

高等医学院校试用教材

医用高等数学

（供五年制医学、卫生、口腔、儿科等专业用）

龚 翌 主 编

同济大学出版社

R311

7

3

高等医学院校试用教材

医用高等数学

(供五年制医学、卫生、口腔、儿科等专业用)

龚 翌 主 编

 济大学出版社

编者说明

根据卫生部 1981 年修订的高等医学院校五年制教学计划规定所编写的《医用高等数学》一书,可供医学、卫生、口腔、儿科、放射、生物医学工程、检验等专业 54~72 学时讲授时选用,亦可供高等院校生物、环保、化学、地理等专业的师生、医药卫生学校师生、医药工作者及有关人员参考。

本书编写时力求做到:

(1)既立足于学生已有的数学基础知识,又注意承上启下、展望未来;

(2)既保持一定的数学系统性,又密切联系医学实际;

(3)既揭示近代医学科学的数量规律性,又反映现代化计算工具的应用;

(4)既考虑内容选取上的少而精,又注意文字上的通俗易懂;

(5)既有典型范例,又配有适量的习题。

考虑到学生原有数学水平的参差不齐,本书对函数、极限、连续和导数等作了扼要介绍,供各院校自行掌握,可作课堂教学内容,也可供学生自学。为了便于教师集中精力备课,我们还为本书编印了《习题解答》一册,供教师参考。

本书第一、二、三、四、五、六、七、八、九、十一章由龚墨编写,第十章由张福星编写,并由龚墨负责定稿,由于编者水平有限,虽经多次修订,书中难免有缺点与错误,欢迎读者批评指正。

编者

一九八五年二月于上海铁道医学院

内 容 提 要

本书是根据卫生部1981年修订的高等医学院校五年制教学计划编写的教材,全书内容有函数、极限、导数、微分、不定积分、定积分、微分方程、拉氏变换、概率论、数理统计、误差理论等。书末附有习题答案。

本书文字通俗易懂,内容由浅入深,书中既保持了数学的系统性又紧密联系医学实际,各章均配有较多的例题和习题,可供读者参考练习。

目 录

第一章 函数与极限	1
§ 1—1 常量与变量.....	1
§ 1—2 函数.....	1
§ 1—3 数列的极限和函数的极限.....	8
§ 1—4 极限存在的判定法.....	13
§ 1—5 极限的基本定理.....	13
§ 1—6 两个重要的极限.....	14
§ 1—7 极限在医学上的应用.....	17
习题一	18
第二章 函数的连续性	21
§ 2—1 连续函数的概念.....	21
§ 2—2 函数的间断点.....	23
§ 2—3 初等函数的连续性.....	24
习题二	25
第三章 导数及其应用	26
§ 3—1 变量的变化率、切线的斜率、导数.....	26
§ 3—2 函数的可导性与连续性的关系.....	28
§ 3—3 初等函数的导数.....	30
§ 3—4 高阶导数.....	38
§ 3—5 中值定理.....	39
§ 3—6 函数的增减性和极值.....	40
§ 3—7 导数在医学上的应用.....	44
习题三	47
第四章 微分及其应用	49

§ 4—1	微分的概念·····	49
§ 4—2	微分的几何意义·····	52
§ 4—3	微分公式与微分法则·····	53
§ 4—4	微分的应用·····	55
§ 4—5	高阶微分及其与导数记号的关系·····	59
习题四	·····	61
第五章	不定积分 ·····	63
§ 5—1	原函数及不定积分概念·····	63
§ 5—2	原函数的力学意义及几何意义·····	65
§ 5—3	不定积分的性质·····	67
§ 5—4	不定积分的基本公式·····	69
§ 5—5	换元积分法·····	71
§ 5—6	分部积分法·····	84
§ 5—7	积分表的使用·····	90
习题五	·····	92
第六章	定积分及其应用 ·····	97
§ 6—1	定积分的概念·····	97
§ 6—2	定积分的简单性质·····	104
§ 6—3	定积分与原函数(不定积分)的关系··	107
§ 6—4	定积分的计算·····	110
§ 6—5	广义积分与 Γ 函数·····	114
§ 6—6	定积分的一般应用·····	119
§ 6—7	定积分在医学上的应用·····	133
§ 6—8	定积分的近似计算·····	137
习题六	·····	144
第七章	微分方程 ·····	148
§ 7—1	微分方程的基本概念·····	148

