工 程 弹 性 力 学

黄 炎　　编著

清 华 大 学 出 版 社

1 9 8 2

内 容 简 介

弹性力学是一门重要的技术基础课程。为使弹性力学更好地为工程实际服务，作者在多年的教学与工程实践的基础上，把它改编成《工程弹性力学》。本书共分15章：东1—5章是弹性力学基本理论与解法；第6—11、14章详细介绍了曲杆、楔形体、应力集中、厚壁筒、旋转盘、扭转与弯曲、热应力、薄板弯曲以及各种接触问题。尤其第6、7章，利用边界上应力函数及其导数的力学意义解题，更受同学们欢迎。第12、13、15章，系统地介绍了差分法，能量法及有限单元法。每章后附有习题和答案，本书可作为大专教材、工程专业的研究生和科技人员的参考书。

工 程 弹 性 力 学

黄 炎 编著

★

清华大学出版社出版

北京 海淀 清华园

北京农机学院印刷厂排版

北京农工商联合企业东北旺印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

★

开本：787×1092 1/16 印张：28. 1/4 字数：720千字

1982年9月第一版 1982年9月第一次印刷

印数1—30000

统一书号：15235·31 定价：2.90元

前　　言

《工程弹性力学》（以下简称弹性力学）是一门重要的技术基础课程。它推理严谨，比材料力学的结果更接近于实际，应用范围更为广泛，特别是有限单元等数值计算法在工程上广泛的应用以来。本课程越来越受到理工科院校有关专业及广大工程技术人员的重视。

本书的主要部分是作者在清华大学多年教学与工程实践的基础上编写的教材。近年来又经清华大学力学、机械、精密机械、工程物理、工程化学、土木与水利等系的研究生及有关系的进修班、本科生试用后，效果良好。为了便于更多的工程专业使用及广大工程技术人员自学，特地进一步改编成《工程弹性力学》，并以联系机械类型等工程为主。

在改编过程中吸取了国内外有关教材的优点，比较全面地介绍了弹性力学的基本理论、基本概念和解决问题的方法。结合多年的教学经验，努力做到难点分散、由浅入深、循序渐进。在文字上力求通俗易懂、深入浅出、着重从物理概念上说明问题。

本书共分十五章，第一章到第五章系统全面地介绍了弹性力学的基本部分，第六章到十一章及第十四章解决一些具体问题。其中第六、七两章比较突出地介绍利用边界上的应力函数及其导数的力学意义来选择应力函数，教学实践证明可以减少选择应力函数的盲目性，而且也为用有限差分法解平面问题打好基础，这种教学方法受到同学们的欢迎。在内容上很注意理论联系实际，特别是机械工程实际，为四个现代化服务。为此对曲杆、楔形体、各种接触问题、应力集中、厚壁筒、旋转圆盘、扭转和弯曲、热应力、薄板弯曲以及用有限差分法解航空涡轮盘的强度问题等均作了介绍。本书的第十二、十三、十五章对工程实践中行之有效的几种数值解法——有限差分法、能量法及有限单元法等均作了较系统的介绍。

为了便于学习，在每章后（第一章除外）都有一定数量的习题（全书近200题）并附有答案以便读者使用。

本书由清华大学徐秉业副教授在百忙中审阅并校对了本书的全部内容，提出了宝贵的修改意见。清华大学[redacted]王笃美同志及清华大学工程力学系固体力学教研组有关同志也对本书的编写作了有益的贡献。作者对以上同志及各方面的支持表示衷心感谢！

