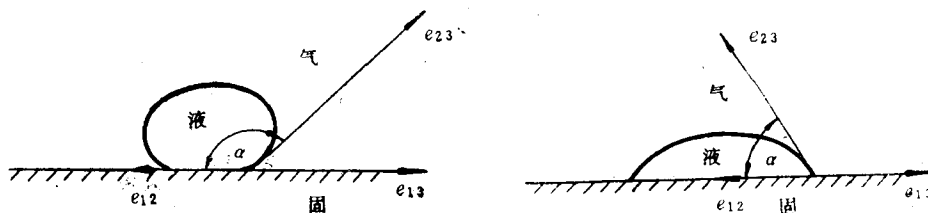


图 1-14 固液界面的接触角

e_{12} ——固液界面间的表面能；

e_{23} ——气液界面间的表面能；

e_{13} ——固气界面间的表面能。

当 $\alpha < 90^\circ$ 时，能呈现润湿现象；当 $\alpha > 90^\circ$ 时，不能润湿；当 $\alpha \rightarrow 0^\circ$ 时，为完全润湿。故可用 α 角来比较液体润滑剂的润湿能力。

固体金属的表面能较难测定，但至少比水要大20倍以上。金属都具有使其表面能趋向最低的本能，或者说，使位于自由表面的原子排列达到平衡。所以，当表面暴露在大气中时，表面会攫取大气中的氧与之氧化。如果两金属的自由表面相距十分近时，两表面为了使表面能降低下来，于是彼此晶格会结合起来，出现粘着（*Adhesion*）或叫冷焊接现象。

§ 2 固体表面间的接触

对摩擦现象作任何分析，都需要了解接触面的物理化学性质和力学特性。本节中暂不讨论界面间有润滑剂的固体相互接触。

§ 2.1 接触模型和接触面积

实际的金属表面在任何情况下都不可能是绝对光滑的，因此当两表面互相接触时具有不连续性和不均匀性，如图1-15所示。于是出现两种含义不同的面积：

$$A_0 = a \cdot b$$

$$A_r = \sum_{i=1}^n A_i \ll A_0 \quad (n \text{ 为实际接触点数})$$

(1) 名义（或几何）接触面积 A_0 ，即相接触的固体互相重叠的表观面积。

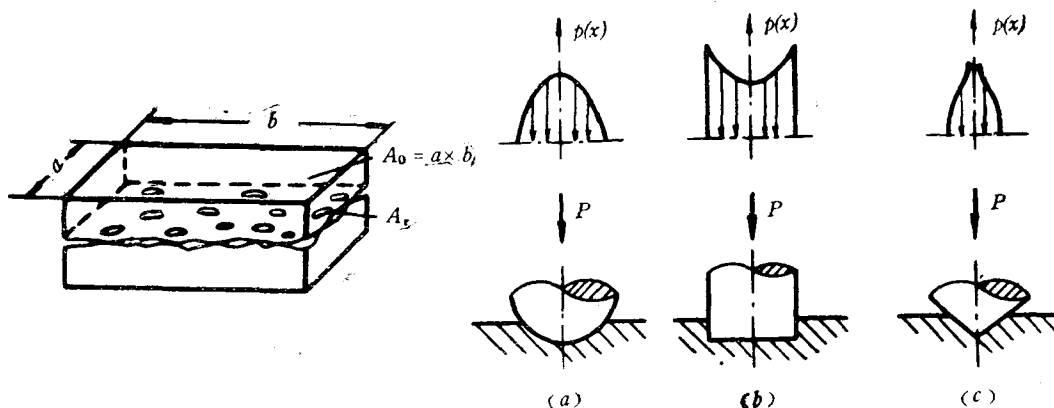


图 1-15 两种不同的接触面积

图 1-16 三种微凸体模型

(2) 真实接触面积 A_r ，即各微凸体实际接触面积的总和。

一般情况下， A_r 约为 A_0 的0.01~0.1%。 A_r 虽然是一个很小的值，但其大小和分布却对整个摩擦学的研究起着决定性的作用。因此在真实接触面积的估算方法和试验测定方面都曾进行过大量的研究工作。

当两个粗糙表面相互接触时，接触首先发生在两表面上最高的微凸体之间。随着加载过

程的进行,先接触的微凸体产生弹性和塑性变形,于是两表面的次高度微凸体也逐步参与接触,从而接触点不断增多,真实接触面积也不断增大。按这样的接触过程,研究表面间的接触,必须先从微凸体的接触开始。

