

# 目 录

<b>第一章 引言</b>	
1.1 什么是有限元方法	(1)
1.2 有限元方法的发展	(1)
1.3 有限元的分析方法	(3)
参考文献	(4)
<b>第二章 杆件结构</b>	(7)
2.1 直梁	(7)
2.2 平面刚架	(14)
2.3 空间杆件结构	(19)
习题	(23)
参考文献	(24)
<b>第三章 平面问题——直接离散化</b>	(25)
3.1 平面问题的应变与应力	(25)
3.2 单元与节点——连续体的离散化	(27)
3.3 三角形三节点单元刚度分析	(28)
3.4 解题过程	(39)
3.5 矩形四节点单元	(52)
习题	(56)
参考文献	(58)
<b>第四章 势能极小原理的有限元解法</b>	(59)
4.1 求解域的剖分和分片插值	(59)
4.2 刚度矩阵及其迭加	(60)
4.3 节点载荷与位移方程	(61)
4.4 收敛条件	(63)
习题	(65)
参考文献	(66)
<b>第五章 三维问题</b>	(68)
5.1 三维应力状态	(68)
5.2 三维分析的简单四面体单元	(69)
5.3 轴对称变形	(73)
5.4 轴对称问题的简单三角形单元	(75)
5.5 轴对称结构的半解析法	(79)

	习题	(85)
	参考文献	(86)
<b>第六章</b>	<b>薄板弯曲</b>	(87)
6.1	薄板的弯曲变形	(87)
6.2	四节点的矩形薄板单元	(90)
6.3	薄板弯曲的相容性问题	(97)
6.4	九参数三角形薄板单元	(102)
6.5	相容的板单元和它的板单元	(106)
	习题	(108)
	参考文献	(109)
<b>第七章</b>	<b>薄壳</b>	(111)
7.1	概述	(111)
7.2	矩形板单元用于柱壳分析	(112)
7.3	用三角形板单元分析任意形状壳体	(117)
7.4	轴对称薄壳	(121)
7.5	其它壳体单元	(124)
	习题	(125)
	参考文献	(126)
<b>第八章</b>	<b>参数单元</b>	(127)
8.1	平面四节点等参元	(127)
8.2	20节点三维等参元	(133)
8.3	一般的等参单元	(143)
8.4	参数单元用于壳体分析	(149)
	习题	(155)
	参考文献	(156)
<b>第九章</b>	<b>温度场及热应力的有限元计算</b>	(157)
9.1	平面稳定温度场	(157)
9.2	平面热应力	(164)
9.3	平面不稳定温度场及热应力	(169)
9.4	轴对称温度场及热应力	(172)
	习题	(175)
	参考文献	(176)
<b>第十章</b>	<b>结构有限元动力分析</b>	(177)
10.1	结构的动力方程	(177)
10.2	结构的自由振动, 固有频率和模态	(178)
10.3	系统的动力响应	(180)
10.4	动力方程的简化	(185)
	习题	(190)

参考文献	(190)
<b>第十一章 复杂结构分析的几个问题</b>	(191)
11.1 不同单元的组合	(191)
11.2 子结构分析	(196)
11.3 位移约束处理	(201)
习题	(206)
参考文献	(207)
<b>第十二章 不相容单元和杂交有限元</b>	(208)
12.1 不相容单元	(208)
12.2 杂交应力元	(211)
习题	(215)
参考文献	(216)
<b>附录 结构有限元分析程序</b>	(218)

# 第一章 引 言

## 1.1 什么是有限元方法

有限元是近似求解一般连续域问题的数值方法。它最先应用于结构的应力分析，很快就广泛应用于求解热传导、电磁场、流体力学等连续问题。

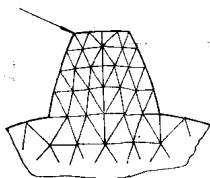


图 1-1

例如，为分析齿轮上一个齿内的应力分布，可分析如图 1-1 所示的一个平面截面内位移分布。作为近似解，可以先求出图中各三角形顶点的位移。这里的三角形就是单元，其顶点就是节点。

从物理角度理解，可把一个连续的齿形截面分割成图 1-1 表示的很多小三角形单元，而单元之间在节点处以铰链相连接，由单元组合而成的结构近似代替原连续结构。如果能合理地求得各单元的弹性特性，也就可以求出这个

组合结构的弹性特性。这样，结构在一定的约束条件下，在给定的载荷作用下，就可以求出各节点的位移，进而求解单元内的应力。这就是有限元方法直观的、物理解释。

从数学角度理解，是把图 1-1 所示的求解区域分割成许多三角形子域，子域内的位移可用相应各节点的待定位移合理插值来表示。按原问题的控制方程（如最小势能原理）和约束条件，可以求解出各节点的待定位移。推广到其他的连续域问题，节点未知量也可以是压力、温度、速度等物理量。这就是有限元方法的数学解释。

在一定条件下，由单元集成的组合结构能近似于真实结构；在此条件下，分区域插值求解也就能趋近于真实解。这种近似的求解方法及其所应满足的条件，就是有限元方法所要研究的内容。