由于作者水平有限，书中一定会有不少错误和不妥之处，诚恳地欢迎读者批评指正。

黄炎于清华大学　1981.8

目　录

符 号 表

D 板的抗弯刚度，常数

E 杨氏弹性模量

F 面积，力

G 剪切弹性模量

I_1、I_2、I_3 应力第一、第二、第三不变量

I_1'、I_2'、I_3' 偏斜应力第一、第二、第三不变量

J_1、J_2、J_3 应变第一、第二、第三不变量

J_y、J_z 截面对 y 或 z 轴的惯性矩

J_p 截面极惯性矩

K 体积弹性模量

L 功

L* 余功

M 弯矩、力矩

M_y、Mz在xz或xy平面内的弯矩

Mz 扭矩

P 集中外力

Q 剪力

R 杆的半径

R_A、R_B 支反力

T 温度

U 总应变能

U* 总应变余能

U_v 体积变形应变能

U_f 形状变形应变能

V 体积

W 单位体积应变能

W* 单位体积应变余能

X、Y、Z 体积力直角坐标分量

$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$ 表面力直角坐标分量

a、b 椭圆半径，柱或盘的内外半径

d 柱体的直径

g 重力加速度

h 矩形截面的高度，板的厚度

l 杆的长度，梁的跨度

p 表面正压力

q 分布载荷

r、o、z 柱坐标

u、v、w 直角坐标中的位移分量

u、w 轴对称位移分量

w 挠度

x、y、z 直角坐标

θ 转角，单位长度扭转角

Θ 应力第一不变量

Φ 应力函数

α 热胀膨系数

γ 比重，剪应变

γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}直角坐标剪应变分量

$\gamma_{r\theta}$、$\gamma_{\theta z}$、γ_{zr} 柱坐标中剪应变分量

ε 正应变

ε_n 方向为线段的正应变

ε_x、ε_y、ε_z 直角坐标中正应变分量

ε_r、ε_θ、ε_z 柱坐标中正应变分量

ε_1、ε_2、ε_3、 主应变分量

λ拉梅（Lame）常数

μ 波桑比

σ平均正应力

σ_x、σ_y、σ_z 直角坐标中的正应力分量

σ_r、σ_θ、σ_z 柱坐标中的正应力分量

σ_n 外法线为n截面上的正应力

τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx} 直角坐标中的剪应力分量

$\tau_{r\theta}$、$\tau_{\theta z}$、τ_{zr} 柱坐标中的剪应力分量

τ_n 外法线为n截面上的剪应力

τ_8 八面体正应力

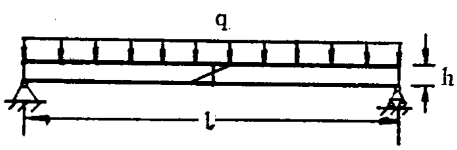
τ_8 八面体剪应力

第一章 绪　论

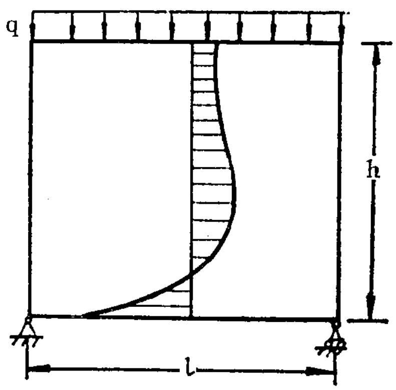
§1—1 弹性力学的任务

弹性力学的任务是确定结构或机械零件在外力作用下的应力、变形及稳定性。并由此判断结构或机械零件是否安全与经济，从而达到改进结构和机械零件设计的目的。

弹性力学与材料力学总的任务是相同的，但弹性力学研究问题比材料力学要更深入和更精确，并研究材料力学所不能解决的一些问题。例如，在材料力学中研究梁的弯曲时，作了平截面的假设，亦即假设变形之前的平面截面在变形之后仍保持为平面，因而可求得正应力沿梁的高度按照直线规律变化(图1—1a)。在弹性力学中则不作以上假设，并用弹性力学方法可以检查平截面假设的精确性，弹性力学的分析表明：只有当截面尺度远小于跨度情况下，这一假设才是令人满意的。如果梁的高度与跨度是同阶的（例$h>l/4$），那么平截面假设就不再适用，在这种情况下，应力并不按直线规律变化（图1—1b)。解决这样的问题材料力学是无能为力的，这时需用弹性力学方法来求解。



(a)



