高等医学院校试用教材

医用高等数学

（供五年制医学、卫生、口腔、儿科等专业用）

龚　曌主编

同济大学出版社

高等医学院校试用教材

医用高等数学

（供五年制医学、卫生、口腔、儿科等专业用）

龚　　曌主编

同济大学出版社

编 者 说 明

根据卫生部1981年修订的高等医学院校五年制教学计划规定所编写的《医用高等数学》一书，可供医学、卫生、口腔、儿科、放射、生物医学工程、检验等专业54～72学时讲授时选用，亦可供高等校院生物、环保、化学、地理等专业的师生、医药卫生学校师生、医药工作者及有关人员参考.

本书编写时力求做到：

（1）既立足于学生已有的数学基础知识，又注意承上启下、展望未来；

（2）既保持一定的数学系统性，又密切联系医学实际；

（3）既揭示近代医学科学的数量规律性，又反映现代化计算工具的应用；

（4）既考虑内容选取上的少而精，又注意文字上的通俗易懂；

（5）既有典型范例，又配有适量的习题.

考虑到学生原有数学水平的参差不齐，本书对函数、极限、连续和导数等作了扼要介绍，供各院校自行掌握，可作课堂教学内容，也可供学生自学. 为了便于教师集中精力备课，我们还为本书编印了《习题解答》一册，供教师参考.

本书第一、二、三、四、五、六、七、八、九、十一章由龚墨编写，第十章由张福星编写，并由龚墨负责定稿，由于编者水平有限，虽经多次修订，书中难免有缺点与错误，欢迎读者批评指正.

编 者

一九八五年二月于上海铁道医学院

内 容 提 要

本书是根据卫生部1981年修订的高等医学院校五年制教学计划编写的教材，全书内容有函数、极限、导数、微分、不定积分、定积分、微分方程、拉氏变换、概率论、数理统计、误差理论等。书末附有习题答案。

本书文字通俗易懂，内容由浅入深，书中既保持了数学的系统性又紧密联系医学实际，各章均配有较多的例题和习题，可供读者参考练习。

目　录

第一章　函数与极限

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系．极限方法则是研究变量的一种基本方法．本章将介绍变量、函数和极限等基本概念，以及它们的一些性质．

§1—1　常量与变量

在某些条件下，保持同一确定数值的量叫做**常量**，能取不同数值的量叫做**变量**．

例如，在生物学中，在一定的容积的培养基中成批培养细胞．在培养过程中，容积是常量，细胞的数目、培养基中的营养物质等是变量．

一个量是常量还是变量，应根据具体情况作具体分析．例如，一个人在从小孩长成大人的整个过程中，他的身高是一个变量，但在某一天的身高变化很微小，就可以把它看作常量．一般说来，如果一个变量在所讨论的过程中变化很小，而且对于实际要求可以看作不变，就可以把这个变量看作常量．

§1—2　函　　数

1．函数的定义

如果对于变量 x 的每一个可能取的值，变量 y 都有一个确定的值与它对应，则变量 y 就叫做变量 x 的函数. 变量 x 叫做**自变量**，而 y 叫做**函数**或**因变量**. 记作：

$$y=f(x),\ y=F(x),\ y=\varphi(x)\text{等等.}$$

例如 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$，当 $x_1=0$ 及 $x_2=-1$ 时，函数值为：

$$f(x_1)=f(0)=\frac{2\times 0-1}{0^2+1}=-1,$$

$$f(x_2)=f(-1)=\frac{2\cdot(-1)-1}{(-1)^2+1}=-\frac{3}{2}$$

2. 函数的定义域

对于某一个函数 y 来说，自变量 x 必须有某些指定的可能的值才使它有意义. 这一指定的可能的值的全体叫做函数 y 的**定义域**.

