高等代數演習

魯鐵編譯

知識叢書出版社

目　錄

第一部分　問　題

第二部分 提 示

第三部分 解 法

第一部分　問題

第一章　複　數

1.複數計算

1　設x，y為實數，並滿足下列之關係

$$(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i,$$

試求x與y之值

2　設x，y，z，t為實數，求解下列方程組

$$(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)z+(1+4i)t=1+5i,$$
$$(3-i)x+(4-2i)y+(1+i)z+4it=2-i,$$

3　設n為整數，求　i^n　的值。

4　驗證下列恆等式

$$x^4+4=(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$$

5　計算下列各式：

a)$(1+2i)^6$；　b)$(2+i)^7+(2-i)^7$；　c)$(1+2i)^5-(1-2i)^5$

6　問何種情形下，兩複數之乘積為純虛數？

7　計算下列各式：

a)$\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$；　b)$\dfrac{a+bi}{a-bi}$；　c)$\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$；

d)$\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$；　e)$\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

8　設n為整數，試計算

$$\frac{(1+i)^n}{(1+i)^{n-2}}$$

之值。

9 試解下列各方程組：

a) $(3-i)x+(4+2i)y=2+6i$, $(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i$;

b) $(2+i)x+(2-i)y=6$, $(3+2i)x+(3-2i)y=8$;

c) $x+yi-2z=10$, $x-y+2iz=20$, $ix+3iy-(1+i)z=30$.

10 計算下列各值：

a) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$;　　b) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

*11 設 ω 代表 $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$；計算下列各值

a) $(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$;

b) $(a+b)(a+b\omega)(a+b\omega)^2$;

c) $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$;

d) $(a\omega^2+b\omega)(b\omega^2+a\omega)$.

12 a) 試求一複數使此複數與其平方互爲共軛。

b) 試求一複數使此複數與其立方互爲共軛。

*13 證明下列定理

設數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 若經過有理運算之合併，令此合併的結果爲 u，則在同樣有理運算之下，共軛複數 $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n}$ 合併的結果必爲 $\overline{u}$，即 u 之共軛複數。所謂有理運算乃指加、減、乘、除運算。

14 設 $x+yi=(s+ti)^n$，證明

$$x^2+y^2=(s^2+t^2)^n$$

其中 x，y 爲實數。

15 化簡下列各方根：

a) $\sqrt{2i}$,　b) $\sqrt{-8i}$,　c) $\sqrt{3-4i}$,　d) $\sqrt{-15+8i}$,

e) $\sqrt{-3-4i}$,　f) $\sqrt{-11+60i}$,　g) $\sqrt{-8+6i}$,　h) $\sqrt{-8-6i}$,

i) $\sqrt{8-6i}$, j) $\sqrt{8+6i}$, k) $\sqrt{2-3i}$, l) $\sqrt{4+i}+\sqrt{4-i}$
m) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$, n) $\sqrt[4]{-1}$, o) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.

16 已知 $a+bi$ 的平方根爲 $\pm(\alpha+\beta i)$，問 $-a+bi$ 的平方根爲何？

17 解下列方程式：
a) $x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0$;
b) $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$;
c) $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0$.

18 分解下列各方程式成實係數的因式並解之：
a) $x^4+6x^3+9x^2+100=0$;
b) $x^4+2x^2-24x+72=0$.

19 解方程式
a) $x^4-3x^2+4=0$; b) $x^4-30x^2+289=0$.

20 設 $p^2/4-q<0$ 求一公式，以解方程式
$$x^4+px^2+q=0.$$

2. 複數之極式

21 試用奧岡氏圖示法描下列各點：
a) 1; b) -1; c) $-\sqrt{2}$; d) i; e) $-i$;
f) $i\sqrt{2}$; g) $-1+i$; h) $2-3i$.