(b)

图 1—1

应力集中问题（图1—2）在工程实际中是很重要的，在计算具有小圆孔的受拉平板时，用材料力学也是不能计算出圆孔附近的应力集中问题的，只能用弹性力学的方法来加以解决。又如变截面杆的拉伸问题（图1—3），材料力学认为截面上产生均匀的拉应力（如图1—3(b)所示），它可以满足整段的平衡，但不能满足如图1—3（c）所示的微体的平衡，所以这个结果实际上是不对的。微体上的应力状态亦较复杂。

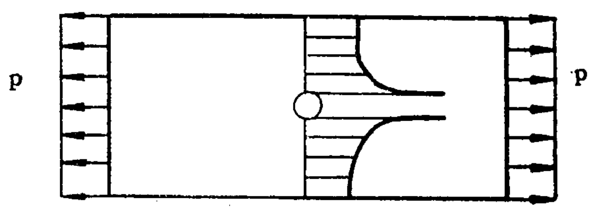


图 1—2

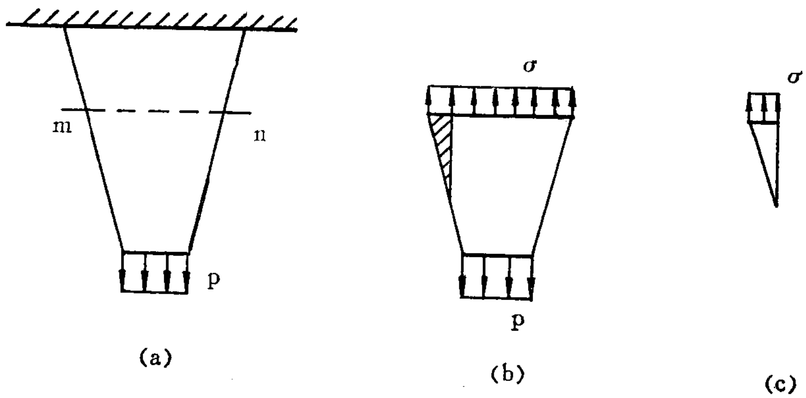


图 1—3

由以上例子可知，材料力学的结果只在一定范围内才与实际情况出入不大，超出这个范围后由于误差太大在工程上就不能应用。

又如在外载荷作用处附近的局部应力以及二维与三维弹性体的应力和变形的分析均需用弹性力学来解决。

因此，弹性力学一方面对于材料力学所求得的解答可加以评价，另一方面也可以解决一些更为复杂的工程问题。而且弹性力学的基本方法，基本概念和基本原理是许多课程的非常重要的基础。

§1—2　弹性力学的基本假设

客观事物总是错综复杂的，因而人们在研究问题的过程中需要作一定程度的简化，亦即抓住事物的主要矛盾而忽略一些次要因素。在弹性力学研究中也是如此，在满足实用所需的精度的前提下作一些必要的假设。弹性力学的基本假设为：

（一）物体是完全弹性的

物体受力后产生变形，当外力卸除后完全恢复原状，而且应力与应变之间有单值对应的关系，材料的这种性质称为完全弹性。

实验表明，工程上用的大部分材料，在一般应力不大的情况下都可以足够精确地认为是完全弹性的。材料的弹性变形与所受应力之间的关系称为材料的弹性性质，它是弹性力学中重要的物理性质。在线性弹性力学中不仅认为材料是完全弹性的，而且一般都仅限于讨论应力与应变为线性关系的问题。由材料力学已知：韧性材料的物体，在应力未达到屈服极限以前，是近似的完全弹性体；脆性材料的物体，在应力未超过比例极限以前，也是近似的完全弹性体，在这种情况下，材料服从虎克定律，即应力与应变成正比。

（二）物体是连续的

假设整个物体的体积被组成该物体的介质完全充满，不留下任何空隙。这样，物体内的一些重要的物理量，例如，应力、应变、位移等等，才可能是连续的，因而才可能用坐标的连续函数来表示。而且只有在这一假设的基础上才存在应力，因为应力的概念是在一个面积趋近于无穷小时取极限的基础上建立起来的。

