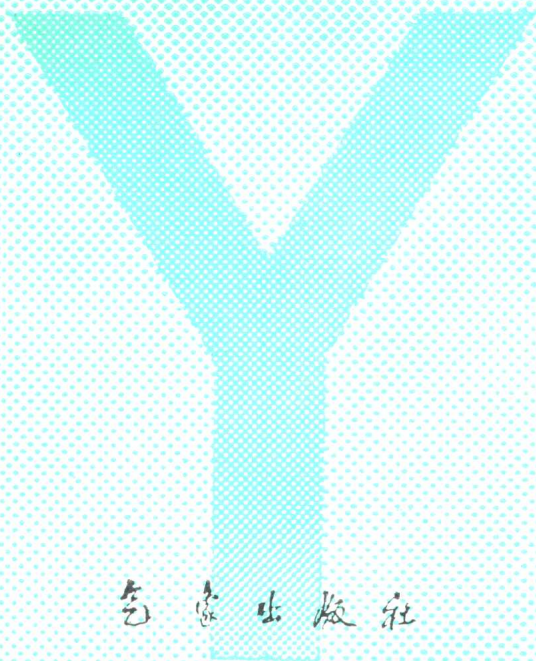


# 分形和分维引论

刘式达 刘式适 编著



气象出版社

# 分形和分维引论

刘式达 编著  
刘式适

3A276/02

气象出版社

(京)新登字046号

## 内 容 简 介

分形或分数维是近十几年来发展起来的一门新学科。简单地讲它就是没有特征尺度的自相似的结构。自然界中的许多现象,如地震、湍流、气候等都有这种特征。相对于有特征尺度的现象而言,无特征尺度现象可列在“复杂现象”之列。正因为如此,研究复杂现象的科学家们正在用分形概念打开他们的科学思维。

本书内容包括分形现象、分形意义、混沌中的分形、多分维、时间序列分形等,还专门介绍了地球物理学中的分形及分形应用于湍流中的最新进展。作者力图从物理现象出发,运用物理概念、教学论证和模型相结合介绍分形问题,并配有例子和习题,尽量使自相似性、奇异性、间歇性等概念有明确的物理基础,使读者能具体地而不是抽象地掌握分形概念。

本书可供理工科特别是地球学科本科高年级学生、研究生及广大科技工作者参考。

## 分形和分维引论

刘式达 刘式适 编著

责任编辑 徐 昭

终 审 刘宏勋

封面设计 牛涛 责任技编 席大光 责任校对 刘祥玉

\*

气象出版社出版

(北京西郊白石桥路46号)

北京市昌平环球印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经销

\*

开本: 850×1168 1/32 印张: 5.75 数字: 148千字

1993年9月第一版 1993年9月第二次印刷

印数: 1001—4500

ISBN 7-5029-1317-3/P·0576 (课)

定价: 7.00元

## 前 言

维数可以为分数这个事实，在10多年前恐怕不为人们所知，但是自从曼德布罗特(Mandelbrot)出版了“自然界的分维几何”(The Fractal Geometry of Nature, 1982)一书以后，分形(Fractal)已经形成一个新学科，它已经成为科学家们的热门话题。

分形或分数维，简单说就是没有特征尺度却有自相似的结构。自然界的许多现象如云彩、地震、湍流、气候等都具有这种特征，在这些现象中大大小小的时间(或空间)尺度都有，有的可以跨越几个量级。相对于有特征尺度的现象而言，无特征尺度的现象可以算在“复杂现象”之列。正因为如此，研究比较复杂现象的科学家正在用分形概念打开他们的思维。

单纯用几何角度就很难理解分数维这个概念，但是若从尺度变化后的不变量来理解，分形就必然和物理学中的对称性、重整化、标度律等概念联系起来。因此本书力图从物理现象出发介绍分形的有关问题，尽量使自相似性、奇异性、间歇性等概念有明确的物理基础。

