

C13-43/LTC

微积分与应用数学基础

王勇烈 李铁臣 主编

B006/21

航空工业出版社

1996

内 容 简 介

本书是一本专门为理工科高等职业教育编写的大专数学教材。内容主要包括:微积分,级数与微分方程,常微分方程,线性代数,概率论与数理统计及数学建模。该书具有如下特点:采用模块式,使接口放宽,适用各不同层次的学生使用;注重实用性,帮助读者掌握方法,增加具有启发性的应用性题目;采用手册型,便于查阅,方便读者查用;便于自学,通俗易懂,可使读者获得较好的学习效果。

该书适用于大专院校的学生及自学高等数学的读者使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分与应用数学基础/王勇烈,李铁臣主编. —北京:航空工业出版社,1996. 6

ISBN 7-80134-048-5

I. 微… II. ①王… ②李… III. ①微积分-高等教育:职业教育-教材②应用数学-高等教育:职业教育-教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 11650 号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

河北香河县印刷厂印刷

全国各地新华书店经售

1996 年 7 月第 1 版

1996 年 7 月第 1 次印刷

开本: 787×1092 1/16

印张: 28.5

字数: 732 千字

印数: 1—4000

定价: 28.00 元

序

发展高等职业教育,是社会发展和现代化建设的客观需要,其培养目标是在生产、服务和管理第一线工作的高层次实用人才。高等职业教育有其自身的规律和特点,和普通高等教育相比,要有较大力度的改革。因此,必须有适应高等职业教育特色的教材。由于我国高等职业教育尚处初期发展阶段,适应这一教育特点的高职教材目前还不多见。所以,编写出符合我国教育实际、适应高等职业教育特点的教材,便成为迫在眉睫的问题。我校数学协作组为适应这一需要,策划、组织编写的《微积分与应用数学基础》这本教材就是这方面所作的一次尝试。

参加本书编写的既有教学经验丰富、学术造诣颇深的老教师,也有教学功底扎实、勇于探索进取的中青年教师。编写之前,他们进行了比较充分的调研。编写过程中与负责进行高等职业教育试点单位的领导、专家教授以及相关专业学科教师共同研究。成稿后,组织了几次评审会,编者又按从事高等职业教育的专家教授们提出的意见作认真修改。数易其稿,才付印成书。

本书在保证基础,重视素质教育的前提下,能突破普通高等教育传统教材的体系,精选内容,突出主干,删减枝节;强调实际,注重应用;按基础理论适度、够用的原则,在有限的课时内采用了模块结构的知识体系,以利教学。所有这些,都是力求遵循职业教育的特点,体现高等职业教育的特色。

虽然编者对本书的编写倾心投入,尽了很大的努力,但限于经验水平以及对高等职业教育规律和特点的理解的把握上有待于进一步提高,所以这本教材还需在教学实践中不断修改锤炼,才能日臻完善。同时,更希望得到数学界和从事高等职业教育的同行们帮助指正,为高等职业教育的教材建设共同努力。

姜 成 坛

1995 年 12 月于北京

前言

本书是一本专门为理工科高等职业教育编写的大专数学教材。

由于经济和科技的发展,使许多领域的技术含量不断提高,对技术管理人员及部分操作人员提出了更高的要求,因此加快调整我国的高等教育结构,发展高等职业教育,反映了我国经济、社会、教育水平发展的一个必然趋势。高等职业教育的内涵在于其培养目标和培养过程与一般高等教育不同,高等职业教育培养生产第一线的技术和管理人员的目标十分明确,岗位针对性也很明确。为了实现这一特殊的目标,其教学过程更重视实践能力的培养,更着重于技术的应用。高等职业教育多数是与中等职业教育衔接的,其生员包括中等专业学校的毕业生,也包括职业高中和技工学校的毕业生,从发展趋势上看,还将包括一些普通高中毕业生。近几年来,高等职业教育发展速度之快,是人们始料不及的。在这种情况下,各专业高等职业教育的教材,大多数由本专业专家、教师、工程技术人员编写。但是作为重要的公共基础课的数学教材,目前尚没有完全合适或为各类高等职业教育的教育工作者所共同认可的。由于数学是学习现代科学技术必不可少的基础知识和工具,所以编写一本特点鲜明又适用的高等职业教育的数学教材,就是十分必要和非常紧迫的。

北京联合大学是一所多学科综合型普通高等学校,担负着为北京培养各方面的应用型人才,也要成为高等职业技术教育的中心,副校长姜成坛非常重视高等职业教育的教材建设。为此北京联合大学数学协作组汇集了有经验,学术水平较高的教师组成了编写组,经过一年来的调研、研讨,制定编写大纲,并经专家论证,最后编成本书。