可以看出，有限元方法可适应于任意复杂的几何区域，便于处理不同的边界条件，这一点比常用的差分法更为优越。满足一定条件之下，单元越小，节点越多，有限元数值解的精度也就越好，电子计算机的大存贮量和高计算速度对此提供了必要的手段。另外，由单元计算到集合为整体区域的有限元分析，都很适应于计算机的程序设计，可由计算机自动完成，这也是有限元法得以迅速发展原因之一。

## 1.2 有限元方法的发展

科学技术与工程生产是密切相关的。在建筑和航空工程中，对于复杂的刚架、蒙皮

骨架等结构早已采用了结构的矩阵分析方法<sup>(1)</sup>。

这些结构都是明显地由元件组成的，如直杆、蒙皮块等。对此，只要分别找出各元件的受力与位移的弹性关系，就可组成整个结构受力与位移的基本方程。这种求解方法与现代的有限元方法是一致的，但还不是有限元法。它只能分析由各个元件组成的离散结构，如图 1-2a 所示的刚架，而不能分析没有具体元件的真正连续体，如图 1-2b 所示的平面结构。

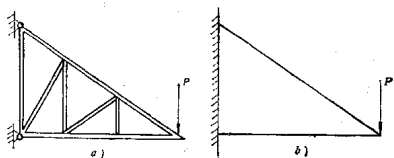


图 1-2

1956年，Turner, Clough, Martin和Topp<sup>(2)</sup>，首先将平面结构人为地划分成很多三角形单元，单元内以顶点位移线性插值，用近似方法找出合理的单元弹性特性，再用结构力学中周知的直接刚度法组成整个结构的位移方程组以求解。这是按物理的观点，将连续结构近似为由单元所组成的离散结构，再加以分析。1960年 Clough<sup>(3)</sup>将它命名为有限单元法，与弹性力学中取无限小微体的研究方法相区别。

有限元法由工程结构分析开始，很快被认识到它恰是弹性体变分问题的一种里兹(Ritz)近似解法<sup>(4-6)</sup>。接着，它就被推广应用于一般由变分原理控制的连续域问题<sup>(7)</sup>。只不过在有限元方法中，做为里兹解法的试验函数，不是定义于整个求解区域的连续函数，而是分片插值的分段连续函数。

有限元方法应用的巨大成功，引起了数学界的注意。60~70年代，人们对于有限元离散化误差、有限元解法的收敛性、稳定性等方面的研究<sup>(8-11)</sup>，巩固了有限元的数学基础。与此同时，人们又发现，数学界中以分片插值做为试验函数以近似求解的思想，与工程中有限元法的形成是并行发展的<sup>(12-13)</sup>。甚至早在1943年，Courant就采用分片插值的思想，用最小势能原理分析了圣维南(St. Venant)扭转问题<sup>(14)</sup>。由于当时没有电子计算机作为计算手段，没有用它来分析工程实际问题，因而没有得到更多的重视和发展。60年代，我国数学家冯康，在研究变分问题的差分格式中，也独立地提出了分片插值的思想<sup>(15)</sup>，并把它用于工程结构的分析，为有限元法的形成做出了贡献。

在有限元的发展中，用节点位移插值内部位移的这种位移协调单元一直占有主导地位。但是，这种单元在分析板壳结构中遇到了相容性条件难以满足的困难。在解决此问题的过程中，又提出了混合元<sup>(16)</sup>、杂交元<sup>(17)</sup>以及各类的不协调单元<sup>(18-19)</sup>，这些单元的研究，不仅扩大了有限元的应用范围，改善了单元的性质，而且也促进了弹性力学变分原理的研究与发展<sup>(20-21)</sup>。

有限元法由结构分析开始，很快广泛应用于热传导、电磁场、流体、渗流等连续问

题,并取得明显的成功<sup>[22-25]</sup>。由于大存贮量,高速度计算机的应用,对于非常困难的非线性问题,有限元方法也得到了成功的应用<sup>[26-28]</sup>。近年来,每年发表有关有限元研究论文数以千计,现已出版有数本有限元文献便览<sup>[29-31]</sup>、大批的有限元专著和教科书<sup>[32-35]</sup>。

有限元方法是与工程应用密切结合的,是直接为产品设计服务的,因而随着有限元理论的发展与完善,各种大小、专用的、通用的有限元结构分析程序也大量涌现出来。大型通用程序一般包括结构静力分析、动力分析、稳定性以及非线性分析等,有的还包括热传导、热应力、流体等分析,有齐全的单元库。著名的大型通用程序有 NASTRAN, ASKA, ADINA, SAP 等。目前,一般的工程结构分析问题,都可以直接用通用程序求解,不必再花费精力和时间另编计算程序。但是,大型通用程序一般需用大型电子计算机。由于强调了通用性,适用于广泛的问题,因而掌握起来比较困难,更不易于由用户针对自己问题的特点来修改和改进(SAP 系列通用程序似乎偏重于研究分析,比较便于用户增加单元和扩大功能,它本身也在不断发展与改进)。大型通用程序的研制,要花费巨大的人力和时间,一个通用程序完成了,客观需要和有限元方法又都有了新的发展,因而不断有新的通用程序出现,老的程序也不断有修订的新版本。