由于实际的物质构造是不连续的，而是由一些微粒所组成，所以连续性这一假设与实际情况有出入。但由于所研究的物体的尺寸远大于微粒尺寸，以致在微小单元体中仍然存在着

大量的微粒。在弹性力学中我们可以用统观的观点研究物体的强度，而且实践证明这样简化不会引起显著的误差。

（三）物体是均匀的

认为整个物体是由同一材料组成的，并且物体内任一部分的力学性质（例如弹性系数和波桑比等）都完全相同，亦即不随坐标位置而变。但结构或机械零件的材料，实际上不可能是到处均匀的，这一部分与那一部分总会有些差别，但差别不大，所以对于现有一般工程材料可以认为是均匀的。

（四）物体是各向同性的

所谓各向同性的物体也就是认为在物体内每一点的所有方向上的物理性质是相同的。均匀性与各向同性这二个概念是有区别的，前者是指物体内各点（点的概念只有在连续性假设的基础上才成立）的物理性质相同，而后者是指某一点上在各不同方向的物理性质（弹性性质）相同。

由金属学可知，单晶体的弹性性质是各向异性的。但是由于物体内部包含着大量晶粒，而且各个晶粒的方向是杂乱无章的，因此从统计学观点可以认为多晶体金属是各向同性的。

工程上还有些材料如木材是不能看作各向同性材料处理的。各向异性材料的弹性力学问题属于专门问题，在本书中将对其物理性质作些简介。

凡是符合以上四个假设的物体，就称为理想弹性体。

（五）位移与应变是微小的

假设物体在载荷或温度变化等外界因素的作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸，因而应变分量和转角都远小于1。应用这条假设，可以使问题大为简化。例如，在研究物体的平衡时，可不考虑由于变形所引起的物体尺寸和位置的变化；在建立几何方程和物理方程时，可以略去应变、转角的二次幂或二次乘积以上的项，使得到的基本方程是线性偏微分方程组。

（六）物体无初应力

假设物体处于自然状态，认为物体在加载之前的应力为零。实际上物体内部常有初应力（如残余应力）存在，但是，在一般的情况下可以略而不计。

由于外载（包括力和温度）引起的应力称为附加应力，弹性力学中只研究这一部分的附加应力，为方便起见，以后简称应力。

应该指出，在某些特殊情况下，初应力是不能忽略的，如土建工程中的预应力结构是人为给予的初应力，从而能够更充分地应用材料。但在焊接结构中的初应力一般说是有害的。

上述各假设在所限定的范围内都为长期的实践所证实。由于人们对事物认识的不断深化，上述的假设随着科学技术的发展，有的可能废弃不用，而代之以更接近真实情况的简化，因而要特别注意它的条件。不问具体情况地生搬硬套，在一定条件下得出的结论很可能导致错误的结果。

根据以上假设所建立起来的弹性力学，称为线性弹性力学，它发展较早，理论严密，体系较完整，在工程实践中的应用亦很广泛。

§1—3 弹性力学的研究方法

对于结构和机械中的细长棱柱形杆件用材料力学方法可以得到较满意的结果。材料力学解决细杆的特点除了一些必要的基本假设外，为了简化问题而添加了一些"附加假设"例如采用了平面截面的假设，这个假设纯粹是关于变形几何方面的假设，此外在物理方面往往假设应力状态比较简单而使用单向拉伸的虎克定律等。由于这些假设，简化了对细杆的变形及应力分布的分析，例如在梁的弯曲及圆轴扭转问题中由此得到应力和应变的线性分布规律，从而使整个问题的解决变得很简单。

但是在实际工程结构中有些物体并不是细杆形状的，例如机械中的轮盘、齿轮等。即使对细杆也还有一些问题的材料力学所无法解决的，如带孔平板在受拉伸时的应力集中问题，非圆截面柱体的扭转问题等。因为对这类问题来说上述的平面截面假设已不再适用。