22 求下列複數的極式：
a) 1; b) -1; c) i; d) $-i$; e) $1+i$; f) $-1+i$;
g) $-1-i$; h) $1-i$; i) $1+i\sqrt{3}$; j) $-1+i\sqrt{3}$;
k) $-1-i\sqrt{3}$; l) $1-i\sqrt{3}$; m) $2i$; n) -3;
o) $\sqrt{3}-i$; p) $2+\sqrt{3}+i$.

23 利用三角函數值表約略估計下列各數的輻角，並由此把各數表示成極式：

a) $3+i$；　b) $4-i$；　c) $-2+i$；　d) $-1-2i$.

24　求滿足下列條件的點所成的幾何軌跡：
a)點的模（絕對值）爲 1；
b)點的輻角恆爲 $\pi/6$。

25　在複數平面上，求滿足下列條件的點所成的幾何軌跡：
a) $|z|<2$；　b) $|z-i|\leq 1$；　c) $|z-1-i|<1$.

26　解下列方程式：
a) $|x|-x=1+2i$；　　b) $|x|+x=2+i$.

*27　對於任意複數 x，y，下列恆等式恆成立：
$$|x+y|^2+|x-y|^2=2(|x|^2+|y|^2)$$
試求上列恆等式的幾何意義。

28　設 z 爲異於 -1 的任意複數，即 $z\neq -1$，證明有一個實數 t 存在，使 z 可以寫成 $z=\dfrac{1+ti}{1-ti}$ 的形式。

29　問在何種情形下，兩複數和之模（絕對值）等於此兩複數模之差。

30　問在何種情形下，兩複數和之絕對值等於此兩複數之絕對值和。

*31　設 u 是 $z\cdot z'$ 的平方根，其中 z 與 z' 爲二複數，試證下列恆等式：
$$|z|+|z'|=\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|$$

32　設 $|z|<\dfrac{1}{2}$，

試證：$|(1+i)z^3+iz|<\dfrac{3}{4}$

33　試證下列等式：
$$(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right]$$

34　化簡 $\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}$ 成複數的標準式。

35　計算 $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$。

36　計算下列各値：

a）$(1+i)^{25}$；　　b）$\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$；　　c）$\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$；

d）$\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$

37　設 n 爲整數，證明下列關係成立：

a）$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$；

b）$(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6}-i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$；

*38　設 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

計算 $(1+\omega)^n$。

39　計算 $\omega_1^n+\omega_2^n$ 之値，其中 n 爲整數，而 ω_1 與 ω_2 定義爲：

$$\omega_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \omega_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

*40　計算 $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$

*41　已知 $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$，證明

$$z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\theta$$

42 試證 $\left(\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n=\dfrac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$

43 求下列各題：

a）i 的立方根　　b）$2-2i$ 的立方根

c）-4的四次方根　　d）1 之六次方根

d）-27的六次方根

44 利用三角函數值表計算下列各根的近似數值

a）$2+i$ 的立方根　　b）$3-i$ 的立方根

c）$2+3i$ 的五次方根

45 計算下列各題：

a）$\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$ 的六次方根　　b）$\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ 的八次方根

c）$\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ 的六次方根

46 已知 β 爲 α 之所有 n 次方根之一，試求 α 之所有 n 次方根。

47 試以 $\cos x$ 與 $\sin x$ 表示下列各值

a）$\cos 5x$　　b）$\cos 8x$　　c）$\sin 6x$　　d）$\sin 7x$

48 以 $\tan\varphi$ 表示 $\tan 6\varphi$。

49 建立以 $\sin x$ 與 $\cos x$ 來表示 $\cos nx$，$\sin nx$ 的公式。

50 表示下列各個成三角多項式（所謂三角多項式是諸單項之和，而各項是 x 整倍數之正弦或餘弦的常數倍）。

a）$\sin^3 x$　　b）$\sin^4 x$　　c）$\cos^5 x$　　d）$\cos^6 x$

*51 建立下列恆等式：

a）$2^{2m}\cos^{2m}x=2\sum\limits_{k=0}^{m-1}C_k^{2m}\cos 2(m-k)x+C_m^{2m}$；

b) $2^{2m}\cos^{2m+1}x = \sum_{k=0}^{m} C_k^{2m+1}\cos(2m-2k+1)x$

c) $2^{2m}\sin^{2m}x = 2\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m+k}C_k^{2m}\cos 2(m-k)x + C_m^{2m}$

d) $2^{2m}\sin^{2m+1}x = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}C_k^{2m+1}\sin(2m-2k+1)x$