但通用程序不可能是万能的,使用也不会是最方便的,针对某一类结构分析,适用于各种特殊问题的专用有限元程序则是大量的。积累与组成有限元分析程序库,对工程应用是很有实际意义的。随着电子计算机的广泛应用,结构有限元分析与产品设计结合起来,形成产品分析、设计(甚至制造)一体化(CAD、CAM),这将是工程生产的发展方向,有限元法在这当中,将起着重要作用。

有限元法发展至今已有30年的历史了,已是比较成熟了,多数人认为它已基本定型,不会像60年代那样,有很多戏剧性的突破了。但在巩固有限元方法的物理、数学基础方面,扩大其应用领域,以及求解诸如非线性、不同物理作用相互耦合、动态分析以及由材料微观结构计算其力学性能等复杂问题方面,有限元法还会不断发展并取得成功。在我国实现四化过程中,推广有限元的应用,以改进产品设计,提高产品性能,更是非常现实的问题。

### 1.3 有限元的分析方法

由上述可见,结构的有限元分析涉及到力学原理、数学方法和计算机程序设计等几个方面,诸方面互相结合才能形成这一完整的分析方法。

无论对什么样的结构(如平面、三维、板壳等),有限元分析过程都是一样的、程序化了。一般典型步骤为:(1)将结构划分成单元,(2)单元分析,(3)集合成整体,(4)数值求解。当然,在计算程序中后三个步骤可以是互相交叉的。对于不同的结构,采用的单元是不相同的,但各种单元的分析方法又是一致的。掌握一种典型结构(如平面问题)的有限元分析方法,就可以推广应用于各种结构,这一点对于工程应用也是十分方便的。

目前,位移协调有限元是应用最广的单元,各通用程序中包括的单元绝大多数属于

这一类，它是本书的研究重点。为改善单元性能，克服协调元的不足，本书亦将介绍部分非协调元。

#### 参 考 文 献

- [1] P.H.Denke, A Matrix Method of Structural Analysis, Proc. 2nd U.S. Natl. Congr. Appl. Mech. ASME, 445-451, June, 1954.
- [2] M.J.Turner, R.W.Clough, H.C.Martin and J.C.Topp, Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, J. Aeronaut. Sci., Vol. 23, No. 9, 1956.
- [3] R.W.Clough, The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, Proc. of 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., September 8-9, 1960.
- [4] R.J.Melosh, Basis for the Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method, AIAA J., Vol.1, 1963.
- [5] B.Fracijs de Veubeke, Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis, in AGARD-ograph 72, B.F.de Veubeke (ed.), Pergamon Press, New York, 1964.
- [6] R.E.Jones, A Generalization of the Direct Stiffness Method of Structural Analysis, AIAA J., Vol.2, 1964.
- [7] O.C.Zienkiewicz and Y.K.Cheung, Finite Element in the Solution of Field Problem, The Engineer, Sept., 1965.
- [8] R.B.Kellogg, Difference Equations on a Mesh Arising from a General Triangulation, Math. Comp., Vol.18, 1964.
- [9] M.Zlamal, On the Finite Element Method, Numer. Math., Vol.12, 1968.
- [10] I.Babuska, The Rate of Convergence for the Finite Element Method, SIAM J. Numer. Anal., Vol.8, 1971.
- [11] Y.Yamamoto and N.Tukuda, A Note on the Convergence of Finite Element Solutions, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.3, 1971.
- [12] H.F. Weinberger, Upper and Lower Bounds for Eigenvalues by Finite Difference Methods, Commun. Pure Appl. Math., Vol.9, 1956.
- [13] J.Greenstadt, On the Reduction of Continuous Problems to Discrete Form, IBM J. Res. Vol.3, 1959.
- [14] R.Courant, Variational Methods for the Solutions of Problems of Equilibrium and Vibrations, Bull. Am. Math. Soc., Vol.49, 1943.
- [15] 冯康, 基于变分原理的差分格式, 应用数学与计算数学, 1965年2卷4期。
- [16] L.R.Herrmann, Finite Element Bending Analysis for Plates, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 94, EM5, 13-25, 1968.