弹性力学的分析方法是在一开始并不考虑平面截面的假设，而是从变形连续性的观念出发列出几何方程，所谓变形连续性是指在变形前的连续物体在变形后仍保持连续（不发生裂缝及重叠现象），物体的任一部分及单元体均保持连续，且在保持变形连续的情况下，平面截面变形以后可以不再保持平面，因此物体的各点位移及应变将是坐标的连续函数。

不仅如此，在应力应变的物理关系上，材料力学与弹性力学也有着某些区别，在材料力学中将表达这种关系的广义虎克定律作了简化，如在材料力学研究杆件的拉伸、压缩或梁的弯曲时，就假定了纵向纤维互不挤压，这样就引用了虎克定律的最简单的形式。可以设想这样的简化，对形状较复杂的物体，将会带来较大甚至严重的误差。在弹性力学中写物理条件时不作简化，即应用广义虎克定律，这样将使其结果较材料力学更为精确，有些问题使用材料力学所采用的单向拉伸虎克定律无法解的问题应用弹性力学可得精确解。

还可以看到，在材料力学中，处理内力与外力关系时，广泛地应用平衡方程的积分形式，但在弹性力学中一般地采取在物体的外表面附近假想截出一小单元体，写出其平衡方程式以建立外力与物体内部应力之间关系的力的边界条件。

由此可见，材料力学与弹性力学都有着上节所讨论的共同的基本假设。在处理问题的方法上虽然都是从几何变形、静力平衡、应力与应变关系三个方面着手，但是其间却存在着差异，因此所得结果有不同的精确度。

目前弹性力学已建立了一套比较严密的完整的理论，但是由于实际工程结构、机器部件的复杂而多样性，且由于数学上的困难，要获得精确解是有困难的。因此，就需要将实际结构、机器部件及其边界条件进行简化，这种简化实质上就是给物体的应力、应变或位移一定的假设。如水坝应力分析中我们假设它是平面应变，等厚度旋转圆盘的应力分析中假设它是平面应力状态。虽然作了些简化会带来一定程度的误差，但是实践证明，这对工程实际的要求而言是足够准确的。当然这样的简化并不是对所有问题都适用，某些问题，由于简化将会带来不能容许的误差，甚至对某些问题即使作了合理的简化，但要获得精确解也是很困难的。对于这些问题可以采用有限单元法、有限差分法、能量法等近似计算法进行计算，特别是随着电子计算机的普遍应用，为解决弹性力学问题创造了很好的条件，而且已经获得了很大的进

展。

除了解析法和近似计算法外，还可以应用电测，光测等实验技术，通过模型实验或实测以进行应力分析。实践证明这是一个有效的方法，近年来由于在结构或机器的强度、刚度和稳定问题的分析中，大量地采用了实验方法，因而这方面的理论和技术发展也是很快的。

第二章 应力理论

§2—1 外 力

弹性力学是研究在外力作用下，处于平衡（或运动）的任意形状的物体中应力分布等的问题。为此首先需要确定外力的大小，虽然一般在弹性力学课程中均假定外力（或称载荷）为已知，但在解决工程实际问题时，确定载荷的大小是既安全又经济地进行设计的基础。在较简单的情况下，载荷的大小是可以通过理论计算确定的，如物体的自重，零件运转时所受的动载荷，高压容器所受的内压力，水坝所受的水压力……等，但对有些问题，要准确地确定其载荷的大小，往往并不是简单易行的。一般地说，施加在物体上的外力，其作用方式往往是多种多样的，以前在刚体力学中对分布力常用一个静力相当的合力来代替，对弹性力学问题需要知道作用力分布的情况。按照外力作用的不同分布方式，可分为体积力和表面力两种。例如运转零件的惯性力，物体所受的自重都是体积力。作用在物体某一表面积内的外力称为表面力，例如水坝所受的水压力或是作用在飞机机翼上的空气动力都是表面力。如分布在物体表面上很小面积内（与物体的整个表面积相比很小）的力，可以假定为作用于一点处的集中力，这样的简化一般不会引起整体应力有显著的误差。