本书既不纯粹从数学概念出发，又不纯粹从哲学高度来谈分形。而是既有物理概念，又有必要的数学论证或模型相配合，以致使读者能具体地而不是抽象地掌握分形这个概念。本书篇幅虽短，但涉及的问题包括分形现象、分形意义、混沌中分形、多分维、时间序列分形。还有专门章节介绍地球物理学中的分形。同时还介绍了应用分形到湍流中去的最新进展。

本书在编写过程中广泛地参考了国内外有关分形的论著。内容较丰富且新颖并有习题。但由于时间较短，加之水平有限，难

免有疏漏或不当之处，希望读者给予指正。

本书得到国家自然科学基金会的大力支持。

刘式达、刘式适

于北京大学地球物理系

1992.7.27.

# 目 录

|                                      |        |
|--------------------------------------|--------|
| <b>第一章 自然界的分形现象</b> .....            | ( 1 )  |
| §1 海岸线有多长.....                       | ( 1 )  |
| §2 湍流有多少涡旋.....                      | ( 2 )  |
| §3 Sierpinski海绵或垫片.....              | ( 2 )  |
| §4 Cantor 集合 .....                   | ( 3 )  |
| §5 Weierstrass 函数.....               | ( 5 )  |
| §6 雪花是如何形成的.....                     | ( 7 )  |
| §7 粘性脂化(viscous fingering)和生长现象..... | ( 8 )  |
| §8 生物和宇宙全息律.....                     | ( 10 ) |
| §9 地震活动.....                         | ( 11 ) |
| §10 气候有周期吗.....                      | ( 13 ) |
| <b>第二章 分形的意义</b> .....               | ( 15 ) |
| §1 分形的定义.....                        | ( 15 ) |
| §2 分数维大于拓扑维但小于所占领的空间维.....           | ( 17 ) |
| §3 复杂性的量度.....                       | ( 21 ) |
| §4 湍流间歇性的量度.....                     | ( 23 ) |
| §5 自相似和标度不变性.....                    | ( 24 ) |
| §6 相变和临界指数.....                      | ( 25 ) |
| §7 功率谱指数和分维.....                     | ( 27 ) |
| §8 带有不等比的标度.....                     | ( 28 ) |
| §9 生长现象的分维.....                      | ( 30 ) |
| §10 自仿射的分维.....                      | ( 31 ) |
| §11 零集.....                          | ( 32 ) |
| §12 谱维数.....                         | ( 34 ) |
| <b>第三章 混沌吸引子的分维</b> .....            | ( 36 ) |

|            |                                        |         |
|------------|----------------------------------------|---------|
| §1         | 浑沌模型                                   | ( 36 )  |
| §2         | 自相似性及标度律                               | ( 37 )  |
| §3         | Feigenbaum常数和分维                        | ( 40 )  |
| §4         | 浑沌和相变之间的相似性                            | ( 43 )  |
| §5         | 复映射和 Julia 集                           | ( 44 )  |
| §6         | Yorke公式                                | ( 48 )  |
| §7         | 浑沌吸引子的信息                               | ( 50 )  |
| §8         | 浑沌吸引子的多分维                              | ( 53 )  |
| §9         | 二维映射及吸引域的边界                            | ( 54 )  |
| <b>第四章</b> | <b>多分维及其标度律</b>                        | ( 58 )  |
| §1         | 单标度和多标度                                | ( 58 )  |
| §2         | 非均匀分布的 Cantor 集合                       | ( 62 )  |
| §3         | 奇异性标度指数 $\alpha$ 及分布函数标度指数 $f(\alpha)$ | ( 64 )  |
| §4         | Renyi 信息和 $D_q$                        | ( 67 )  |
| §5         | 人口分布的多分维过程                             | ( 70 )  |
| §6         | Devil's 楼梯                             | ( 73 )  |
| §7         | 有两个长度尺度的非均匀分布多分维过程                     | ( 75 )  |
| §8         | 时间序列的多分维                               | ( 77 )  |
| §9         | 分层电阻网络                                 | ( 79 )  |
| §10        | 增长模型                                   | ( 81 )  |
| §11        | 子波变换                                   | ( 83 )  |
| <b>第五章</b> | <b>时间序列中的分维</b>                        | ( 87 )  |
| §1         | 重建相空间                                  | ( 87 )  |
| §2         | 嵌入定理                                   | ( 89 )  |
| §3         | 相关维数的等价性                               | ( 90 )  |
| §4         | 可预报性                                   | ( 93 )  |
| §5         | 信息、熵和层次                                | ( 95 )  |
| §6         | 信息压缩                                   | ( 98 )  |
| §7         | 分数维布朗运动                                | ( 100 ) |