- [17] T.H.H. Pian, Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions, AIAA J., Vol.2, 1353-1355, 1964.
- [18] E.L.Wilson, R.L.Taylor, W.P.Donerty and T.Ghabussi, Incompatible Displacement Models, in Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, S.T.Fenves et al. (ed.), Academic Press, 43-57, 1973.
- [19] 唐立民, 陈万吉, 刘迎曦, 有限元分析中的拟协调元, 大连工学院学报, 1980, 2期。
- [20] 钱伟长, 弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用, 力学与实践, 1979年, 1, 2期。
- [21] K. Washizu, Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd ed., Pergamon Press, 1975.
- [22] W. Visser, A Finite Element Method for the Determination of Non-stationary Temperature Distribution and Thermal Deformations, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. Tech. Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1965.
- [23] O.C.Zienkiewicz, P.Mayer and Y. K.Cheung, Solution of Anisotropic Seepage Problems by Finite Elements, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 92, EMI, 111-120, 1966.
- [24] P.Silvester and M.V.K.Chari, Non-linear Magnetic Field Analysis of D.C.Machines, Trans. IEEE., No.7, 5-89, 1970.
- [25] M.M.Reddi, Finite Element Solution of the Incompressible Lubrication Problem, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., 91 (ser.F), 1969.
- [26] P.V.Marcal and I.P.King, Elastic-Plastic Analysis of Two-dimensional Stress Systems by the Finite Element Method, Int. J. Mech. Sci., 9, 143-155, 1967.
- [27] N.A.Cry and R.D.Teter, Finite Element Elastic Plastic Creep Analysis of Two-dimensional Continuum with Temperature Dependent Material Properties, Comp. Struct., 3, 849-863, 1973.
- [28] R.L.Taylor, K.Pister and G.Goudreau, Thermo-mechanical Analysis of Visco-elastic Solids, Int. J. Num. Meth. Eng., 2, 45-60, 1970.
- [29] A.C.Singhal, 775 Selected References on the Finite Element Method and Matrix Methods of Structural Analysis, Rep. S-12, Civil Eng. Dept., Laval University, Quebec, January, 1969.
- [30] J.R.Whiteman, A Bibliography for Finite Element Methods, Brunel Univ. Rep. TR/9, Dept. of Mathematics, Brunel University, Oxbridge, 1972.
- [31] D.H.Norrie and G.de Vries, Finite Element Bibliography, Plenum Press, New York, 1976.
- [32] O.C.Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw Hill



Book Company, New York, 1977.

[33] R.H.Gallagher, Finite Element Analysis: Fundamentals, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[34] K.J.Bathe and E.L.Wilson, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.

[35] R.D.Cook, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, 1981.

[36] K.H.Huebner and E.A.Thornton, The Finite Element Method for Engineers, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, 1982.

[37] 华东水利学院, 弹性力学问题的有限单元法, 修订版, 水利电力出版社, 1978。

[38] 谢贻权、何福保, 弹性和塑性力学中的有限单元法, 机械工业出版社, 1981。

[39] K.J.Bathe, Finite Element Procedure in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.

## 第二章 杆件结构

有限元方法是在结构分析的矩阵方法基础上发展起来的。杆件结构是工程中常见的结构,比较简单,其中每个杆件都是一个明显的单元,而杆单元受力与位移间的关系又是很容易求得的,且其物理概念清晰,比较直观。本章将以直梁及平面刚架为例,说明结构分析的矩阵位移法<sup>①</sup>。虽然它还不就是有限元方法,而且对于这种简单结构也不必要这样解;但是,这里采用的分析方法、表达方式以及涉及到的一些概念,对一般的有限元分析都是非常有用的。

### 2.1 直 梁

#### 2.1.1 节点位移与节点载荷

图2-1a为一简单的变截面梁,Z、M为施加于截面B处的集中力及力偶,是外载荷。按此梁的结构及受力情况,很自然地可将它分为三段,每段为一个单元。各段间交界的

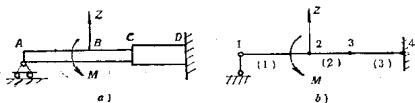


图 2-1

截面,可视为连接单元的节点,两端的支坐A及D也视为节点。这样,实际的梁结构就可简化为图2-1b所示的计算模型,共有三个单元,四个节点,各单元与节点统一编号如图2-1b所示。

按平截面假设,梁受载荷发生弯曲变形时,各截面的位移应包括截面中性轴处的挠度 $f$ 及截面的转角 $\theta$ 两项,这两项就是节点处位移的两个分量。任意节点 $i$ 处位移的两个分量为 $f_i$ 及 $\theta_i$ ,可以用列阵 $\{Q_i\}$ 表示<sup>②</sup>。

$$\{Q_i\} = \begin{Bmatrix} f_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = [f_i \theta_i]^T$$

$\{Q_i\}$ 称为 $i$ 节点的节点位移, $f_i$ 与 $\theta_i$ 是它的两个分量。对应于节点位移,任意节点 $i$ 的载荷也有两项分量,即横向力 $Z_i$ 和弯曲力偶 $M_i$ ,它们是与节点位移相对应的广义力,也可以列阵表示

$$\{Q_i\} = \begin{Bmatrix} Z_i \\ M_i \end{Bmatrix} = [Z_i M_i]^T$$

<sup>①</sup> 以后均以花括号 $\{\}$ 表示一列阵,方括号 $[ ]$ 表示一行阵或矩阵, $T$ 为矩阵转置符号,为印刷方便,常将列阵写为行阵的转置。

