目　　次

緒　論

力學・概念與範疇 (Mechanics. Concept and Scope)

力學所研究之對象爲材料體 (Material body) 之運動定律及其在工程、天文學、與其他應用科學上之應用，其中包括靜態之條件等特例在內。所謂運動即位置之改變與時間之相互變化。然而在力學上，不僅涉及空間與時間之觀念，更與運動之物體有關。例如，吾人所討論者爲剛體之運動，或爲一組剛體間之彼此作用。另外，其運動之起因爲剛桿 (Rigid rod) 或彈簧等材料體間之作用及由於地心引力或由於電池以及其他場力 (Field force) 所影響者，均須注意。

剛體經常可視爲由無窮多極小尺度之材料質點或所謂材料點 (Material point) 所組成。在力學上以此觀點爲基礎發展成一系統，稱爲點形力學 (Point mechanics)；反之，則稱爲聯體力學 (Continuum mechanics)。

剛體力學直接在工程上之應用其事例不勝枚舉。無論何項工程，如欲通曉，皆需從力學着手。茲舉數則時新之專題爲例：如衛星軌道之描繪，火箭之航行及廻轉機臺之穩定化，火箭之結構及發動機等在太空運行上各項基本問題之第一步，均屬於力學之範圍。

基本法則 (Basic Laws)

點形力學乃基於牛頓〔註一〕(Issac Newton) 於公元 1687 年在其劃時代之大作〔註二〕「自然哲學之數學原理」(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) 中所列之三項定律而發展。其三項定律如下：

(1) 每一物體，除非受外力之作用，靜者保持原來之形態，動者沿同一直線作等速運動。

(2) 運動狀態之改變與作用之外力成正比，且運動之方向與作用力之方向一致。

(3) 對於任一作用力，必產生一大小相等且方向相反之反作用力，或設有兩物體彼此作用，則此兩物體間相對作用之力之大小相等，而方向相反。

上列諸定律，在牛頓時代即已經過實驗而證實，且顯然爲一頗具效果之基本事實。由於時代之進步，在十九世紀末期，牛頓之經驗定律無可避免地略被推廣

〔註一〕 牛頓；公元 1642 年生於英國 Woolsthorpe 城，1727 年歿於倫敦。

〔註二〕 公元 1729 年首由莫帝 (Andrew Motte) 氏由拉丁文譯成英文，由加州大學雜誌社再版發行。

與修正。然而，除非涉及量子與高速電子等活動現象外，對於一般工程之應用，牛頓三定律仍屬有效而無須修正。牛頓係根據質點（材料點）之觀念發表其定律。問題在於由質點擴展至剛體，其定律是否仍然具有效用；且此定律應用於剛體及剛體系時，其一般運動理論是否有所出入，此等問題在本書中乃爲其主要研討之課題。

理想化與抽象化（Idealizations and Abstractions）

多數讀者或許記得有關希臘數學家阿基米德〔註一〕（Archimedes）之軼事。於公元前 216 年，受以多疑著稱之國王海厄洛（Hiero）召見，並被命證實鑄造其王冠之金匠是否將其所予之金塊全部用上或會挪取部分金塊而代以較低賤之金屬。阿基米德經徹底思考之後突大聲呼叫着"εὕρηκα"去見其負有盛名之國王。其所以如此興奮乃因彼已解出該項難題，而非發現著名之浮力定律。無論如何，此一新觀念無疑地爲理論物理開拓一新紀元。至於其觀念之癥結乃在於王冠爲非純金之抽象假設，即將其視爲由已知比率之兩種金屬所組成之大塊合金〔註二〕。此處，吾人可發現解決問題之一般步驟，其起點源於物理觀念。問題中常帶有偶然與間接現象之困擾，因此在瞭解問題之要點之後，吾人可用足以具體表現其主要特徵之假設物代替「實物」。該「實物」惟經此一簡化之理想化過程，吾人始可對問題作有意義之定性研究（Qualitative investigation），或在最後必要時，亦可作一定量分析（Quantitative analysis）。

在點形力學（Point mechanics）中常用之基本理想化的觀念之一即爲剛體（Rigid body），乃爲假設物體中任意兩點之距離彼此保持不變。此種觀念經特殊化過程即成爲材料點（Material point），此乃假設一物體其空間尺度之