*52 建立恒等式

$$2\cos mx = (2\cos x)^m - \frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\cdot 2}(2\cos x)^{m-4} - \cdots + (-1)^p\frac{m(m-p-1)(m-p-2)\cdots(m-2p+1)}{p!}(2\cos x)^{m-2p} + \cdots$$

*53 表示 $\frac{\sin mx}{\sin x}$ 成 $\cos x$ 的项和 。

*54 求下列的和

a) $1 - C_2^n + C_4^n - C_6^n + \cdots$;

b) $C_1^n - C_3^n + C_5^n - C_7^n + \cdots$.

*55 建立下列的恒等式

a) $1 + C_4^n + C_8^n + \cdots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$

b) $C_1^n + C_5^n + C_9^n + \cdots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

c) $C_2^n + C_6^n + C_{10}^n + \cdots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$

d) $C_3^n + C_7^n + C_{11}^n + \cdots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

*56 求下列的和

$$C_n^1-\frac{1}{3}C_n^3+\frac{1}{9}C_n^5-\frac{1}{27}C_n^7+\cdots$$

57 設n爲3的整倍數的最大一個，但不超過m，建立下之關係：

$$(x+a)^m+(x+a\omega)^m+(x+a\omega^2)^m$$
$$=3x^m+3C_m^3x^{m-3}a^3+\cdots+3C_m^nx^{m-n}a^n$$

其中 $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

58 建立下列三個關係：

a) $1+C_n^3+C_n^6+\cdots=\frac{1}{3}(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3})$；

b) $C_n^1+C_n^4+C_n^7+\cdots=\frac{1}{3}(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3})$；

c) $C_n^2+C_n^5+C_n^8+\cdots=\frac{1}{3}(2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3})$.

59 求下列的和

a) $1+a\cos\varphi+a^2\cos2\varphi+\cdots+a^k\cos k\varphi$；

b) $\sin\varphi+a\sin(\varphi+h)+a^2\sin(\varphi+2h)+\cdots+a^k\sin(\varphi+kh)$；

c) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos2x+\cdots+\cos nx$.

60 建立恆等式：

$$\sin x+\sin2x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

61 求下列的極限值

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos2x+\cdots+\frac{1}{2^n}\cos nx\right)$$

62 設n為正整數，且θ為滿足關係 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2n}$的一角，證明下列的關係為有效：

$$\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}+\cdots+\cos\frac{2n-1}{2}\theta=n\sin\theta$$

63 證明下列各等式

a) $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$；

b) $\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}=-\frac{1}{2}$；

c) $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}=\frac{1}{2}$.

64 計算下列的和：

a) $\cos a-\cos(a+h)+\cos(a+2h)-\cdots$
$\cdots+(-1)^{n-1}\cos[a+(n-1)h]$；

b) $\sin a-\sin(a+h)+\sin(a+2h)-\cdots$
$\cdots+(-1)^{n-1}\sin[a+(n-1)h]$

65 設x有小於1的絕對值，證明下列級數

a) $\cos\alpha+x\cos(\alpha+\beta)+x^2\cos(\alpha+2\beta)+\cdots$
$\cdots+x^n\cos(\alpha+n\beta)+\cdots$

b) $\sin\alpha+x\sin(\alpha+\beta)+x^2\sin(\alpha+2\beta)+\cdots$
$\cdots+x^n\sin(\alpha+n\beta)+\cdots$

分別收斂於下列之值：

$$\frac{\cos\alpha-x\cos(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2},\qquad \frac{\sin\alpha-x\sin(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2}$$

66 計算下列的和：

a) $\cos x+C_1^n\cos 2x+C_2^n\cos 3x+\cdots+C_n^n\cos(n+1)x$；

b) $\sin x+C_1^n\sin 2x+C_2^n\sin 3x+\cdots+C_n^n\sin(n+1)x$.