|                             |                             |         |
|-----------------------------|-----------------------------|---------|
| §8                          | $1/f$ 噪声及其维数                | ( 103 ) |
| §9                          | 混沌时间序列的非线性模式                | ( 110 ) |
| <b>第六章 地球物理学中的分形</b>        |                             | ( 114 ) |
| §1                          | 跨越很宽的尺度                     | ( 114 ) |
| §2                          | 湍流过程                        | ( 114 ) |
| §3                          | 细粒化和粗视化                     | ( 117 ) |
| §4                          | $\alpha$ 和 $\beta$ 模式, 椭圆维数 | ( 120 ) |
| §5                          | 双曲分布                        | ( 121 ) |
| §6                          | 重整化群方法                      | ( 123 ) |
| §7                          | 用重整化群方法研究地震                 | ( 128 ) |
| §8                          | 自组织临界现象                     | ( 131 ) |
| <b>第七章 同宿和异宿轨道——孤立波和冲击波</b> |                             | ( 136 ) |
| §1                          | 同宿轨道                        | ( 136 ) |
| §2                          | 异宿轨道                        | ( 138 ) |
| §3                          | 鞍-结和鞍-焦异宿轨道                 | ( 140 ) |
| §4                          | 反应扩散方程中的同(异)宿轨道             | ( 142 ) |
| §5                          | Schrödinger方程中的同(异)宿轨道      | ( 143 ) |
| §6                          | 碰撞等离子体的激波                   | ( 145 ) |
| §7                          | 大气环流方程的同(异)宿轨道              | ( 146 ) |
| §8                          | 三阶系统中的同宿轨道                  | ( 148 ) |
| §9                          | 湍流的 $K_4V$ -Burgers 方程模型    | ( 149 ) |
| §10                         | 关于湍流能谱的若干问题                 | ( 152 ) |
| <b>第八章 湍流的多分维过程</b>         |                             | ( 156 ) |
| §1                          | Kolmogorov理论及其问题            | ( 156 ) |
| §2                          | 多分维 $D_4$ 和间歇性指数            | ( 158 ) |
| §3                          | 标度律和 $f(\alpha)$ 谱          | ( 159 ) |
| §4                          | 对数正态分布模式                    | ( 160 ) |
| §5                          | 两尺度 Cantor 集合模式             | ( 162 ) |

|                     |         |
|---------------------|---------|
| §6 $\beta$ 模式 ..... | ( 163 ) |
| §7 标量湍流场 .....      | ( 165 ) |
| §8 标量湍流场的各种模式 ..... | ( 168 ) |
| 习题 .....            | ( 170 ) |
| 参考书目 .....          | ( 175 ) |

# 第一章 自然界的分形现象

## §1 海岸线有多长

分形Fractal这个词来自拉丁文fractus, 意思含有断裂和碎片。它的创始人是曼德尔勃罗特(B.B.Mandelbrot)。正如他常说的“云不是球体, 山不是锥体, 海岸线不是直线”。确实我们的大千世界是粗糙不堪而非完美圆润的, 是凹凸不平而非光滑平坦的, 是支离破碎而非完整无缺的。从本节开始叙述的现象都具有这个特点。