为便于研究起见,通常将微凸体归纳为三种形状的模式,参见图1-16所示。半球形、圆柱形和圆锥形,其中以半球形模型用得最多。关于微凸体的接触模型,学者们曾提出过种类繁多的模式,但大多数认为接触模型可归为两类:(1)球面与球面接触;(2)球面与平面接触。

§2.2 接触力学

在摩擦学中,很多接触问题要涉及到圆柱体、球体等曲面体间的接触,如滚动轴承、齿轮等的接触。对于微凸体的接触,也可看作是光滑曲面间的接触。为简化起见,先将整个物体假定为半无限体,在此假定下,只考虑接触区以及距该区一定范围(1~3mm)内的次表面部分的应力与变形,而不考虑整个物体的受力与变形。

§2.2.1 局部加载产生的应力场

设在图1-17(a)中 xy 平面内有一单位长度法向载荷 P 作用在半无限体表面的 o' 点上, o' 点坐标为 $(b,0)$ 。参见图1-17(b), P 值在 z 坐标上皆相等;则 xy 平面内的弹性应力场可按以下步骤求出。根据铁木辛克(S.timoshenko)的《弹性原理》,沿 z 方面取单位长度,场中任意点的径向应力可写为:

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi r} \cos\theta \quad (1-7)$$

式中: σ_r 为 σ_r 作用点到 o' 点间的直线距离。

θ 为 σ_r 与 o' 点垂线的夹角。

若设切向应力 σ_θ 和剪应力 $\tau_{r\theta}$ 等于零。则(1-7)式说明 σ_r 随 r 和 θ 的减小而增大。对此可利用莫尔圆求出该点的水平、垂直和剪应力:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_r}{2} (1 - \cos 2\theta) = -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{yx^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_r}{2} (1 + \cos 2\theta) = -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_r}{2} \sin 2\theta = -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{y^2x}{(x^2 + y^2)^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

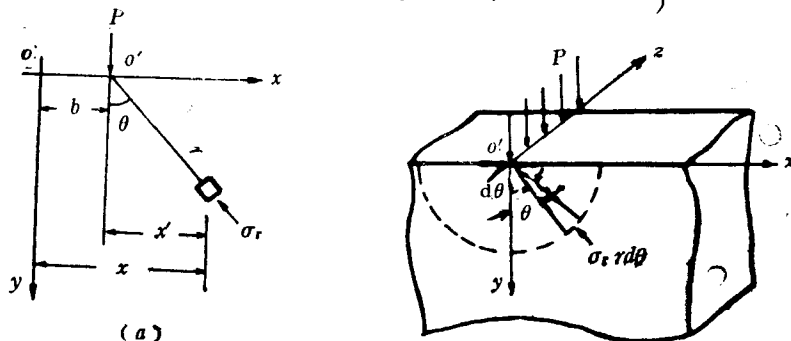


图 1-17 作用在半无限体上的线性载荷所产生的应力场

如果 o' 点施加一个侧向力 F 时, 参见图1-18, 则有:

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi r} \cos \theta \quad (1-9)$$

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$

同样利用莫尔圆可求出:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2F}{\pi} \left[\frac{y^2 x}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ \sigma_y &= -\frac{2F}{\pi} \left[\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ \tau_{xy} &= -\frac{2F}{\pi} \left[\frac{yx^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

如果令 $F = \mu P$, 其中 μ 为摩擦系数, 并把任意点 (x, y) 上的 P 和 F 产生的应力分量相加起来, 则可得到最简单的线接触部位下表面中的应力场分布情况。