§ 7—2	一阶微分方程·····	153
§ 7—3	几个特殊类型的二阶微分方程·····	163
§ 7—4	二阶线性常系数齐次微分方程·····	171
§ 7—5	二阶线性常系数非次微分方程·····	178
§ 7—6	微分方程在生物学和医学中的应用·····	181
习题七	·····	191
第八章	拉普拉斯变换及其应用 ·····	196
§ 8—1	拉普拉斯变换的概念·····	196
§ 8—2	拉普拉斯变换的性质·····	201
§ 8—3	拉普拉斯逆变换·····	206
§ 8—4	拉普拉斯变换的应用·····	208
习题八	·····	211
第九章	概率论基础 ·····	213
§ 9—1	随机事件及其概率·····	213
§ 9—2	随机变量及其概率分布·····	237
§ 9—3	随机变量的数字特征·····	255
§ 9—4	大数定律和中心极限定理·····	270
习题九	·····	276
第十章	数理统计初步 ·····	280
§ 10—1	随机样本·····	280
§ 10—2	参数估计·····	297
§ 10—3	假设检验·····	307
§ 10—4	回归分析·····	320
§ 10—5	袖珍电子计算器在医学统计中的应用	335
习题十	·····	343
第十一章	误差论简介 ·····	347
§ 11—1	误差及其分类·····	347

§ 11—2	随机误差的四大分配定律及其方程…	348
§ 11—3	概率积分的计算……………	351
§ 11—4	随机误差的表示法……………	352
§ 11—5	误差表示法之间的关系及使用的选择	355
§ 11—6	最或然值……………	357
§ 11—7	残差与平均误差、标准误差的关系…	358
§ 11—8	误差论在医学和化学中的应用……………	361
习题十一	……………	363
附录一	简明积分表……………	365
附录二	正态分布表(一)……………	381
附录三	正态分布表(二)……………	382
附录四	t —分布表……………	383
附录五	相关系数检验表……………	384
附录六	概率积分表 $\frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-x^2} dx$ ……	385
附录七	希腊字母表……………	386
附录八	习题答案……………	387

第一章 函数与极限

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学。所谓函数关系就是变量之间的依赖关系。极限方法则是研究变量的一种基本方法。本章将介绍变量、函数和极限等基本概念，以及它们的一些性质。

§ 1—1 常量与变量

在某些条件下，保持同一确定数值的量叫做**常量**，能取不同数值的量叫做**变量**。

例如，在生物学中，在一定的容积的培养基中成批培养细胞。在培养过程中，容积是常量，细胞的数目、培养基中的营养物质等是变量。

一个量是常量还是变量，应根据具体情况作具体分析。例如，一个人在从小孩长成大人的整个过程中，他的身高是一个变量，但在某一天的身高变化很微小，就可以把它看作常量。一般说来，如果一个变量在所讨论的过程中变化很小，而且对于实际要求可以看作不变，就可以把这个变量看作常量。

§ 1—2 函 数

1. 函数的定义

如果对于变量 x 的每一个可能取的值，变量 y 都有一个确定的值与它对应，则变量 y 就叫做变量 x 的函数。变量 x 叫做自变量，而 y 叫做函数或因变量。记作：

$$y = f(x), y = F(x), y = \varphi(x) \text{ 等等.}$$

例如 $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$ ，当 $x_1 = 0$ 及 $x_2 = -1$ 时，函数值为：

$$f(x_1) = f(0) = \frac{2 \times 0 - 1}{0^2 + 1} = -1,$$

$$f(x_2) = f(-1) = \frac{2 \cdot (-1) - 1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{3}{2}$$