函数定义域以区间表示，满足不等式

$$a<x<b$$

的所有 x 的值叫做**开区间**，以记号 (a,b) 表示. 满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的所有 x 的值叫做**闭区间**，以记号 $[a,b]$ 表示，不论开区间或闭区间，a 叫做区间的左端点，b 叫做右端点. 开区间不包含它的端点，闭区间包含它的两个端点.

若自变量 x 取值范围是任意实数，则 x 满足不等式

$$-\infty<x<+\infty$$

或者说，它取区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的一切值.

例如 $y=x^2$ 的定义域是区间 $(-\infty,+\infty)$；

$y=\arcsin x$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$；

$y=\sqrt{x^2-1}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$

3. 函数的几种特性

（1） 函数的单值性与多值性 若自变量 x 取定义域内一定值时，函数只有一个确定的值与之对应，这种函数叫做**单值函数**，否则就是**多值函数**.

例如 $y=x^3$，$y=\cos x$，$y=\log_a x$ 是单值函数；而在 $y^2=x$ 中，y 是 x 的多值（双值）函数.

（2） 函数的奇偶性 若函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 叫做**偶函数**. 若函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 叫做**奇函数**.

偶函数的图形对称于 y 轴. 因为 $f(-x)=f(x)$，所以若 $A(x, f(x))$ 是图形上的点，则和它对称于 y 轴的点 $A'(-x, f(x))$ 也在图形上（图 1—1）.

奇函数图形对称于原点，因为 $f(-x)=-f(x)$，所以若 $A(x,f(x))$ 是图形上的点，则和它对称于原点 $A''(-x, -f(x))$ 也在图形上（图 1—2）.

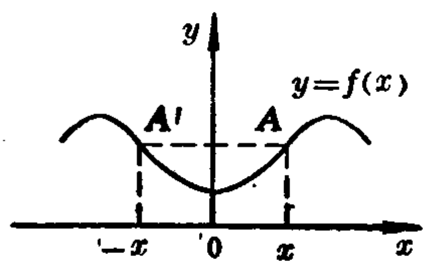


图 1—1

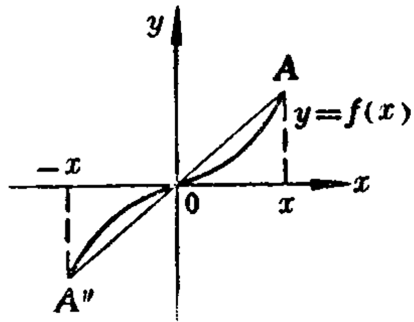


图 1—2

例如 函数 $y=x^2$ 及 $y=\cos x$ 都是偶函数；
函数 $y=x^3$ 及 $y=\sin x$ 都是奇函数；
函数 $y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

（3） 函数的单调性 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 增大而增大，即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 及 x_2，

当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则函数 $f(x)$ 叫做在区间（a，b）内是**单调增加**（图 1—3）；若函数 $f(x)$ 在区间（a，b）内随着 x 增大而减小，即对于（a，b）内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则函数 $f(x)$ 叫做在区间（a，b）内是**单调减少**（图1—4）．单调增加或单调减少的函数，统称为**单调函数**．

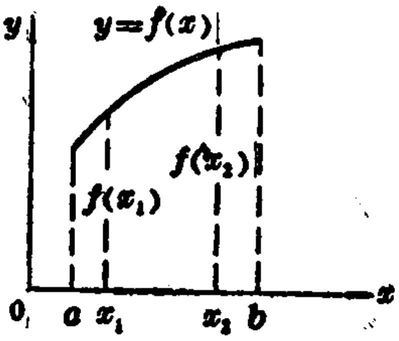


图 1—3

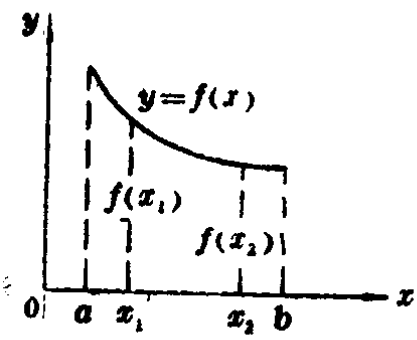


图 1—4

例如　函数 $y=x^2$ 在区间［0，$+\infty$）上是单调增加，而在区间（$-\infty$，0］上是单调减少，但在区间（$-\infty$，$+\infty$）上不是单调函数（图1—5）．