〔註一〕阿基米德：公元前 287 年，生於意大利西西里島蕯勞寇斯城（Syracuse），公元前 212 年歿於同地。

〔註二〕評價其在知識上之偉大成就之前，吾人必須考慮到阿基米德之思想完全和亞里斯多德之自然哲學背道而馳。當阿基米德在羅馬征服蕯勞寇斯城時，死於一羅馬戰士之手以後，其思想亦從此爲後人所淡忘。反之，亞里斯多德之物理哲學卻繼續控制着所有有志於研究自然現象諸學者之思想，前後達十八個世紀之久。自然物理科學因此受到最深之毒害，直至伽利略時代方告終止。

變異極小。由材料點之觀念，吾人亦可將剛體定義下成：各材料點間之距離彼此保持定值之材料點系。由此觀之，吾人將無須探討材料點之數目是否有限，或極小之質點是否呈連續分佈之狀態。

此外，在此必須一提者，就一般而言，在考慮不同性質之問題時，常應用不同之理想化手續以處理相同之「實物」。例如，設吾人觀察地球對太陽之運動，太陽與地球均可視為材料點；然而，吾人若考慮地球本身亦對其極軸 (Polar axis) 轉動時之有關動力學問題，地球即不再視為單一之材料點。

代換系統(Substitute system)之選擇與研究之目的有關。例如，火箭之軌道為吾人研究之目標， 則整個撓曲複雜之火箭結構，包括燃料及其超過 100,000 份之零件，均可視為一實剛體 (Solid rigid body)。雖經此簡化過程，但其計算結果仍能令人滿意。反之，若研究之主題為引擎發動時火箭之振動等重要問題，則需更多詳盡之代換系統。此處，代換系統之複雜性乃決定於振動頻率 (Frequency) 之高低。在低頻率時，將火箭理想化為一擁有甚多質點 (Point mass) 之彈性桿，即已足敷應用。若其頻率達到音頻 (Acoustic range)，則火箭之結構必須視為極端複雜之彈性物體 (參照圖 I.1 與 I.2)。

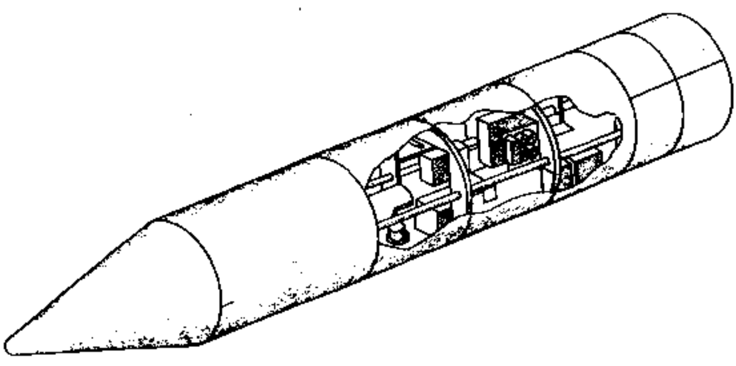


圖 I.1

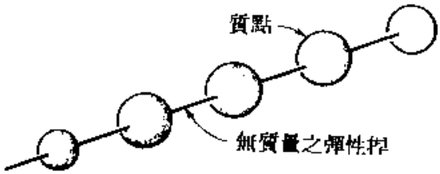


圖 I.2

最後，使初學者亦當明瞭代換系統之選擇完全着重於求得問題之解答。因此，讀者在學習力學之初，主要在如何學習具有理想化之藝術 (Art of idealization) 之技巧。如此，即可逐漸熟練於把握住問題之重點。又若讀者對代換系統之運用愈熟練，則愈容易用簡短之數學式求得實解。

空間與時間 (Space and Time)

根據日常經驗，吾人描述物體之位置與運動之形態均採用空間尺度 (Spatial dimensions)。若以精確之科學術語表示，則將空間視為三度 (Three dimensional) 均質之聯體 (Homogeneous and isotropic continuum)。因此，在此假設之下，吾人相信能以特定之度量衡，並以所期之準確度測出兩點間之距離，且無論何時、何地及何向，其所得之量度確定不變。總之，吾人假設空間與發生之事件無關。

關於時間之觀念，例如吾人利用日晷儀或日規 (Sun dial) 或能對時間之量，得一較為具體之定義。此外，假若吾人此刻能判定兩種事件是否同時發生，則吾人可應用此一時間刻度於所有事件中，以決定在某一期間內發生之事件與其對於在某一特定零時發生之事。又時間雖隨事件之發生而流逝，然吾人認為時間刻度並不受事件或空間之影響。