2. 函数的定义域

对于某一个函数 y 来说，自变量 x 必须有某些指定的可能的值才使它有意义。这一指定的可能的值的全体叫做函数 y 的定义域。

函数定义域以区间表示，满足不等式

$$a < x < b$$

的所有 x 的值叫做开区间，以记号 (a, b) 表示。满足不等式

$$a \leq x \leq b$$

的所有 x 的值叫做闭区间，以记号 $[a, b]$ 表示，不论开区间或闭区间， a 叫做区间的左端点， b 叫做右端点。开区间不包含它的端点，闭区间包含它的两个端点。

若自变量 x 取值范围是任意实数，则 x 满足不等式

$$-\infty < x < +\infty$$

或者说，它取区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的一切值。

例如 $y = x^2$ 的定义域是区间 $(-\infty, +\infty)$ ；

$y = \arcsin x$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$ ；

$y = \sqrt{x^2 - 1}$ 的定义域是 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$

3. 函数的几种特性

(1) 函数的单值性与多值性 若自变量 x 取定义域内一定值时, 函数只有一个确定的值与之对应, 这种函数叫做**单值函数**, 否则就是**多值函数**.

例如 $y = x^3$, $y = \cos x$, $y = \log_a x$ 是单值函数; 而在 $y^2 = x$ 中, y 是 x 的多值(双值)函数.

(2) 函数的奇偶性 若函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 叫做**偶函数**. 若函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 叫做**奇函数**.

偶函数的图形对称于 y 轴. 因为 $f(-x) = f(x)$, 所以若 $A(x, f(x))$ 是图形上的点, 则和它对称于 y 轴的点 $A'(-x, f(x))$ 也在图形上(图 1—1).

奇函数图形对称于原点, 因为 $f(-x) = -f(x)$, 所以若 $A(x, f(x))$ 是图形上的点, 则和它对称于原点 $A''(-x, -f(x))$ 也在图形上(图 1—2).

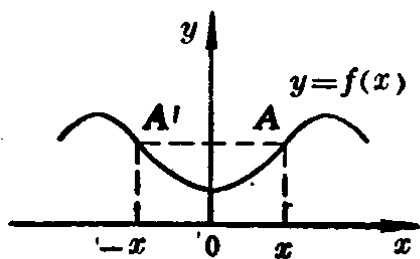


图 1—1

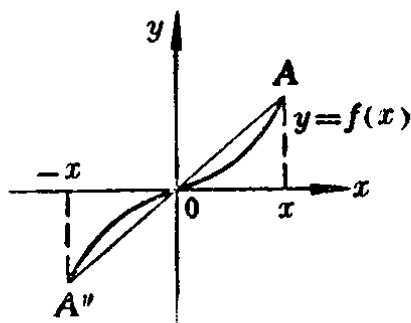


图 1—2

例如 函数 $y = x^2$ 及 $y = \cos x$ 都是偶函数;

函数 $y = x^3$ 及 $y = \sin x$ 都是奇函数;

函数 $y = \sin x + \cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

(3) 函数的单调性 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 增大而增大, 即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 及 x_2 ,

当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则函数 $f(x)$ 叫做在区间 (a, b) 内是**单调增加** (图 1—3);
若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 增大而减小, 即对于
 (a, b) 内任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则函数 $f(x)$ 叫做在区间 (a, b) 内是**单调减少** (图 1—4).
单调增加或单调减少的函数, 统称为**单调函数**.