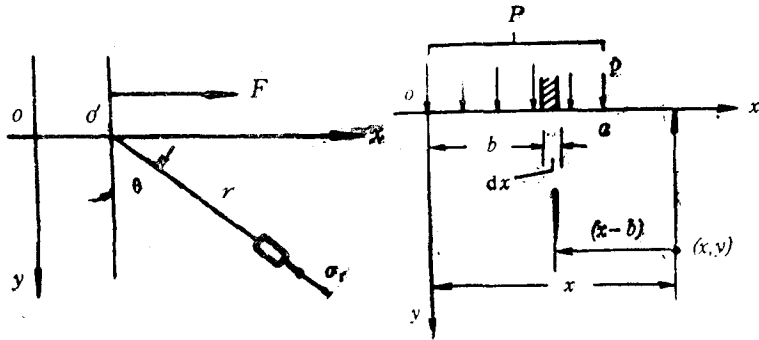


图 1-18 作用在半无限体上切向
载荷所产生的应力场

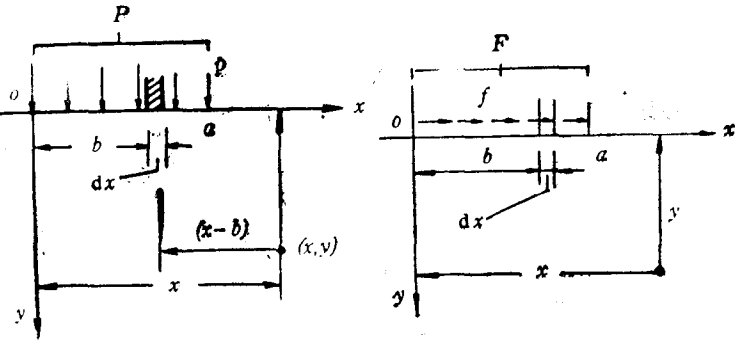


图 1-19 均布载荷作用的情况

(1-7) 式与 (1-9) 式在 $r=0$ 处的应力将为无限大, 这显然与实际不相符。因为实际的载荷只能作用在一定面积上, 而不可能作用在一几何点上。设载荷均布在从 o 到 a 的一段内如图1-19所示。则有:

$$\left. \begin{aligned} P &= \int_0^a p dx = p \cdot a \\ F &= \int_0^a f dx = \int_0^a \mu p dx = \mu \cdot P \\ \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \int_0^a \left[\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right] dx \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi} \int_0^a \left[\frac{y^2 x}{(x^2 + y^2)^2} \right] dx \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x' &= -\frac{2F}{\pi} \int_0^a \left[\frac{yx^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dx \\ \sigma_y &= -\frac{2F}{\pi} \int_0^a \left[\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right] dx \\ \tau_{xy} &= -\frac{2F}{\pi} \int_0^a \left[\frac{y^2 x}{(x^2 + y^2)^2} \right] dx \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

根据(1-11)和(1-12)两式可得出应力场内任意点上的应力值。上式为弹性解, 如果当某点上的最大剪应力已达到材料的临界剪切应力 k 时, 则该点将进入塑性变形。因而, 只要晓得应力场内各点的最大剪应力值, 就可以确定出弹性变形区与塑性变形区的分界线来。在平面应变状态下, 最大剪应力总是出现在 xy 平面内, 该平面内的最大剪应力就是莫尔应力圆的半径, 参见图1-20

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} = -\frac{P}{\pi r} \cos \theta \quad (1-13)$$

如果设想有一直径为 b 的圆, 如图1-21所示, 则有:

$$r = b \cos \theta$$

$$\tau_{\max} = -\frac{P}{\pi b} \quad (1-14)$$

在这个以 b 为半径的圆上, 各点有相同的最大剪应力。利用这个概念就可以确定 $\tau_{\max}$ 达到极限值 k 的位置, 即开始塑性变形的地点。

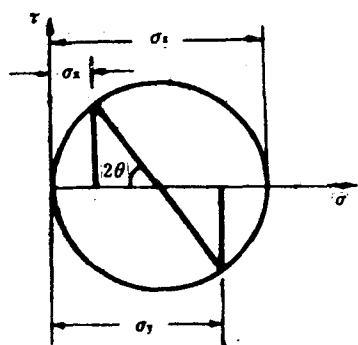


图 1-20 xy 平面内的莫尔圆应力图

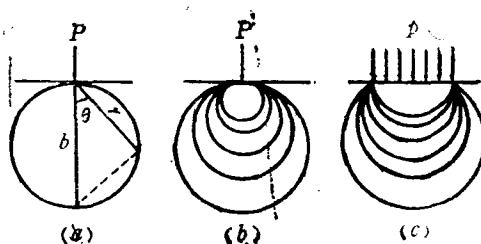


图 1-21 等最大剪应力线的图形

(a) 集中载荷下参数间的关系; (b) 集中载荷;
(c) 均布载荷

§ 2.2.2 赫芝接触

在机械工程中, 两零件之间以弧面作相互接触是一种常见的配合方式, 关于这种特殊的局部接触, 赫芝 (Hertz) 首先给出其弹性解, 所以通常将这类接触称之为赫芝接触 (Hertz Contact), 赫芝接触理论不仅广泛的应用于静态弧面接触中, 也广泛的用于动态接触中。在此只能将赫芝接触中结论性的概念简述于下:

1. 两个球形体的接触

在图1-22所示的接触中, r_1 和 r_2 分别为两球体的曲率半径; E_1 和 E_2 分别为它们的弹性模量; ν_1 和 ν_2 分别为它们的泊松比。令:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

$$\frac{1}{E_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right]$$