假如吾人所研究之對象，其運動速率遠小於光速，則時間之定義均可依照實驗之證據予以確定。然而，假若與此先決條件相違，則時間與空間之觀念即須修正。至於有關修正之理論乃源於愛因斯坦〔公元 1879 年生於德國烏爾姆 (Ulm) 城，1955 年歿於美國普林斯敦城〕之相對論。

尺度(因次)、度量與單位 (Dimensions, Measures, and Units)

通常在工程力學中，以長度、時間與力作為基本尺度 (Basic dimensions)，然在普通物理學上，則以質量觀念代替力之觀念〔註一〕。此種差異之緣由十分明顯；第一，通常在工程力學中，由其發展過程觀之，靜力學乃為其領域中之第一項主題 (Subject)，因而物體之質量唯有利用吾人肌肉之官能，以其重量形

〔註一〕 名數學家高斯氏（C. F. Gauss, 公元 1777 年生於德國 Braunschweig 城，1855 年歿於德國 Göttingen 城），首先介紹並採用公制（cgs 制）單位系統，同時亦曾考慮選用「力」以代替「質量」，作為第三項基本尺度。

式計算之，可定爲力之定義。第二，或可列爲最重要之理由，即工程師主要對結構物中各部門之相互作用與其中所發生之應變及應力之變化感到興趣，因此，力在彼等機械式之思考過程中列居首位。據此，在本書第一章中所闡述有關力之概念，與質量之觀念完全無關。

吾人若欲在數量形式中更進一步描述物理量，則對於測定物應先決定其度量及尺度單位(Dimensional units)，因此處所表示之數量不爲「純」數，乃是含有以一定單位表示之尺度〔註一〕。工程力學中所採用之基本尺度單位列於表 I.1。其他尚有各種不同之單位系統 (System of units)，讀者可自行參考物理教本。

表 I.1

力	1 磅(pound, 或簡寫作 lb)=16 盎斯 (ounce, 或簡寫作 oz)
長度	1 呎(foot, 或簡寫作 ft)=12 吋 (inch, 或簡寫作 in)
時間	1 秒(second, 或簡寫作 sec)(一個平均太陽日=86,400 秒)

因此，設一長度 L，其完全之表示法爲：

$L=5$ 呎

其中數字 5 表示度量，呎表示尺度單位，亦可將 L 視作度量與尺度單位之乘積。任何數量 Q 之尺度單位可用以下符號表示之〔註二〕：

Q 之尺度單位$=[Q]$

例如，長度 (Length) L 若以呎度量之，則可寫爲：

$[L]=$呎 (ft)

力 (Force) 常以磅度量之，即

$[F]=$磅 (lb)

時間 (Time) 則以秒度量之，即

$[t]=$秒 (sec)

〔註一〕 關於幾何尺度之原始概念，首先由傅立葉氏 (J. B. J. Fourier, 公元 1768 年生於法國 Auxerre 城，1830 年歿於巴黎) 廣泛地採用於物理數量中。後經馬克斯威爾 (J. C. Maxwell, 公元 1830 年生於蘇格蘭 Edinburgh 城，1879年歿於英國劍橋) 演化爲現有之形式。

〔註二〕 爲簡便計，吾人亦可採用另一不同之符號；例如以重量 W (lb)，代替重量 W ([W]=lb)。

副尺度單位 (Secondary Dimensional Uints)

若 Q_1 與 Q_2 表示兩個數量 (Numerical quantities)，則其乘積 $Q_1 Q_2$ 爲一以尺度單位 $[Q_1] \cdot [Q_2]$ 表示之數量。同理，其商 Q_1/Q_2 爲含有 $[Q_1]/[Q_2]$ 尺度單位之數量。由此獲知，除基本尺度單位外，尚有導出或副尺度單位。例如，若設一點沿一定軌道運動，且在時間間隔 Δt 之內共經距離 Δl，則吾人稱此兩數量之商 $\Delta l/\Delta t$ 爲此點在時間間隔 Δt 內之平均速度。因

$$[\Delta l]=[L], \ [\Delta t]=[t]$$

故速度之尺度單位爲 $[L]/[t]$，例如

$$\frac{[L]}{[t]}=\frac{\text{呎 (ft)}}{\text{秒 (sec)}}$$

等尺度定律 (Law of Dimensional Homogenity)