曼德尔勃罗特在著作中提出, 英国的海岸线有多长? 看起来, 这个问题似乎应有某个数字作为答案, 实际上正确的答案应该是看情况而定。因为海岸线有大大小小的各种弯曲, 如果您用公里作测量单位, 那么从几米到几十米的一些弯曲就会被忽略。如果您用米作测量单位, 那么测得的总长度就会增加, 但是厘米、毫米量级的小弯曲还是不能反映进去。

为什么海岸线的长度会看情况而定呢? 这正是因为海岸线没有特征尺度, 而是有大大小小的许许多多尺度。海岸线的长度在大小两个方向上受到自然限制, 把海岸线两头用直线连起来, 这是海岸线长度的一个上界。另一方面海岸线上沙石的最小尺度莫过于原子和分子的大小, 使用更小的尺度是无意义的。在这两个自然限度之间海岸线的长度是变的, 它不能成为海岸线的定量特征。

同时我们还应该看到, 无论是 50 万分之一的中国地图 还是 500 万分之一的地图, 中国的海岸线都是非常相似的。无特征尺度却有自相似的结构是海岸线的双重特征, 下面将看到, 这个特征正是本书的标题——分形和分数维。

## §2 湍流有多少涡旋

湍流是流体中的比较复杂的现象。普遍看法是湍流是由大大小小的涡旋所组成。大气中最大的涡旋其尺度为几千公里，最小的涡旋有几个毫米。因此和海岸线相似，我们不能问湍流有多少涡旋组成的这个问题。

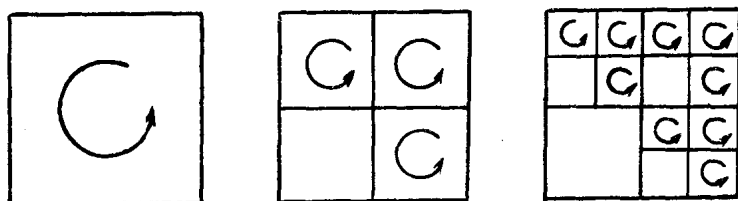


图1.1 湍流涡旋的自相似结构

假如我们用一个正方形代表一个大涡旋，那么图1.1中就含有三个小涡旋，而每个小涡旋又可以由三个更小的涡旋组成。实际上涡旋的个数随着尺度的减少而加多，它们被限制在最大和最小的两个自然限制中间。从图1.1看出，小涡旋放大就成为大涡旋的结构。1926年著名气象学家 Richardson 就猜测，在相当大的标度范围内，湍流由自相似的涡旋组成。1941年苏联著名科学家 Kolmogoror 给出了反映自相似结构的能谱和结构函数的分析表达式。后来 Mandelbrot 和 Frisch 把均匀各向同性的 Kolmogoror 湍流模型扩展到间歇性湍流模型。

虽然湍流现象很复杂，但若抓住自相似结构这个特点，同样我们可以建立起湍流规律以及找到描述湍流的定量特征。

## §3 Sierpinski 海绵或垫片

图1.2是一种有多个三角形孔或正方形孔的海绵或垫片。

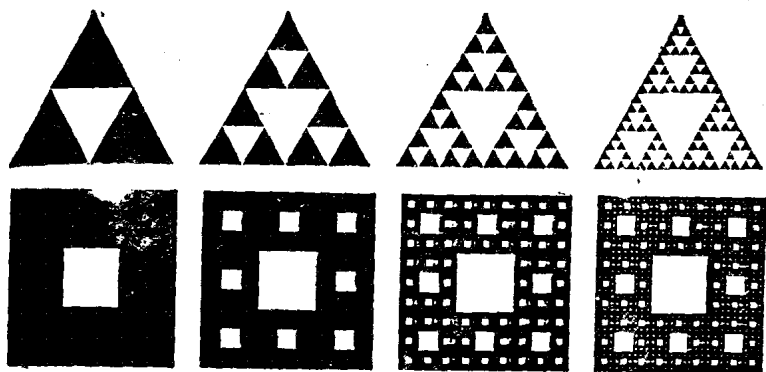


图 1.2  
(a) Sierpinski 海绵  
(b) Sierpinski 垫片

初看起来，它们应该有规律，但是当您“对准镜头”，逼近再逼近时，它们又显得杂乱无章，您要数一数孔的数目实在数不清。大大小小的孔都有，但是“自相似性”却把世上万物的“无规则性”以出人意料的规则方式反映出来。