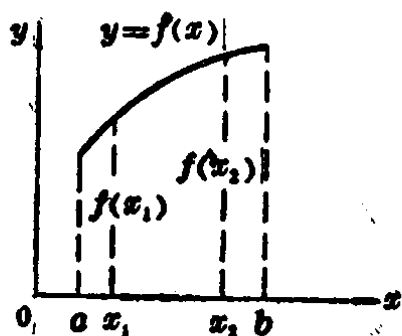


图 1—3

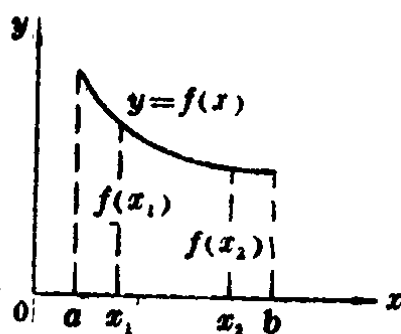


图 1—4

例如 函数 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加,
而在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少, 但在区间 $(-\infty, +\infty)$
上不是单调函数 (图 1—5).

又例如 函数 $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增
加函数 (图 1—6).

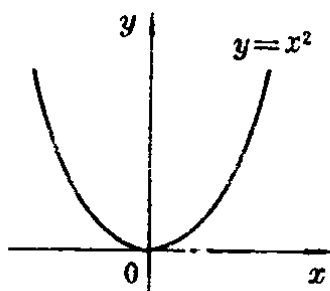


图 1—5

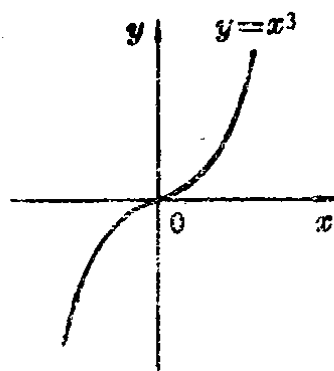


图 1—6

4. 反函数概念

在 $y=f(x)$ 中, 若把 y 当作自变量, x 当作 y 的函数, 则由 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $f(x)$ 的**反函数**, 而 $f(x)$ 叫做**直接函数**.

习惯上, x 表示自变量, y 表示函数, 因此, 常常把 $x=\varphi(y)$ 中的自变量 y 改为 x , 函数 x 改为 y , 这样 $y=f(x)$ 的反函数就可写成 $y=\varphi(x)$

例如 设直接函数 (相当于 $y=f(x)$) 为

$$y=ax+b, \quad y=x^n,$$

则它的反函数 (相当于 $x=\varphi(y)$) 为

$$x=\frac{y-b}{a}, \quad x=\sqrt[n]{y}$$

从而, 它的反函数 (相当于 $y=\varphi(x)$) 为

$$y=\frac{x-b}{a}, \quad y=\sqrt[n]{x}$$

反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形与原函数 $y=f(x)$ 的图形 对称于直线 $y=x$.

例如 函数 $y=ax+b$ 及其反函数 $y=\frac{x-b}{a}$ 的图形如 (图 1—7) .

函数 $y=x^3$ 及其反函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 的图形如 (图 1—8) .