此外，还可以按荷载的大小随时间改变的情况来分类，把载荷分为静载荷和动载荷。本课程主要研究在静载荷作用下的弹性体内的应力和变形。

§2—2 确定内力的基本方法——截面法，平衡

在受到外力作用后所引起的物体内部一部分与另一部分之间的相互作用力称为内力，为了显示内力，可以设想用一个截面将所研究的物体截成两部分（Ⅰ）和（Ⅱ），如图2—1所示。由于整体是平衡的，所以物体的任何一部分也都将处于平衡状态。因为作用在（Ⅰ）部分的外力P_1、P_2、P_3和分布力q并不构成平衡力系，所以（Ⅱ）部分必定通过横截面有力作用于（Ⅰ）部分，这就是外力所引起的物体内一部分对另一部分作用的内力。根据作用力与反作用力的定律，（Ⅰ）部分将通过横截面施加与上述方向相反大小相等的内力于（Ⅱ）部分上。由于假设物体是连续的，所以上述内力都是连续地分布在截面上各点的，这种在横截面上分布的内力称为分布内力，而内力这一名词是指分布内力的合力（力或力偶）。把横截面上的分布内力向截面的形心简化，可以得到内力——主向量$\overline{R}$及主矩$\overline{M}$。如将内力向坐标轴方向投影，则在一般情况下可以得到六个内力分量（N_x、Q_y、Q_z、M_x、M_y、M_z），它们可以根据（Ⅰ）部分的平衡条件（空间力系有六个平衡方程）而求出。如以（Ⅱ）部分的平衡条件亦可求出以上的六个内力分量。

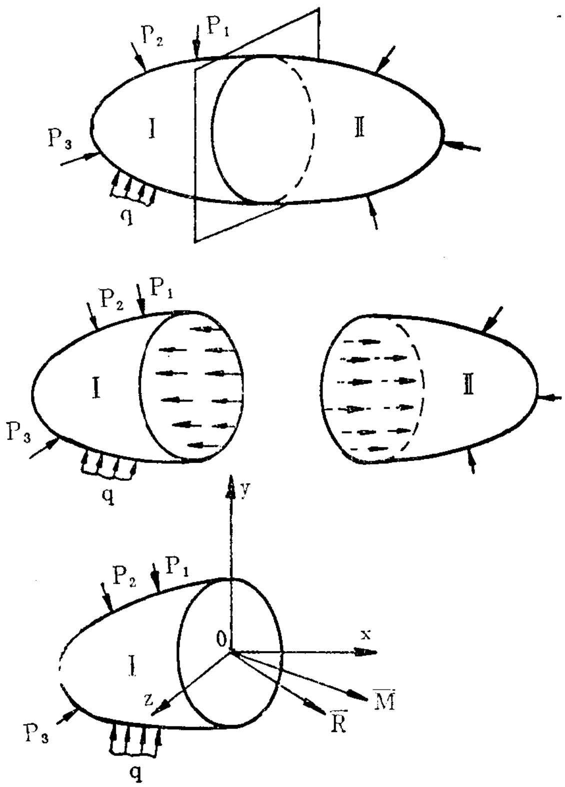


图2—1

这种假想用一个截面将物体截成两部分，并对截开后的两部分中之一建立平衡方程式以确定截面上内力的方法称为截面法，截面法不仅是材料力学的基本方法之一，亦是弹性力学的基本方法之一。用截面法、平衡求内力的全部过程可以归纳为以下三个步骤。