$\{Q_i\}$ 称为*i*节点的节点载荷,  $Z_i$ 、 $M_i$ 是它的两个分量。如梁被划分有*n*个节点,显然它应有 $2n$ 项节点位移分量和 $2n$ 项节点载荷分量。此直梁结构的全部节点位移可记为 $\{d\}$ ,全部节点载荷可记为 $\{Q\}$ ,它们都可视为各具有 $2n$ 个分量的矢量,我们称此梁具有 $2n$ 个自由度。为计算方便,节点位移和节点载荷的正方向应互相一致。在本书中规定, $f_i$ 和 $Z_i$ 都以向上为正, $\theta_i$ 和 $M_i$ 都以逆时针为正。

若直梁结构只受有集中载荷,在做上述分析时,受集中力处都应作为节点。若梁受有分布载荷时,可近似地将其作为相当的集中力,作用于节点上<sup>①</sup>。为解决直梁弯曲问题,可先求在全部节点载荷 $\{Q\}$ 作用下引起全部节点位移 $\{d\}$ <sup>②</sup>,进而再求出单元内的位移和内力。

### 2.1.2 单元弹性特性——单元刚度矩阵

整个梁结构是由单元组成的,为求全部节点位移 $\{d\}$ 与节点载荷 $\{Q\}$ 之间的联系,可先分析每个单元上节点力与节点位移之间的联系。图2-2表示梁内任意的一个单元,

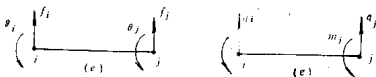


图 2-2

设此单元编号为*e*,其二节点编号为*i*、*j*。梁变形时,*e*单元的*i*、*j*节点都有位移。显然,*e*单元上*i*、*j*两节点的位移与整个梁结构上相对应的两节点的位移是相同的,有

$$\{d_i\} = \begin{Bmatrix} f_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}, \quad \{d_j\} = \begin{Bmatrix} f_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

一个单元有两个节点,共有四项节点位移分量,如以 $\{d\}^e$ 表示*e*单元的全部节点位移,则应为

$$\{d\}^e = [f_i \ \theta_i \ f_j \ \theta_j]^T$$

$\{d\}^e$ 称为*e*单元的节点位移,它可视为一个具有四项分量的矢量,此单元具有四个自由度。

梁受载荷而变形时,*e*单元的*i*、*j*两节点处应受到力的作用,也就是*e*段梁上*i*、*j*两截面的内力,包括有切力*q*和弯矩*m*,称之为节点力,可用列阵 $\{p\}$ 来表示。

*e*单元有两个节点*i*、*j*,其节点力各为

$$\{p_i\} = \begin{Bmatrix} q_i \\ m_i \end{Bmatrix}, \quad \{p_j\} = \begin{Bmatrix} q_j \\ m_j \end{Bmatrix}$$

*e*单元的全部节点力共有四项分量,以列阵 $\{p\}^e$ 表示,则有

$$\{p\}^e = [q_i \ m_i \ q_j \ m_j]^T$$

为计算方便,各单元节点力的正方向都取为一致,与节点载荷的正方向是一致的。即切力*q*均以向上为正,弯矩*m*均以逆时针为正,这一点与材料力学中梁的内力符号规

① 一般应取形状函数等效分配到相应的节点,见后面各章。

② 支型约束反力也是节点载荷,它虽是未知的,但对应的节点位移却是已知的(受约束的)。

定不同。应注意，节点载荷与节点力是不同的，前者是梁结构在节点处受到的外载荷，后者是由梁中截出来的单元在截面处受到的内力，就是材料力学中梁的内力，即切力和弯矩。只是此处的符号规定与材料力学中符号规定有所不同。

由上述分析可见，梁结构的每个单元都是在两端受力作用下而发生变形的。显然， $e$  单元两端的节点力  $\{p\}^e$  与此单元的节点位移  $\{d\}^e$  是有联系的。在弹性范围内、小变形情况下，二者间有线性关系，用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} q_i \\ m_i \\ q_j \\ m_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ \theta_i \\ f_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

简写为

$$\{p\}^e = [k]^e \{d\}^e$$

其中  $[k]^e$  为  $e$  单元的刚度矩阵，简称单元刚度，此处为  $4 \times 4$  的方阵，其中每个元素都是常数，它们与单元的几何形状和物理性质有关。

如梁单元的四项节点位移分量统一另作编号，记为  $u_1, u_2, u_3, u_4$ ，相应的节点力亦统一编号，记为  $S_1, S_2, S_3$  和  $S_4$ ，则式 (2.1) 可改写为