唯有尺度（因次）單位相同時，數量方能相加。例如，

$$[Q_1]=[Q_2]=\cdots, \ \text{則} \ [Q_1+Q_2+\cdots]=[Q_1]=[Q_2]=\cdots$$

或進而言之，唯有方程式兩側各項數量之尺度單位相同時，此方程式方能存在；例如，欲使

$$Q_1=Q_2$$

成立，唯有 $[Q_1]=[Q_2]$

上列（最後）之方程式即所謂等尺度定律 (Law of dimensional homogenity)。當吾人列出某物理現象之數學方程式時，必須符合上述之定律始能存在。唯其如此，對所有單位系統而言，此數學方程式方屬有效。經驗指出，根據實驗數據繪出曲線圖，並依此導出近似函數之關係式，若違背此一定律，則將有莫大之危險。

尺度單位元素 1 (Dimensional Unit 1)

爲建立「尺度代數」(Dimensional algebra) 系統，以便分析其尺度之關聯性，對於所有無尺度 (Dimensionless or nondimensional) 之數量，吾人在此引用所謂尺度單位元素 1。此一元素之運用，可藉下列之簡例見其一般；例如，角之定義爲弧長/半徑，其尺度 $[L]/[L]=1$。初學者必須瞭解，唯有數

量爲無尺度時，除加、減、乘、除等四則運算外，包含此等數量之其他數學運算亦能照常成立。例如，方程式

$$y=C\sin x$$

唯有〔y〕=〔C〕，且〔x〕=1，始有意義存在，蓋因吾人可將 $\sin x$ 展開成級數

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

若欲滿足等尺度定律，唯有

$$[x]=[x^3]=[x^5]=\cdots\cdots$$

成立方可。因此吾人必須導致〔x〕=1 之結論。

第一章　基本原理 (Elementary Fundamentals)

1.1　基本觀念 (Basic Concepts)

靜力學之基本觀念可分爲力與空間兩項。關於空間觀念已在緒論中討論過，在此僅討論關於力之定義。

力不能直接觀察，然在下列兩種情況下得以顯示之：

(1) 物體受力而使其變形。

(2) 物體受力而改變其運動狀況。

力所產生之效果，雖可由實驗定出，然在普通程序上均藉重量與之比較而計量之。標準力在英制上爲磅力 (Pound force)，或簡稱爲磅，此乃相當於在某地以一標準質磅 (Pound mass) 之質量將其在眞空中釋放，且擁有一向下之加速度 (Acceleration) $g=32.174$ 呎/秒² 所產生之重量。

經驗告訴吾人，力並非祇具有大小，如溫度、引擎之馬力……等稱之爲純量 (Scalars) 者，乃另又具有一定之方向；如地球與月亮間之相互引力，或爲拔綱力；如從海洋中將太空艙提起，其繩索間產生之張力，均有一定之方向。此外甚至單由大小與方向仍無法充分而具體地定出一力所產生之效果。如以一繩索懸吊太空艙不同兩點 A 與 B [如圖 1.1-1 (*a*)、(*b*)]，就其大小與方向而論，在

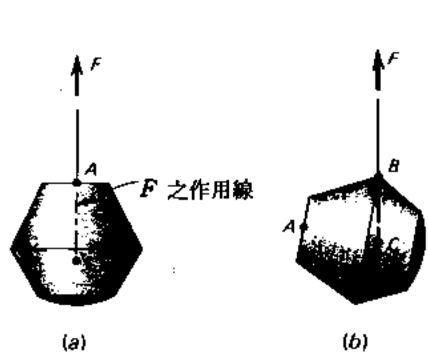


圖 1.1-1

兩種情況下，繩索加於太空艙之力必爲相等，然就太空艙之關係而言，其結果之差異極大。因此，當吾人研究物體受力之效果，必須給予下列諸數據：大小、方向與施力點。當兩力具有相同之大小、方向與施力點時，稱之爲等值（Eqivalent）。此外，當兩力大小、方向相同而施力點未給予時，則稱之爲相等（Equal）。