1）假想用一截面将物体分成两部分，选取其中一部分作为平衡对象。

2）用内力表示弃去的部分对留下部分的作用。

3）对留下部分，利用平衡方程式，以确定内力的大小。

在弹性力学中往往要在物体内截取小单元体进行应力分析。

§2—3　应力的概念

为了解决机器或结构的强度问题，不仅要确定其外力，而且需要求出其内力。但仅有内力分量是不够的，因为内力只表示了整个截面受力大小的总效果，如有两个相同材料，不同截面的等直杆，受同样大小的拉力作用，其内力相同，截面小的杆件容易损坏而截面大的杆件则不易破坏。因此需要研究此截面上内力的分布情况。通常截面上的分布内力是不均匀的。所以需要引出应力的概念来表示截面上各点受

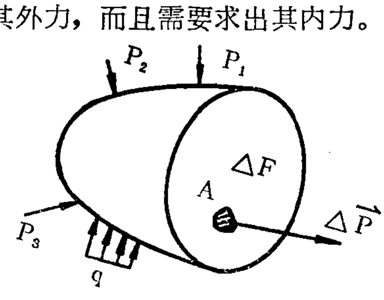


图2—2

力的大小。在图2—2中我们若要表示截面上某点A处受力的大小，则可以围绕A点取微小的面积$\triangle F$，其上所受分布内力的合力为$\triangle \vec{P}$。

定义
$$\vec{p}_n=\lim_{\triangle F\to 0}\frac{\triangle \vec{P}}{\triangle F}=\frac{d\vec{P}}{dF} \tag{2—1}$$

$\vec{p}_n$称为在面积dF上的应力向量，下标n表示面积dF的外向法线的方向。

事实上，在$\triangle F$上的所有力向A点简化可得一个合力$\triangle \vec{P}$和一个合力偶$\triangle \vec{M}$，但是在取极限时，即$\triangle F\to 0$时，显然可得

$$\lim_{\triangle F\to 0}\frac{\triangle \vec{M}}{\triangle F}=0$$

我们称$\vec{p}_n$为外向法线为n的截面上A点的总应力。$\vec{p}_n$是有方向的，它的方向就是当$\triangle F\to 0$时矢量$\triangle \vec{P}$的极限方向，其模量为p_n（一般称为总应力）。为了应用的方便，通常把总应力分解成两个分量，一个是dF面积法线的分量，称为正应力，以σ_n表示。另一个分量是沿dF而作用的（沿dF截面的切线方向），称为剪应力，以τ_n表示。p_n、σ_n、τ_n之间的关系为

$$p_n{}^2=\sigma_n{}^2+\tau_n{}^2 \tag{2—2}$$

应力的量钢为〔力〕/〔长度〕^{2}，其单位一般用N/mm^{2}等表示。

总应力P_n之值与截面的方向有关，亦即“某点应力为多大”这是没有意义的，而必须考虑到这一应力的作用面的方向。

§2—4 物体内一点的应力状态、应力标号、剪应力互等定理

在材料力学中，曾经分析过受力的杆件横截面上和斜截面上的应力。可以看到在一般情况下物体内的同一截面上不同点的应力不同，而且通过一点不同方向的截面上其应力也不相同。对于各处应力不同的情况我们称之为非均匀应力情况，例如，受弯或扭的杆件横截面上的应力分布。

要弄清楚一点处的应力情况，必须知道通过这一点任意方向的截面上的应力。否则我们就难以对一些受力的物体，会在一些特定的方向受一定的应力产生一定的变形或导致破坏，作出从力学基本概念上的分析。通过物体内一点的各个截面上的应力情况，通常被称为物体内的一点的应力状态。建立起通过一点的无数不同方向的截面上具有不同应力的表达方式和研究它们之间的联系，这就是我们所要研究的一点的应力状态的具体内容。

一点应力状态的研究，对于解决物体处于弹性阶段或塑性阶段的强度问题都是很重要的。特别是在复杂应力状态下强度准则的建立必须依靠有关应力状态的一些基本概念作为基础。

现在我们来研究一个受外力作用的物体中(如图2—3)某点A（x、y、z）的应力状态。为此用截面法取出一个包围A点的微单元体。当用直角坐标时，可以取成各平行平面与坐标面平行的正六面体(如图2—3所示)。如以A点为正六面体的体心。由于物体各部分间力的作