## §4 Cantor 集合

它是一种由点构成的集合，其构造步骤是：将长度为 1 的线段分成三等分，去掉中间一段，再将剩下的二小段也分成三等分，也都去掉其中段，如此无限进行下去，剩下的点集就是 Cantor 集合。见图 1.3。

一般将区间  $[0, 1]$  分成长度为  $\frac{1}{m}$  的  $m$  段 ( $m \geq 2$ ) 保留其中的  $s$  段，去掉其它的  $m - s$  段。如果每次应去掉的线段排列位置都是固定的，则是经典的 Cantor 集合，图 1.4 是  $m = 4$ ,  $s = 2$  以及  $m = 9$ ,  $s = 3$  的两种 Cantor 集合。

有时 Cantor 集合分成的三段是不相等的，图 1.5 中一段长

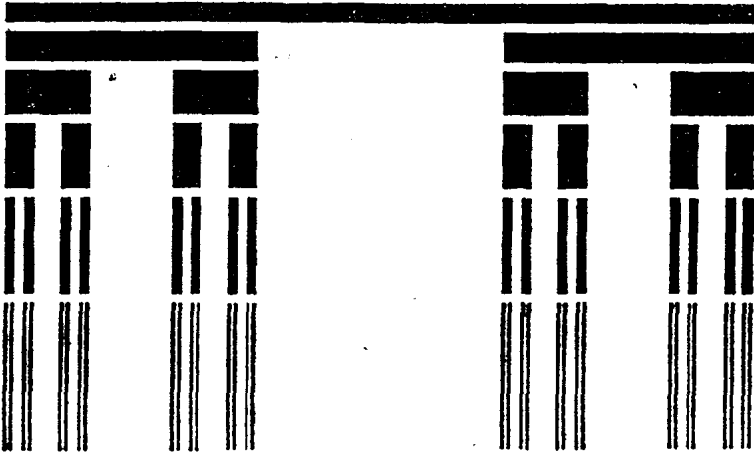


图1.3 传统的Cantor集合构造

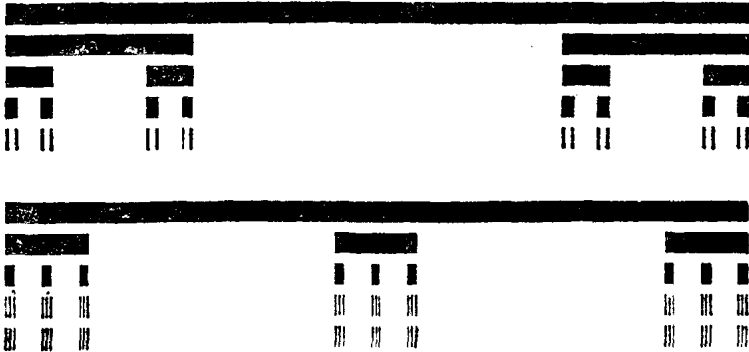


图1.4 两种Cantor集合



图1.5 不等比的Cantor集合

$l_1 = \frac{1}{4}$ , 另一段长  $l_2 = \frac{2}{5}$ , 去掉的一段为  $\frac{7}{20}$ .