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

由上式可容易看出：当  $u_1=1$ ，且  $u_2=u_3=u_4=0$  时，有  $S_1=a_{11}$ ， $S_2=a_{21}$ ， $S_3=a_{31}$ ， $S_4=a_{41}$ 。一般，当某一项位移分量  $u_i=1$ ，且其余位移分量皆为零时，对应的一组节点力

$$S_m = a_{mi} \quad (m, i = 1, 2, 3, 4)$$

即，单元刚度中任一元素  $a_{mi}$  应等于：当  $i$  号节点位移分量为 1，且其它节点位移分量皆为零时，对应的  $m$  号节点力分量。这就是单元刚度矩阵中各元素的物理意义。由功的互等定理<sup>(2)</sup> 可以推知

$$a_{mi} = a_{im}$$

即，单元刚度矩阵是一对称的方阵。

如  $e$  单元长为  $l$ ，弹性模量为  $E$ ，截面惯性矩为  $J$ 。当  $u_1=1$ ，且  $u_2=u_3=u_4=0$  时，梁单元变形如图 2-3 所示，相当于一种悬臂梁的变形。由梁的变形公式<sup>(3)</sup> 有

$$\text{挠度:} \quad u_1=1 = \frac{S_1 l^3}{3EJ} - \frac{S_2 l^2}{2EJ}$$

$$\text{转角:} \quad u_2=0 = \frac{S_1 l^2}{2EJ} + \frac{S_2 l}{EJ}$$

可解出

$$S_1 = \frac{12EJ}{l^3} = a_{11}, \quad S_2 = \frac{6EJ}{l^2} = a_{21}$$

再由平衡方程解得

$$S_3 = -S_1, \quad S_4 = S_1 l - S_2$$

可得

$$S_3 = -\frac{12EJ}{l^3} = a_{31}, \quad S_4 = \frac{6EJ}{l^2} = a_{41}$$

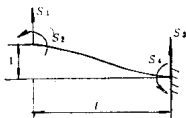


图 2-3

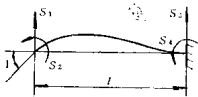


图 2-4

又, 当  $u_2 = 1 \text{ rad}$ , 且  $u_1 = u_3 = u_4 = 0$  时, 梁单元变形如图 2-4 所示, 相当于另一种悬臂梁的变形。同样由梁的变形公式及平衡方程可以求得

$$a_{12} = \frac{6EJ}{l^2}, \quad a_{22} = \frac{4EJ}{l}$$

$$a_{32} = -\frac{6EJ}{l^2}, \quad a_{42} = \frac{2EJ}{l}$$

用同样的方法, 可解出单元刚度阵的其余各元素, 即可求得单元刚度阵, 有

$$[k]^e = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & \vdots & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & \vdots & -6l & 2l^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -12 & -6l & \vdots & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & \vdots & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

由上面的计算结果也可以看出, 单元刚度阵是对称的。

在有限元分析中, 常常将位移、力及刚度矩阵都按节点来分组。如图 2-2 所示的单元, 其单元的节点力和节点位移可分组写为

$$\{p\}^e = \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix}^e, \quad \{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}^e$$

这里,  $\{p\}^e$  与  $\{\delta\}^e$  为各含四个分量的矢量, 而  $\{p_i\}$ 、 $\{p_j\}$  及  $\{\delta_i\}$ 、 $\{\delta_j\}$  又都是各含二分量的矢量。因此单元的刚度矩阵式 (2.2) 也可按虚线分块表示为

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}^e$$

其中每一子块  $[k_{ij}]^e$  都是  $2 \times 2$  的子矩阵。这样, 式 (2.1) 可分块表示为

$$\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}^e \quad (2.3)$$

将上式按矩阵分块相乘, 可展开为两个矢量方程, 即

$$\{p_i\}^e = [k_{i1}]^e \{\delta_i\}^e + [k_{i2}]^e \{\delta_j\}^e$$

$$\{p_j\}^e = [k_{21}]^e \{\delta_i\}^e + [k_{22}]^e \{\delta_j\}^e$$

其中每一个矢量方程都包含两个代数方程。总共为四个方程，反映出四个节点力分量与四个节点位移分量之间的弹性联系。

按刚度矩阵的物理意义，式(2.3)中单元刚度阵的子矩阵 $[k_{ij}]^e$ 表示为：当*j*节点取两组单位位移( $f_j=1, \theta_j=0$ 或 $f_j=0, \theta_j=1$ )，且其它节点位移皆为零时，对应于*i*节点的两组节点力。简述为： $[k_{ij}]^e$ 为*j*节点取单位位移，且其它节点位移为零时，对应于*i*节点的节点力。这里，我们把一个节点的位移和力，如 $\{\delta_i\}^e$ 和 $\{p_i\}^e$ 都看成一个量(矢量)，对应的刚度元素 $[k_{ij}]^e$ 也看成一个量(矩阵)。这种按节点，将位移、力及刚度矩阵元素分块的矩阵表示方法，在有限元分析中是广泛采用的。

### 2.1.3 单元的集合与刚度矩阵的迭加

图2-1所示的梁共有三个单元，每个单元都有如式(2.3)的方程，即

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^1 \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}^1 \quad (a)$$

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}^2 \quad (b)$$

$$\begin{Bmatrix} p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}^3 \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}^3 \quad (c)$$