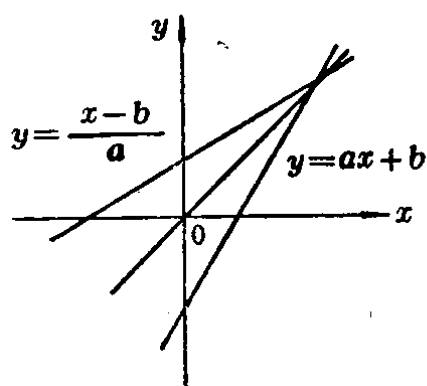


图 1—7

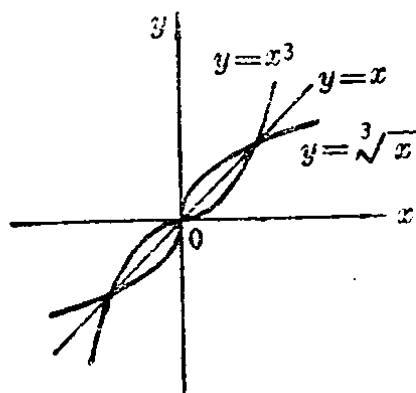
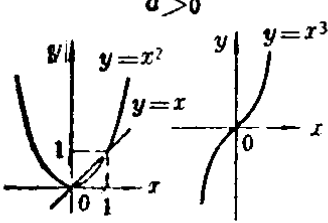
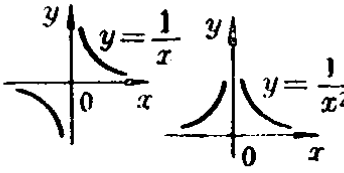
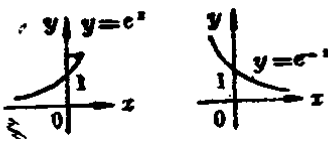
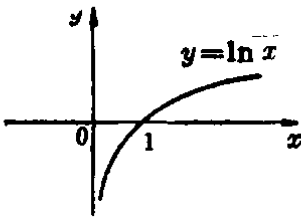
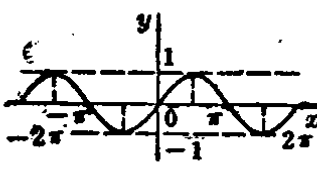
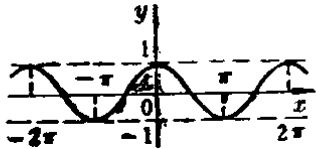
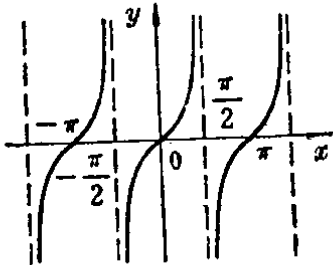
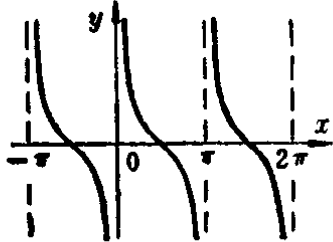
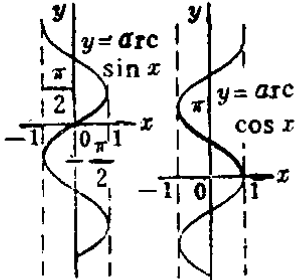
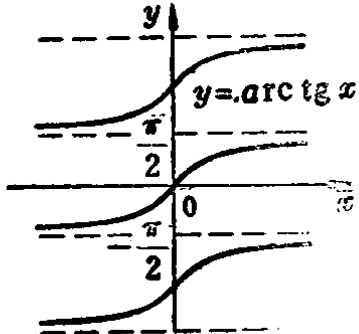