在討論剛體靜力學之問題時，當吾人僅限制等值與平衡〔註一〕（Equilibrium），可以「作用線」（Line of action）代替等值之必要條件「施力點」（Point of application）。如圖 1.1-1(*a*)，太空艙之平衡並非取決於力 F 直接施於 A 點，或在 50 呎長繩索之末端，乃取決於力 F 之作用線與 A 點及重心 C 之連線是否相重合。吾人在此，對於物體在力之作用下所產生之變形不予考慮。若物體受極小之變形，而其施力點之幾何位置無顯著改變時，其大小、作用線與方向卽可定爲力之必備要件。因此，在本書中僅涉及剛體受力之效果，如兩力具有相同之大小、作用線與方向卽謂等值。

因此，在作用線上之任意點，皆可充當此力之施力點。此種特性在剛體力學中均爲有效，通常稱爲力之可傳遞性〔註二〕（Transmissibility）。再者，若力作平行移動，則將改變此物體之效力（見圖 1.1-1 (*a*) 與 (*b*)）。

〔註一〕 吾人並不由此判斷其已達到平衡之穩定性（見第六章）。

〔註二〕 當吾人對此物體在力之作用下所產生之變形予以考慮時，必須知道其大小、方向與力之施力點。如在圖 1.1-2 (*a*) 與 (*b*) 中，彈性體之彈簧，其變形決定於力 F 之施力點 A 而得到證明。

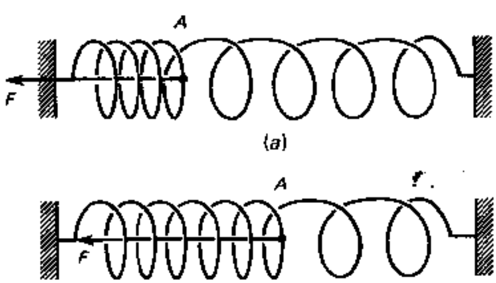


圖 1.1-2

就吾人所知，力乃一種物理量而非純由大小即可決定。因此，吾人通常以粗體字 **F** 表示，以示有別於純量 (Scalar quantity)。至於力之大小則以符號 $|F|$ 或輕體字 F 表示之。在圖示法中，用箭號與其力之作用線重合之表示法爲最佳。箭頭指示力之方向，而箭號線之長度則表示力之大小，且引用確定之比例因子〔FL^{-1}〕作爲其尺度（或謂因次）。當一力指向與紙面所表之平面成垂直時，吾人以記號⊙表示指向讀者，而以⊗表示遠離或背向讀者。

此外，在剛體力學中，可由所謂「力之平行四邊形法則」〔註一〕(Axiom of the parallelogram of forces) 表示之。

作用線相交之兩力 $\mathbf{F}_1$ 與 $\mathbf{F}_2$，與以 $\mathbf{F}_1$ 與 $\mathbf{F}_2$ 爲兩邊所作平行四邊形之對角線所表示之力 **R** 爲等值（見圖 1.1-3）。此力 **R** 即稱爲 $\mathbf{F}_1$ 與 $\mathbf{F}_2$ 之合力 (Resultant)。由此，具有相同之合力 **R** 之兩力羣 (Two force groups) 爲等值 (Eguivalent)〔見圖 1.1-4 (*a*) 與 (*b*)〕。

〔註一〕力之平行四邊形法則，雖在許久以前就已知悉，然至雷歐納達文西氏 (Leonardo da Vinci，1452 年生於義大利 Vinci 城，1519 年歿於法國 Amboise 城) 在研究重量在斜面上之平衡時方被發表。

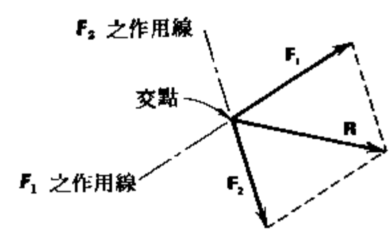


圖 1.1-3

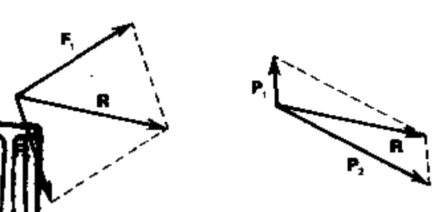


圖 1.1-4

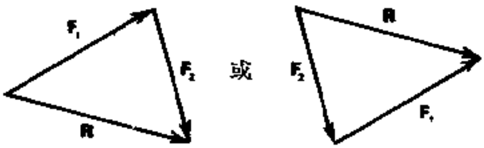


圖 1.1-5

吾人亦可以力 F_1 與 F_2 爲兩邊之三角形結構法以代替上述之平行四邊形法，且可證明加法之先後次序可不必考慮。依照平行四邊形法則求力之合成，在觀念上具有重要之意義。幾何量與物理量均得以此種方法相加，通常稱之爲向量（Vectors)〔註一〕，是乃一門特殊之微積分學，或所謂「向量微積分」〔註二〕，即由此產生。使用向量代數之記號，兩共點力 F_1 與 F_2 之合成或加法可以算式表示如下：