单元间在节点处是相连的，梁有静变形时，节点上受力应是相互平衡的。为理解有限元总体方程的建立，可把节点作为独立的一部分，单元之间不是直接相连，而是通过节点相连的。对于梁，在节点处相当于取出一无限薄片做为独立的一部分。如图2-1b中，单元(1)与(2)在节点2相连。将节点2单独取出来，节点载荷 $Z_2$ 与 $M_2$ 就作用于此节点，如图2-5所示。单元(1)、(2)都与节点2相连，都对节点2有力作用。(1)单元对节点2的作用力，大小等于(1)单元节点2处的节点力 $q_2^1, m_2^1$ ①，方向相反。(2)单



图 2-5

元对节点2的作用力，大小等于(2)单元节点2处的节点力 $q_2^2, m_2^2$ ，方向相反。图2-5表示出节点2上的外载荷 $Z_2, M_2$ 和各单元与节点2之间的相互作用力。

根据节点2的平衡条件，可得

$$Z_2 = q_2^1 + q_2^2$$

$$M_2 = m_2^1 + m_2^2$$

① 上标表示(1)单元，下标表示节点2。

或简写成

$$\{Q_2\} = \{p_2\}^1 + \{p_2\}^2 \quad (d)$$

上式也可理解为：节点 2 受到外载荷  $\{Q_2\}$  作用，此载荷则要分配到与节点 2 相连的单元(1)、(2)上，即为各单元在节点 2 处的节点力  $\{p_2\}^1$  与  $\{p_2\}^2$ ，它们可从式(a)、(b)中求得。

由式 (a) 有

$$\{p_2\}^1 = [k_{21}]^1 \{\delta_1\}^1 + [k_{22}]^1 \{\delta_2\}^1$$

由式 (b) 有

$$\{p_2\}^2 = [k_{22}]^2 \{\delta_2\}^2 + [k_{23}]^2 \{\delta_3\}^2$$

注意到，不同单元上同一节点号码的位移是相等的<sup>①</sup>，在节点 2 处有

$$\{\delta_2\}^1 = \{\delta_2\}^2 = \{\delta_2\}$$

将以上三式代入式 (d) 得

$$\{Q_2\} = [k_{21}]^1 \{\delta_1\} + ([k_{22}]^1 + [k_{22}]^2) \{\delta_2\} + [k_{23}]^2 \{\delta_3\} \quad (e)$$

同理，由节点 3 的平衡，可得

$$\{Q_3\} = [k_{32}]^2 \{\delta_2\} + ([k_{33}]^2 + [k_{33}]^3) \{\delta_3\} + [k_{34}]^3 \{\delta_4\} \quad (f)$$

在梁的两端，节点只连着一个单元，节点载荷就等于该节点的节点力，各有

$$\{Q_1\} = \{p_1\}^1 = [k_{11}]^1 \{\delta_1\} + [k_{12}]^1 \{\delta_2\} \quad (g)$$

$$\{Q_4\} = \{p_4\}^3 = [k_{43}]^3 \{\delta_3\} + [k_{44}]^3 \{\delta_4\} \quad (h)$$

将式 (e)、(f)、(g) 及 (h) 合併在一起，写成

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 & 0 \\ 0 & k_{32}^2 & k_{33}^2 + k_{33}^3 & k_{34}^3 \\ 0 & 0 & k_{43}^3 & k_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

上式可简写为

$$[K]\{\delta\} = \{Q\} \quad (2.5)$$

其中  $[K]$  为整个结构的刚度矩阵，为  $8 \times 8$  的方阵，是由三个单元的刚度矩阵组合而成的，可记为

$$[K] = [k]^1 + [k]^2 + [k]^3 \quad (2.6)$$

由式 (2.4) 可知，迭加时是把具有相同下标的刚度元素(或子矩阵)相加在一起。由于结构总刚度矩阵的阶数与单元刚度矩阵的阶数不相同，故在矩阵迭加式(2.6)中，各单元的刚度矩阵不应再认为是  $4 \times 4$  的方阵，而应扩大到与结构总刚度矩阵一样大小，此处为  $8 \times 8$  (或  $4 \times 4$  子块)。在扩大的单元刚度矩阵中，是按单元所含的节点号码来安排刚度元素所在的位置的。在此例中，应为

$$[k]^1 = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

① 因而，如不会引起混乱，则 i 节点位移  $\{\delta_i\}^e$  的单元号码 e 可省略不写，记为  $\{\delta_i\}$ 。

$$[k]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{2,2}^2 & k_{2,3}^2 & 0 \\ 0 & k_{3,2}^2 & k_{3,3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k]^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{3,3}^3 & k_{3,4}^3 \\ 0 & 0 & k_{4,3}^3 & k_{4,4}^3 \end{bmatrix}$$

单元刚度矩阵是对称的，显然，如上述迭加而形成的结构整体刚度矩阵亦是对称的。另外，由式(2.4)可见，结构的整体刚度矩阵是稀疏的，并呈带状分布。即有很多的零元素，且非零元素都集中在对角线附近，节点越多此特点亦将越明显。