又例如　函数 $y=x^3$ 在区间（$-\infty$，$+\infty$）上是单调增加函数（图1—6）．

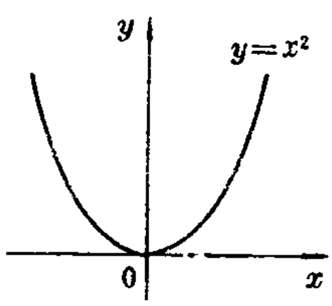


图 1—5

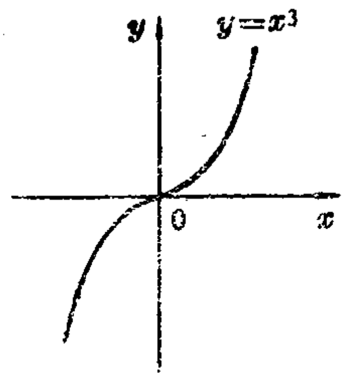


图 1 -6

4．反函数概念

在 $y=f(x)$ 中，若把 y 当作自变量，x 当作y的函数，则由 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $f(x)$ 的**反函数**，而 $f(x)$ 叫做**直接函数**.

习惯上，x 表示自变量，y 表示函数，因此，常常把 $x=\varphi(y)$中的自变量 y 改为 x,函数 x 改为 y，这样 $y=f(x)$ 的反函数就可写成 $y=\varphi(x)$

例如 设直接函数（相当于 $y=f(x)$）为

$$y=ax+b,\quad y=x^n,$$

则它的反函数（相当于 $x=\varphi(y)$）为

$$x=\frac{y-b}{a},\quad x=\sqrt[n]{y}$$

从而，它的反函数（相当于 $y=\varphi(x)$ ）为

$$y=\frac{x-b}{a},\quad y=\sqrt[n]{x}$$

反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形与原函数 $y=f(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$.

例如 函数 $y=ax+b$ 及其反函数 $y=\dfrac{x-b}{a}$的图形如（图 1—7）.

函数 $y=x^3$ 及其反函数 $y=\sqrt[3]{x}$的图形如（图 1—8）.