用，单元体的各个截面上都有应力存在。如果这些应力为已知，根据截面法平衡，就可以求得通过该点任意斜面上的应力。因此，我们常常用单元体三对相互垂直面上的应力来表示

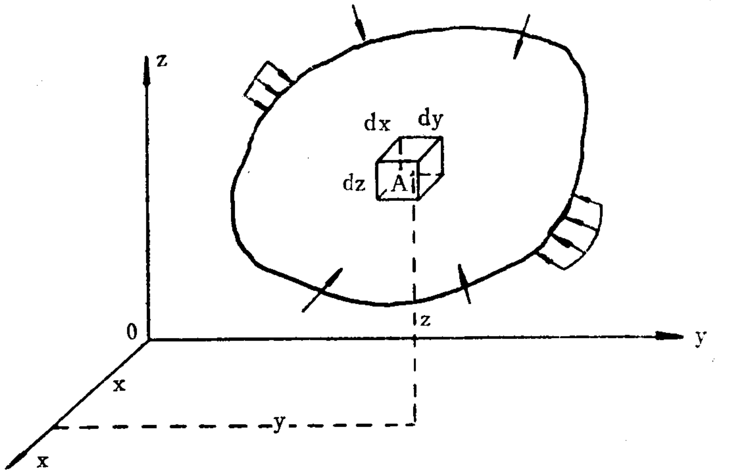


图2—3

一点的应力状态。如果应力状态是均匀的，则可以取有限大小的单元体，否则应该取微小的单元体简称微单元。其边长分别为dx、dy、dz，此时则可以认为作用在各微面上的应力是均匀分布的，而且每微面上的总应力可以分别向三个坐标轴x、y、z投影得到三个应力分量，其中一个是正应力，二个是剪应力分量，图2—4表示各个微面上的应力分量。在微单元体的六个面上共有九个应力分量。即

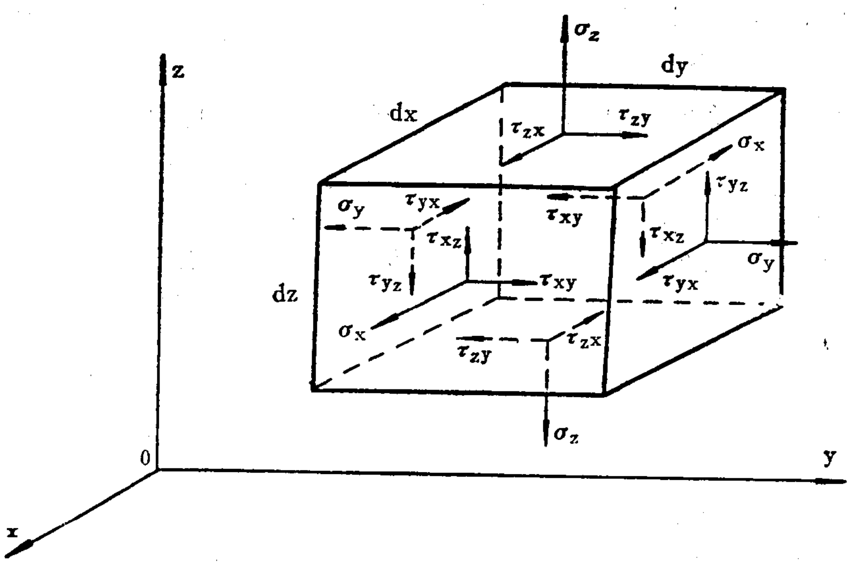


图2—4

σ_x、τ_{xy}、τ_{xz}、τ_{yx}、σ_y、τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{zy}、σ_z

我们现在规定正应力σ_x、σ_y、σ_z当顺截面外向法线方向的应力为正，反之为负；亦即当截面外向法线与坐标方向相反时则正号应力的方向与坐标反向，这与材料力学中所习惯使用的拉伸为正，压缩为负是一致的。剪应力分量具有两个附标中其第一个附标表示截面的法线方