$$F_1+F_2=R \tag{1.1-1}$$

記號「+」(加) 與記號「Σ」(總和) 在本書中與向量具有「平行四邊形法則之合成」之意義。而記號「=」表示諸共點力〔註三〕(Concurrent forces) 爲等值。要注意在某力前之記號「−」（負）則有「加此反方向之力」之意義；例如

$$F_1-F_2=R \tag{1.1-2}$$

相同於 $$F_1+(-F_2)=R \tag{1.1-3}$$

此處 $-F_2$ 乃與 F_2 具有相同之大小與作用線而具有相反之方向。

〔註一〕 由拉丁字 Vector 得來，其意爲忍受者、駕駛者與航海員。

〔註二〕 在本書中僅須具備一些向量代數之常識即可，但吾人仍希望讀者能熟悉於簡單向量代數之演算。

〔註三〕 若具不共點之諸力，它們僅可稱爲相等，如第 10 頁所定者。

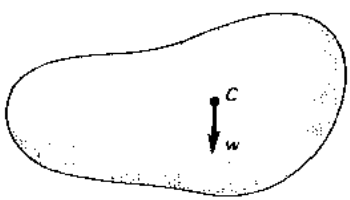


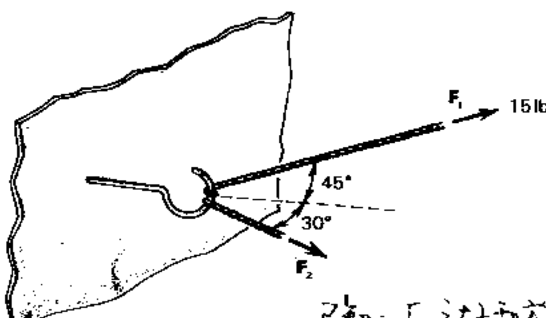
圖 1.1-6

在本書之前兩章，吾人僅討論單獨之集中力，如附着於某物體之繩索之張力屬之。通常，力可分爲兩類，其一爲僅分佈於物體表面之力（表面力），另一爲分佈於物體全部之力（物體力），如重量即是。但在吾人未討論第三章等値之需要條件中關於分佈力與集中力之前，暫且將物體之重量視爲作用於重心 C 之單獨力（注意其在物理實驗上之決定），而指向於地心（見圖 1.1-6）。

例題 1.1-1

有一晒衣繩固定於房屋之牆壁上，如圖 1.1-7 所示。假若在繩子一側施予 $\mathbf{F}_1$ 力，又如其合力 $\mathbf{R}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2$ 恰與牆壁正交，則力 $\mathbf{F}_2$ 之大小應爲若干？同時求合力 $\mathbf{R}$。

圖解法：圖 1.1-8 表示由平行四邊形法則繪製之力系卽爲本題之解答，其作法步驟如下：(1) 繪出 $\mathbf{F}_1$、$\mathbf{F}_2$ 與 $\mathbf{R}$ 給予之作用線。(2) 以 1 吋表 10 磅，依比例繪出力 $\mathbf{F}_1$ 之箭號，其値以 1.5 吋表示。(3) 平行於 $\mathbf{F}_2$ 之作用線經過 $\mathbf{F}_1$ 之箭頭交 $\mathbf{R}$ 之作用線於點 A，由此 $\mathbf{R}$ 可以定出，其大



已知：F1之大小和方向
R、F2之方向

圖 1.1-7

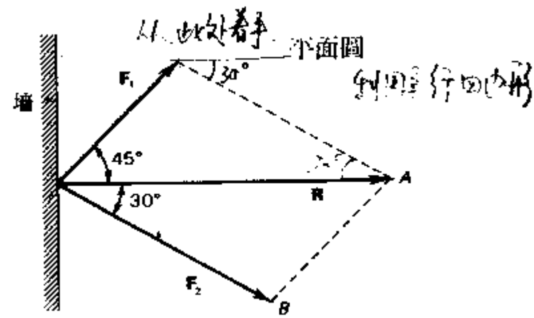


圖 1.1-8