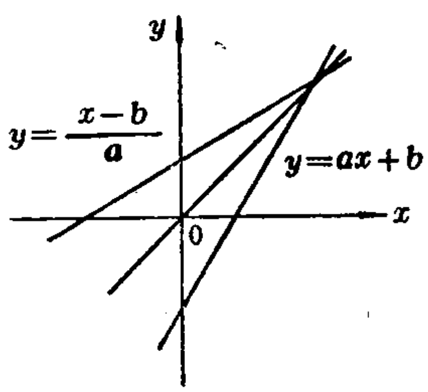


图 1—7

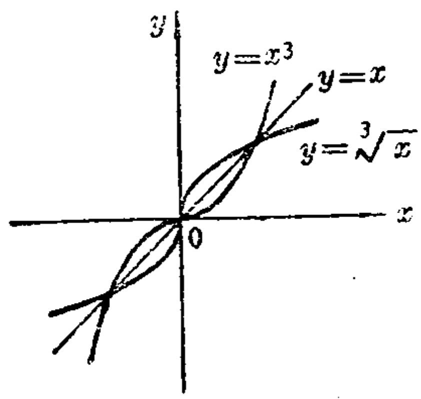
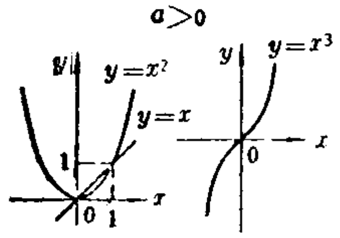
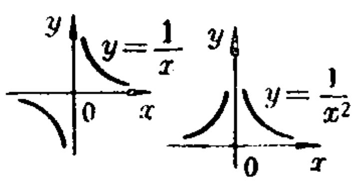
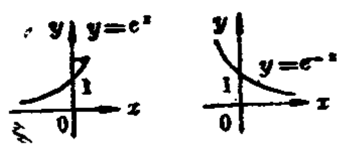
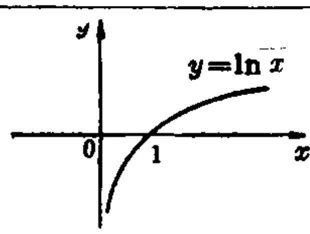
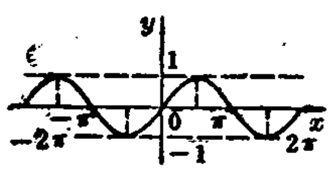


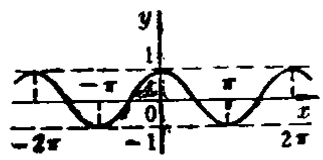
图 1—8

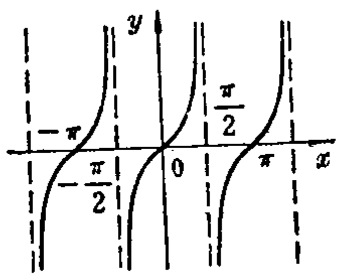
5. 基本初等函数的图形

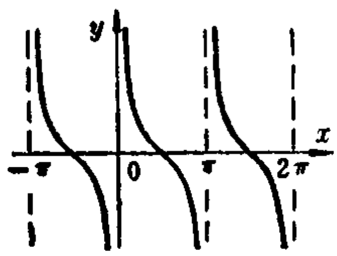
为了今后学习和查阅的方便，把基本初等函数的图形和简单性质列表如下：

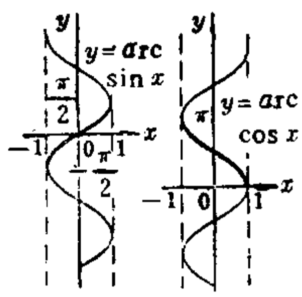
名称	表达式	定义区间	图形	简单性质
幂函数	$y=x^{\alpha}$	$0<x<+\infty$ 当 α 为正、负整数或分数时，定义区间可以扩大．具体情况自行讨论．	$\alpha>0$  $\alpha<0$ 	图形都经过第一象限的点(1,1)．α 为偶数时，图形关于 y 轴对称；α 为奇数时，图形关于原点对称；α 为负数时，图形在原点间断．
指数函数	$y=a^x$ $a>0$ $a\neq1$	$-\infty<x<+\infty$		图形都经过 y 轴上的点(0,1)． $y=e^x$ 经过(0,1)点后随 x 的增大急速增大； $y=e^{-x}$ 经过(0,1)点后随 x 的增大而逐渐衰减为零．
对数函数	$y=\log_a x$ $a>0$ $a\neq1$	$0<x<+\infty$		图形都经过 x 轴上的点(1,0)． $y=\ln x$ 随 x 的增大而增大，但 x 越大，y 增大得越缓慢．
三角函数	$y=\sin x$	$-\infty<x<+\infty$		以 2π 为周期的周期函数． 图形关于原点对称，并界于 $y=1$ 与 $y=-1$ 两平行线之间．