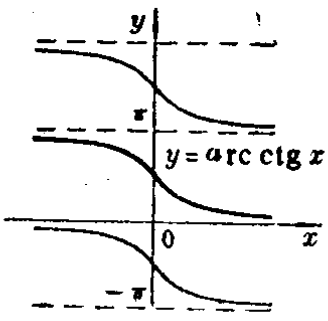
图 1—8

5. 基本初等函数的图形

为了今后学习和查阅的方便，把基本初等函数的图形和简单性质列表如下：

名称	表达式	定义区间	图 形	简单性质
幂函数	$y=x^{\alpha}$	$0 < x < +\infty$ 当 α 为正、负整数或分数时，定义区间可以扩大。具体情况自行讨论。	$a > 0$  $a < 0$ 	图形都经过第一象限的点 $(1,1)$ 。 α 为偶数时，图形关于 y 轴对称； α 为奇数时，图形关于原点对称； α 为负数时，图形在原点间断。
指数函数	$y=a^x$ $a > 0$ $a \neq 1$	$-\infty < x < +\infty$		图形都经过 y 轴上的点 $(0,1)$ 。 $y=e^x$ 经过 $(0,1)$ 点后随 x 的增大急速增大； $y=e^{-x}$ 经过 $(0,1)$ 点后随 x 的增大而逐渐衰减为零。
对数函数	$y=\log_a x$ $a > 0$ $a \neq 1$	$0 < x < +\infty$		图形都经过 x 轴上的点 $(1,0)$ 。 $y=\ln x$ 随 x 的增大而增大，但 x 越大， y 增大得越缓慢。
三角函数	$y=\sin x$	$-\infty < x < +\infty$		以 2π 为周期的周期函数。 图形关于原点对称，并界于 $y=1$ 与 $y=-1$ 两平行线之间。

名称	表达式	定义区间	图 形	简单性质
三角函数	$y = \cos x$	$-\infty < x < +\infty$		以 2π 为周期的周期函数。 图形关于 y 轴对称, 并界于 $y = 1$ 与 $y = -1$ 两平行线之间。
	$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 的全体实数 (k 为整数)。		以 π 为周期的周期函数。 图形关于原点对称, 在 $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 处间断 (k 为整数)。
	$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq k\pi$ 的全体实数 (k 为整数)。		以 π 为周期的周期函数。 图形关于原点对称; 在 $x = k\pi$ 处间断 (k 为整数)。
反三角函数	$y = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$		$y = \arcsin x$ 的主值为 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ 记作 $\operatorname{Arc} \sin x$
	$y = \arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$		$y = \arccos x$ 的主值为 $0 \leq y \leq \pi$ 记作 $\operatorname{Arc} \cos x$
	$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$-\infty < x < +\infty$		$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ 的主值为 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ 记作 $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$

名称	表达式	定义区间	图 形	简单性质
反三角函数	$y = \arccot x$	$-\infty < x < +\infty$		$y = \arccot x$ 的主值为 $0 < y < \pi$ 记作 $\text{Arc cot } x$

§ 1—3 数列的极限和函数的极限

1. 数列的极限

定义 对于数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果当 n 无限增大时, x_n 趋近于某一个定数 a , 就说数列 $\{x_n\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 以 a 为极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ 或 } x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

换句话说, 当 n 充分大时, $|x_n - a|$ 可以任意小.

例如 数列 $\{(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\}$, 即

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \dots$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 以 0 为极限, 因为当 n 无限增大时,

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \text{ 可以任意小.}$$

譬如说: 要想 $\left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < 0.1$,

$$\text{只须 } n > \frac{1}{0.1} = 10;$$

$$\text{要想 } \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < 0.01,$$

$$\text{只须 } n > \frac{1}{0.01} = 100.$$

例 1 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 数列

$$0.3, 0.33, 0.333\cdots, 0.\overbrace{33\cdots 3}^{n\uparrow 3}, \cdots$$

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n + (-1)^n}{n}, \cdots$$

都有极限, 极限分别是 $1/3, 1$.

例 2 数列 $0, 1, 0, 1, \cdots$

当 n 增大时, 数列永远在 0 与 1 上无限跳动, 它既不趋于 0 , 又不趋于 1 , 即不趋于一个定数, 因此没有极限.

数列 $1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots$

随 n 增大, x_n 不断增大, 但不和任何一个定数接近, 也就是说没有极限.

2. 函数的极限

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义 (但在 x_0 可以没有定义). 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 趋近于定数 A , 就说函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0).$$

如果当 x 从 x_0 的右侧 (即大于 x_0) 趋近于 x_0 时, $f(x)$ 趋近于定数 A , 就说函数 $f(x)$ 以 A 为右极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A, \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0 + 0).$$

类似地, 可定义左极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A, \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0 - 0).$$

定义 2 如果当 $|x|$ 无限增大时, $f(x)$ 趋近于定数 A ,