67 計算下列的和

a) $\cos x - C_1^n \cos 2x + C_2^n \cos 3x - \cdots + (-1)^n C_n^n \cos(n+1)x$;

b) $\sin x - C_1^n \sin 2x + C_2^n \sin 3x - \cdots + (-1)^n C_n^n \sin(n+1)x$.

68 設在奧岡圖 (Argand diagram)上規定點 1 與點 i 的向量分別表示成 $\overrightarrow{OA_1}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 自 O 的垂直線交 $\overline{A_1B}$ 於 A_2；自 A_2 的垂直線交 $\overline{OA_1}$ 於 A_3；自 A_3 的垂直線交 $\overline{A_1A_2}$ 於 A_4 等等，依此類推，一般而言，$\overline{A_nA_{n+1}}$ 垂直於 $\overline{A_{n-2}A_{n-1}}$，計算和 $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots$ 的極限值。

*69 計算下列的和

$\sin^2 x + \sin^2 3x + \cdots + \sin^2(2n-1)x$.

70 證明下列的恆等式

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cdots \cos^2 nx = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\cos(n+1)x \sin nx}{2\sin x}$;

b) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \cdots + \sin^2 nx = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\cos(n+1)x \sin nx}{2\sin x}$

*71 計算下列的和

a) $\cos^3 x + \cos^3 2x + \cdots + \cos^3 nx$;

b) $\sin^3 x + \sin^3 2x + \cdots + \sin^3 nx$.

*72 計算下列的和

a) $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \cdots + n\cos nx$;

b) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \cdots + n\sin nx$.

73 設 $\alpha = a + bi$ 計算極限值

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$$

74 定義：$e^\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right)^n$

證明下列各等式

a）$e^{2\pi i}=1$　　b）$e^{\pi i}=-1$

c）$e^{\alpha+\beta}=e^{\alpha}\cdot e^{\beta}$　　d）$(e^{\alpha})^{k}=e^{\alpha k}$

其中 k 爲一整數。

3.三次與四次方程式

75　利用卡丹（Cardan's）的公式來解下列的方程式：

a）$x^3-6x+9=0$；　　b）$x^3+12x+63=0$；

c）$x^3+9x^2+18x+28=0$；　　d）$x^3+6x^2+30x+25=0$；

e）$x^3-6x+4=0$；　　f）$x^3+6x+2=0$；

g）$x^3+18x+15=0$；　　h）$x^3-3x^2-3x+11=0$；

i）$x^3+3x^2-6x+4=0$；　　j）$x^3+9x-26=0$；

k）$x^3+24x-56=0$；　　l）$x^3+45x-98=0$；

m）$x^3+3x^2-3x-1=0$；　　n）$x^3-6x^2+57x-196=0$；

o）$x^3+3x-2i=0$；　　p）$x^3-6ix+4(1-i)=0$；

q）$x^3-3abx+a^3+b^3=0$；

r）$x^3-3ab\cdot fgx+f^2ga^3+fg^2b^3=0$；

s）$x^3-4x-1=0$；　　t）$x^3-4x+2=0$.