本书在编写的全过程中,力求表现出作为高等职业教育的数学教材的应具有的特点:

1 采用模块式,使“接口”放宽

全书共分六篇三模块,即



为适应学生来源不同和教学时数不可能多,使用时可采取如下模块:

模块 I:若生员是职业高中或中技毕业生,可选学第一至第四篇;

模块 II:若生员是普通高中毕业生,可选学第二至第五篇;

模块 III:若生员是初中毕业后的中专毕业生或中专已读过三年或高中后的中专已上一年的学生,可选学第三至第六篇。

无论是选用哪个模块,教学时数均不会超过 120 学时,甚至可减至 100 学时以内。

2 注重实用性,削弱技巧性

全书所涉及的数学概念,绝大多数由实例引入,突出实际背景及建立数学模型的思想。对一些繁难的定理、公式以及很明显的结论,有的只给出结果,有的用几何直观予以说明。不宝贵的时间花在明显次要的,无益或无目的的内容上,始终把握目标明确、主干清楚、讲究实效。所选例题及习题,均以帮助学生理解概念,掌握方法为目的,删去单纯技巧或是较难的题目,增加富于启发性或为专业课服务的应用性题目。在减弱解析运算的同时,本书十分重视数值计算,书中各篇都有专门部分涉及数值计算和近似方法。并强调与计算机的结合。

数学建模能力的培养和训练越来越显示出它的重要作用。实践证明,建模是培养学生综合运用数学知识,分析解决实际问题能力的一种有效手段,为此本书特设一篇,给出基本的建模思想和实用的例题,供学时数较充裕,要求数学较高的专业学习参考。所选例题有的是建模竞赛题或他人提供,在此仅向出题或解答者致谢,不再一一注明出处。

3 采用手册型,便于查阅

如第一篇的预备知识,就是初等数学知识的复习,对于采用第Ⅱ或第Ⅲ模块的师生查阅有关初等数学基本内容和公式也十分有用。又如第五篇的一些数理统计方法利用表格给出,包括置信区间、假设检验的否定域等。另外,本书特设一大附录,介绍一些数值计算的常用程序,使读者能方便查阅。

4 便于自学,通俗易懂,保证大专水平

本书在叙述时,尽量采用通俗语言,如极限概念不介绍“ $\epsilon-\delta$ ”语言。但本教材是大专的教材,不是中专的教材,所以所选内容及深度均要符合国家教委颁布的大专数学的基本要求,而不是随意删减。在教给学生知识的同时,本书十分注意教给学生思考方法,重视素质教育。我们认为本书除作为高职班的数学教材外也完全可作为工科大专的教材,尤其对夜大学、职工大学更为适宜。

策划主审武继玉,主编王勇烈、李铁臣提供编写思路及方案,把握本书的特点,负责全书的修改、定稿,确保风格统一。具体参编的有:第一篇王勇烈(第一章),第二篇李英、李铁臣(第二至第五章),第三篇张喜娟、翟少辉(第六章),李宗杰、刘云敏(第七章),第四篇李宗杰、刘云敏、李铁臣(第八章),第五篇李铁臣(第九、十章),第六篇曾庆黎(第十一章)。任开隆老师提供了全书的数值计算的全部程序。

联合大学教务处长贡文清,副处长张丹海从始至终关心本书的编写工作,提出了非常宝贵的指示和意见。教务处张杨同志,做了大量的组织工作。联合大学建材轻工学院院长壮忠,文理学院数学系主任韩庆书教授等参与论证编写大纲和审阅了全书,在此一并表示感谢。