一般情况下，若将梁划分为  $m$  个单元， $n$  个节点，则式(2.5)将有  $2n$  个方程组，它是结构分析矩阵位移法的基本方程。其中

$$[K] = \sum_{i=1}^m [k]^i \quad (2.7)$$

$[K]$  为梁结构整体的刚度矩阵，为  $2n \times 2n$  的对称方阵。可见，结构整体的刚度矩阵是由所划分的全部单元刚度矩阵迭加而成的。

单元刚度矩阵的元素表示出单元具有某种单位节点位移时所对应的节点力，它反映出单元抵抗这种变形的能力（刚度）。结构整体刚度矩阵元素表示出整个结构具有某种单位节点位移时所对应的节点载荷，它反映出整个结构抵抗这种变形的能力（总刚度）。结构是全部单元组成的，其抵抗变形的能力应为各单元之和；显然，它的总刚度就应该是各单元刚度的总和（迭加）。

#### 2.1.4 边界约束

图 2-1 所示的梁具有四个节点，8 个自由度，式(2.4)为 8 个方程相联立。按图中给定的支持条件可知，8 个位移分量中  $f_1 = f_4 = \theta_4 = 0$ ，其余 5 个分量为未知。而 8 个对应的节点载荷中， $Z_1$ 、 $Z_4$  及  $M_4$  三项则为约束反力，是未知的，其余五项则是已知的外载荷（或者为零）。总之，8 个代数联立方程中共含有 8 个未知量，是可以求解的。

一般的梁结构，可能划分出更多的单元和节点，约束情况也可能更复杂。但都可以根据给定的支持条件，确定出相应的已知位移，或定出某些约束条件。将这些条件代入方程式(2.5)中，方程组才是可解的。否则，方程组(2.5)的解是不定的，其整体刚度矩阵是奇异的；因为在满足方程的位移中，可包含有任意的、整个梁毫不变形的刚体位移。用矩阵位移法分析时，只要结构具有足够的约束（静定、静不定均可），不是几何可变的，都可作如上处理，而得到可以求解的位移基本方程组。



## 2.2 平面刚架

### 2.2.1 单元与节点

平面刚架是工程中广泛应用的一种杆件结构。对于任意的平面刚架（如图2-6），如载荷都集中作用于节点，则可将结构中每个杆件作为一个单元，各杆件的交点作为节点①。图2-6所示的平面刚架共有26个单元，13个节点。

平面刚架在平面内承受载荷，将在平面内发生变形。这样，每个节点的位移应有三项分量；如为水平位移 $u$ 、铅垂位移 $v$ 及截面转角 $\theta$ 。 $i$ 节点的节点位移可用列阵表示为

$$\{\delta_i\} = [u_i, v_i, \theta_i]^T$$

对应于节点位移，节点的载荷也应有三项分量，即水平力 $X$ 、铅垂力 $Y$ 及力偶 $M$ 。 $i$ 节点的节点载荷列阵可表示为

$$\{Q_i\} = [X_i, Y_i, M_i]^T$$

平面刚架的每个节点有三项独立的位移分量，即有三个自由度。如刚架共有 $n$ 个节点，则应有 $3n$ 个自由度。如图2-6所示的平面刚架共有13个节点，应有39个自由度。

若以 $\{\delta\}$ 表示平面刚架的全部节点位移，以 $\{Q\}$ 表示其全部的节点载荷，两者都是具有 $3n$ 个分量的矢量。用位移法分析此平面刚架，首先要建立 $\{\delta\}$ 与 $\{Q\}$ 之间的联系。

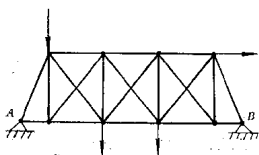


图 2-6

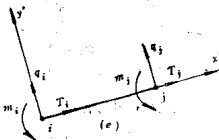
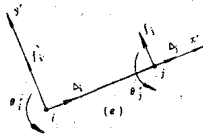


图 2-7

### 2.2.2 单元刚度（相对局部坐标）

平面刚架的每个单元都是一个杆件，两端各为一个节点，在平面内共有6项节点位移分量，其单元应有6个自由度。图2-7为任一 $e$ 单元，其两节点设为 $i$ 、 $j$ 。为分析方便，在单元分析中采用如图2-7所示的局部坐标轴 $x'$ （沿杆轴），另一坐标轴 $y'$ 与 $x'$ 轴相垂直。这样，节点的线位移可取为沿杆轴向位移 $\Delta$ 和横向的挠度 $f$ 。对应的广义力为轴向力 $T$ 和剪力 $q$ 。而截面的转角 $\theta'$ 和弯矩 $m$ 则与上节的单元是一样的。

这样， $e$ 单元的6个节点位移分量和6个节点力分量均可以列阵表示为

$$\{\delta'\}^e = [\Delta, f, \theta', \Delta, f, \theta']^T$$

$$\{P'\}^e = [T, q, m, T, q, m]^T$$

$\{\delta'\}^e$ 称单元节点位移， $\{P'\}^e$ 称单元节点力，它们都是对应于局部坐标系的，节点位移与节点力的正方向应取为一致，如图2-7所示。

① 如杆件中间有集中力，可将此载荷等效分配到杆的两端点上，或将力作用点也作为节点，把一个杆分为几个相应的单元。