*76　利用卡丹公式建立下列的關係，其中 x_1，x_2，x_3是方程 $x^3+px+q=0$ 的根。

$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-4p^3-27q^2$$

（式 $-4p^3-27q^2$ 稱爲方程 $x^3+px+q=0$的判別式）

77　解下列的方程：

$$(x^3-3qx+p^3-3pq)^2-4(px+q)^3=0$$

*78　求一公式用來解方程

$$x^5-5ax^3+5a^2x-2b=0$$

79　解下列各方程：

a) $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0$; b) $x^4+2x^3-2x^2+6x-15=0$;
c) $x^4-x^3-x^2+2x-2=0$; d) $x^4-4x^3+3x^2+2x-1=0$;
e) $x^4-3x^3+x^2+4x-6=0$; f) $x^4-6x^3+6x^2+27x-56=0$;
g) $x^4-2x^3+4x^2-2x+3=0$; h) $x^4-x^3-3x^2+5x-10=0$;
i) $x^4+2x^3+8x^2+2x+7=0$; j) $x^4+6x^3+6x^2-8=0$;
k) $x^4-6x^3+10x^2-2x-3=0$; l) $x^4-2x^3+4x^2+2x-5=0$;
m) $x^4-x^3-3x^2+x+1=0$; n) $x^4-x^3-4x^2+4x+1=0$;
o) $x^4-2x^3+x^2+2x-1=0$; p) $x^4-4x^3-20x^2-8x+4=0$;
q) $x^4-2x^3+3x^2-2x-2=0$; r) $x^4-x^3+2x-1=0$;
s) $4x^4-4x^3+3x^2-2x+1=0$; t) $4x^4-4x^3-6x^2+2x+1=0$.

80 費勞力的算法在解四次方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$時，是把左邊的東西寫成如下的形式

$$(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2})^2-[(\frac{a^2}{4}+\lambda-b)x^2+(\frac{a\lambda}{2}-c)x+(\frac{\lambda^2}{4}-d)]$$

由此，假如 λ 適當的選擇時，方括號中的式子就會是一個完全平方的東西，因之，所予上面的式子便可以分解了。要使 λ 有這種性質的必要條件是

$$(\frac{a\lambda}{2}-c)^2-4(\frac{a^2}{4}+\lambda-b)(\frac{\lambda^2}{4}-d)=0,$$

因此，λ 一定是三次"豫解"方程的解，一旦 λ 的值決定，那麼原方程左邊的東西便可以分解了。

試證 λ 的值可以相反地用原四次方程的根來表示。

4 1之方根

81 求下列各次的1的方根：

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

82 求下列各次的1的素根（或質根）

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

83 下列之複數的指數爲多少時成一實數？

a) $z_K=\cos\dfrac{2K\pi}{180}+i\sin\dfrac{2K\pi}{180}$　　$K=27, 99, 137$;

b) $z_K=\cos\dfrac{2K\pi}{144}+i\sin\dfrac{2K\pi}{144}$　　$K=10, 35, 60$.

84 求1的 28 次方根中屬於指數爲7的方根

85 求1的不同次方根中指數共同者，方根之次數分別爲

a) 16　b) 20　c) 24

86 求下列不同的 n 的分圓多項式 $x_n(x)$

a) 1;　b) 2;　c) 3;　d) 4;　e) 5;
f) 6;　g) 7;　h) 8;　i) 9;　j) 10;
k) 11;　l) 12;　m) 15;　n) 105.

87 設 ε 爲1的 $2n$ 次素根，計算下列之和：

$$1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}$$

*88 計算1的所有 n 次根的和

*89 計算1的所有 n 次根中 k 次之和

90 計算 m 個 $(x+a)^m$ 的和，其中 a 依次表1的 m 次根。

*91 設 ε 爲1的 n 次根，計算

$$1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\cdots+n\varepsilon^{n-1}$$

*92 設 ε 爲1的 n 次根，計算

$$1+4\varepsilon+9\varepsilon^2+\cdots+n^2\varepsilon^{n-1}$$

93 計算下列的和

a) $\cos\dfrac{2\pi}{n}+2\cos\dfrac{4\pi}{n}+\cdots+(n-1)\cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n}$;

b) $\sin\dfrac{2\pi}{n}+2\sin\dfrac{4\pi}{n}+\cdots+(n-1)\sin\dfrac{2(n-1)\pi}{n}$.

*94 計算下列各不同次數的1的素根的和

a) 15;　b) 24;　c) 30.