有时去掉的线段是以某种概率取的，则它是不均匀分布的 Cantor 集合，见图 1.6。

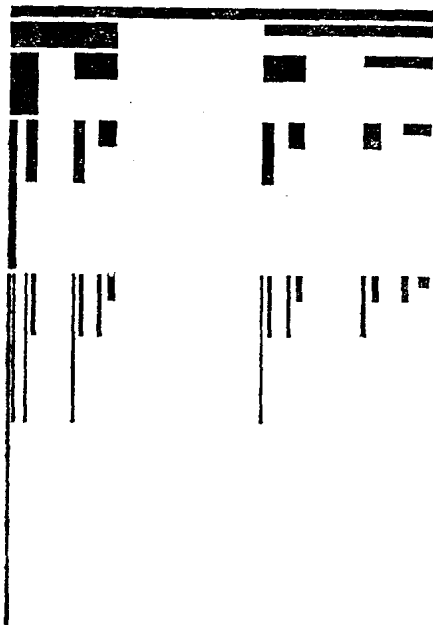


图 1.6 不均匀分布的 Cantor 集合

Cantor 集合的自相似性是显然的。

## §5 Weierstrass 函数

这是一个处处连续而处处不可微的函数，它是 Weierstrass 在 1872 年发现的。现在常用的形式是

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos b^n t)}{b^{(1-D)n}} \quad (1.1)$$

其中  $D$  就是 Fractal。图 1.7(a), (b), (c) 是  $b = 1.5$  时  $D = 1.2$ ,  $D = 1.5$  和  $D = 1.8$  的函数图像。

从 (1.1) 式显然有

$$c(bt) = b^{2-D}c(t) \quad (1.2)$$

(1.2) 式说明函数  $c(t)$  和函数  $c(bt)$  是相似的, 虽然两者的尺度不相同, 一个是  $t$ , 一个是  $bt$ 。图 1.8(a) 是  $b = 1.5$ ,  $D = 1.8$  的 W 氏函数, 而图 1.8(b) 是图 1.8(a) 中  $t = 0.0$  到 0.2 的一段, 可以看出和图 1.8(a) 多么相似。将图 1.8(a) 的横坐标和纵坐标重新加以标度, 分别为  $b^4 t$  和  $b^{4(2-D)}c(t)$ , 所得图像 1.8(c) 完全和图 1.8(a) 相同。