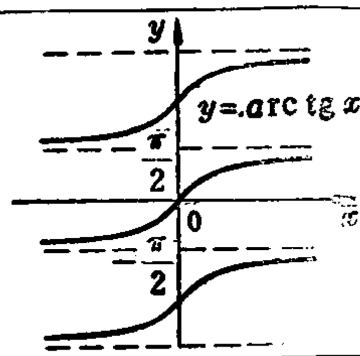
名称	表达式	定义区间	图形	简单性质
三角函数	$y=\cos x$	$-\infty<x<+\infty$		以2π为周期的周期函数． 图形关于y轴对称，并界于$y=1$与$y=-1$两平行线之间．
	$y=\mathrm{tg}x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$的全体实数（k为整数）．		以π为周期的周期函数． 图形关于原点对称，在$x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$处间断（k为整数）．
	$y=\mathrm{ctg}x$	$x\neq k\pi$的全体实数(k为整数)．		以π为周期的周期函数． 图形关于原点对称；在$x=k\pi$处间断（k为整数）．
反三角函数	$y=\arcsin x$ $y=\arccos x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$ $-1\leqslant x\leqslant 1$		$y=\arcsin x$的主值为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 记作$\mathrm{Arc}\sin x$ $y=\arccos x$的主值为 $0\leqslant y\leqslant\pi$ 记作$\mathrm{Arc}\cos x$
	$y=\mathrm{arc\,tg}x$	$-\infty<x<+\infty$		$y=\mathrm{arc\,tg}x$的主值为 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ 记作$\mathrm{Arc\,tg}x$

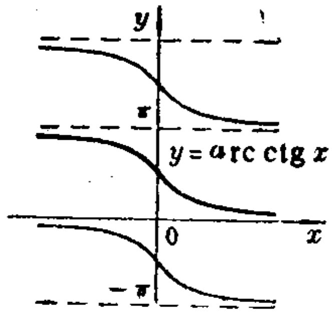










名称	表达式	定义区间	图形	简单性质
反三角函数	y=arc ctg$x$	$-\infty < x < +\infty$		y= arc ctg$x$ 的主值为 $0<y<\pi$ 记作 Arc ctg$x$

§ 1—3 数列的极限和函数的极限

1. 数列的极限

定义 对于数列 $\{x_n\}$:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

如果当 n 无限增大时，x_n 趋近于某一个定数 a，就说数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时，以 a 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \text{或} x_n \to a\quad (n\to\infty).$$

换句话说，当 n 充分大时，$|x_n - a|$ 可以任意小.

例如 数列 $\{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\}$，即

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots$$

当 $n\to\infty$ 时，以 0 为极限，因为当 n 无限增大时，

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \text{可以任意小}.$$

譬如说：要想 $\left|(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} < 0.1$,

$$\text{只须 } n > \frac{1}{0.1} = 10;$$

$$要想\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<0.01,$$

$$只须 n>\frac{1}{0.01}=100.$$

例 1 当 $n\to\infty$ 时，数列

$$0.3,\ 0.33,\ 0.333\cdots,\ 0.\overbrace{33\cdots3}^{n个3},\ \cdots$$

$$0,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4}\cdots,\ \frac{n+(-1)^n}{n},\ \cdots$$

都有极限，极限分别是1/3，1.

例 2 数列 0，1，0，1，…

当 n 增大时，数列永远在 0与 1 上无限跳动，它既不趋于 0，又不趋于 1，即不趋于一个定数，因此没有极限.

数列 1，4，9，16，…，n^2，…

随 n 增大，x_n 不断增大，但不和任何一个定数接近，也就是说没有极限.

2. 函数的极限

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义（但在 x_0 可以没有定义）.如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 趋近于定数 A，就说函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A，或 f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

如果当 x 从 x_0 的右侧（即大于 x_0）趋近于 x_0 时，$f(x)$ 趋近于定数 A，就说函数 $f(x)$ 以 A 为右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A，或 f(x)\to A\ (x\to x_0+0).$$

类似地，可定义左极限

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A，或 f(x)\to A\ (x\to x_0-0).$$

定义 2 如果当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 趋近于定数 A，