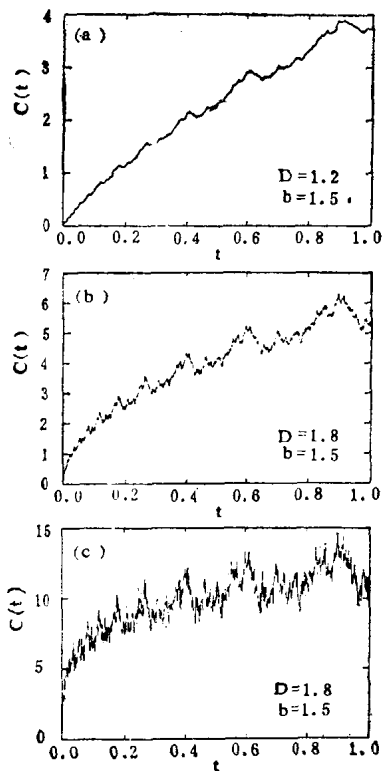


图1.7 Weierstrass分维函数,  $b = 1.5$

(a)  $D = 1.2$ , (b)  $D = 1.5$ ,  
(c)  $D = 1.8$

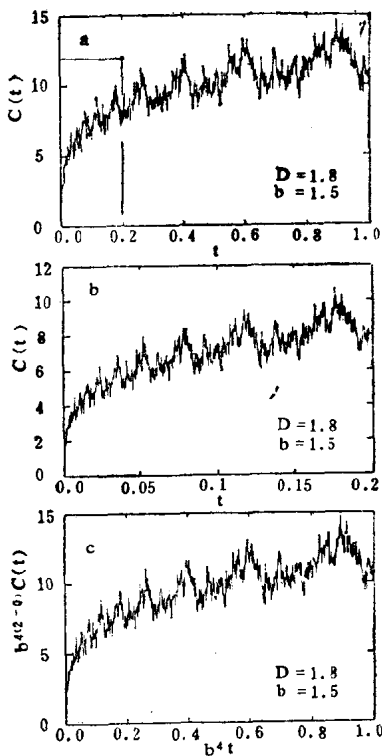


图1.8 Weierstrass函数,  $b = 1.5$ ,  
 $D = 1.8$

(a)  $0 \leq t \leq 1$  (b)  $0 \leq t \leq b^{-4}$   
(c) 曲线  $b$  重新标度

## §6 雪花是如何形成的

雪花是自然界中生长出来的一种复杂形态。若将它的形成机理搞清楚，会对物理学中凝聚态的形成和对医学、生物学、流体力学等领域中的各种增长现象的研究，都有很大意义。

雪花是从云中落下的，通常首先有一个冻结核，周围都是过



冷水汽。雪花周围水汽结冻所释放出的潜热得由水汽和冰核的交界面扩散而输送出去。由于交界面要输送大量潜热，交界面积就需足够大，因此交界面向外呈树枝状凸出（见图1.9）。交界面一旦凸出，水汽就喜欢在交界面凸出部分登陆冻结。为了模拟这种过程，我们采用细胞自动机模拟方法。

将平面分成若干小的六边

图1.9 雪花树枝状增长模型

形网格，每个格点叫细胞。每个格点上假设只有两种可能的状态：冰或水汽。冰相用数字1表示，水汽用数字0表示。最初网格中心只有一个冰细胞冻结核，其它细胞均为水汽。以后生长的规定是：若该点周围的6个细胞的数值和为奇数（即二进制的1），则该细胞就取冰相（数值为1），若为偶数（即二进制的0），则该细胞就取汽相（数值为0）。网格中的所有细胞都按这种规则演化。由于采用这个规则，演化的第一步就使冰核的六个角上长出六个冰晶，这是雪花的六角形状的开始，按此规则不断演化下去，一个含有大大小小六角形的雪花就生长出来，见图1.10。

这种模拟出来的六角形树枝状的雪花，其自相似性是显然

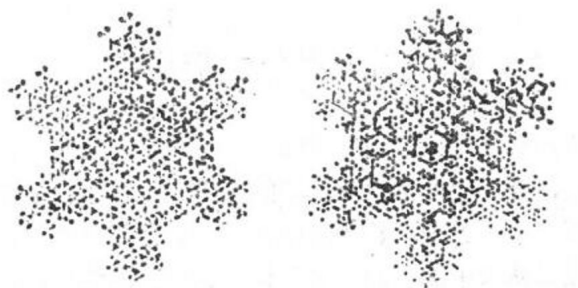


图1.10 细胞自动机模拟出的雪花

的。

## §7 粘性脂化 (viscous fingering) 和生长现象

粘性脂化是将低粘性流体（例如水）在压力下注入高粘性流

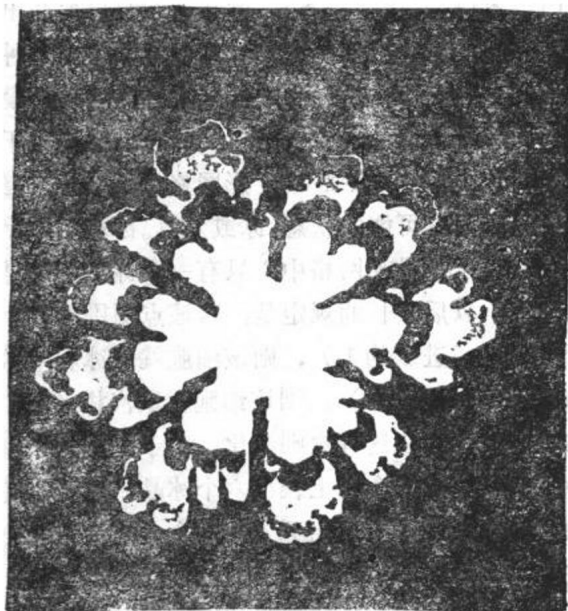


图1.11 粘性脂化形成的结构