由于高等职业教育的数学教材,是一类全新类型的教材,首次编写,在特点的把握上,内容安排和处理上,缺点错误一定很多,恳请专家、读者不吝指教。

编 者

1995年9月

目 录

第一篇 预备知识	(1)
第一章 初等数学部分主要内容及重要公式	(1)
第一节 初等代数	(1)
一 实数系统及基本运算律(1) 二 一元二次方程(1) 三 集合初步(2)	
四 不等式(4) 五 指数与对数(4) 六 复数(6) 七 数列与数学归纳法(8)	
八 排列组合与二项式定理(9)	
第二节 多面体和旋转体	(11)
一 多面体(11) 二 旋转体(12)	
第三节 函数	(14)
一 函数的概念(14) 二 正比例函数、反比例函数及一次函数(16) 三 二次函数(17)	
四 幂函数(19) 五 指数函数与对数函数(20) 六 三角函数(21)	
七 反三角函数(25)	
第四节 平面解析几何	(26)
一 两个基本公式(26) 二 直线(26) 三 二次曲线(28) 四 参数方程(30)	
五 极坐标(30)	
第二篇 微积分基本知识	(32)
第二章 极限与连续	(32)
第一节 函数	(32)
一 常量与变量(32) 二 函数概念(34) 三 初等函数(39) 习题 2-1(42)	
第二节 极限	(44)
一 函数的极限(44) 二 数列的极限(49) 三 极限的运算法则(50) 四 极限存在准则 两个重要极限(51)	
五 无穷极限——无穷大量(55) 习题 2-2(56)	
第三节 无穷小量	(57)
一 无穷小量的概念(57) 二 无穷小量的运算(59) 三 无穷小的比较(60) 习题 2-3(62)	
第四节 连续函数	(63)
一 函数的连续性(63) 二 间断点(66) 三 连续函数的运算与初等函数的连续性(69)	
闭区间上连续函数的性质(72) 习题 2-4(74)	
第三章 一元函数微分学	(76)
第一节 导数与微分	(76)
一 导数的实际背景(76) 二 导数的定义(79) 三 微分的概念(82) 四 导数和微分的几何意义(83)	
五 高阶导数(84) 习题 3-1(84)	
第二节 微分法	(85)
一 利用定义求导数与微分(85) 二 导数与微分的四则运算法则(86) 三 反	

函数的微分法(89)	四 复合函数的求导法则与微分形式的不变性(90)	五 参数方程确定的函数的求导法(94)	六 相关变化率(95)	七 基本初等函数的导数与微分公式(95)	八 数值微分法(96)	习题 3-2(97)
第三节 极值、单调和中值定理	(98)					
一 极值(98)	二 罗尔定理和拉格朗日定理(99)	三 函数的增减性和取极值的条件(101)	四 最大值和最小值问题(104)	习题 3-3(106)		
第四节 罗必达法则	(106)					
一 罗必达法则(106)	二 其他未定式极限的求法(109)	习题 3-4(110)				
第五节 利用导数研究曲线的特性	(111)					
一 曲线的凹凸性和拐点(111)	二 弧微分和曲率(112)	习题 3-5(115)				
第六节 方程的近似解	(115)					
一 二分法(115)	二 切线法(牛顿法)(116)	习题 3-6(120)				
第四章 一元函数积分学	(121)					
第一节 定积分的概念与性质	(121)					
一 定积分的实际背景(121)	二 定积分的定义(122)	三 定积分的性质(124)	习题 4-1(127)			
第二节 微积分基本公式	(128)					
一 原函数与不定积分(128)	二 变上限的定积分(129)	三 牛顿-莱布尼兹公式(130)	习题 4-2(132)			
第三节 积分法	(133)					
一 基本初等函数的不定积分公式(133)	二 换元积分法(135)	三 分部积分法(140)	四 有理函数的分解及其积分(142)	五 积分表的使用(144)	习题 4-3(146)	
第四节 广义积分	(148)					
一 无穷区间上的广义积分(148)	二 被积函数为无界函数的广义积分(149)	三 Γ -函数(150) 习题 4-4(151)				
第五节 定积分的应用	(152)					
一 定积分的微元法(152)	二 几何应用(152)	三 物理应用(156)	习题 4-5(160)			
第六节 数值积分	(162)					
一 抛物线法(162)	二 数值积分的误差(164)	习题 4-6(164)				
第五章 多元函数微积分初步	(165)					
第一节 空间解析几何简介	(165)					
一 空间直角坐标系(165)	二 空间两点间的距离公式(166)	三 曲面及其方程(166)	四 空间曲线及其方程(169)	习题 5-1(170)		
第二节 多元函数的基本概念	(171)					
一 多元函数的概念(171)	二 二元函数的极限与连续(173)	习题 5-2(174)				
第三节 偏导数与全微分	(174)					
一 偏导数的概念及计算(174)	二 高阶偏导数(176)	三 全微分(176)	习题 5-3(178)			

第四节	复合函数与隐函数的微分法	(178)
一	复合函数微分法(178) 二 隐函数的微分法(180) 习题 5-4(181)	
第五节	三元函数的极值	(182)
一	二元函数的极值及其判别法(182) 二 条件极值及其应用(183) 习题 5-5(186)	
第六节	重积分的概念与应用	(186)
一	重积分的概念(186) 二 在直角坐标系中计算二重积分(191) 三 二重积分的应用(194) 习题 5-6(198)	
第七节	曲线积分与格林公式	(199)
一	对坐标的曲线积分(199) 二 格林公式(202) 三 平面上曲线积分与路径无关的条件(203) 习题 5-7(205)	
第三篇	级数与微分方程	(207)
第六章	无穷级数	(207)
第一节	数项级数	(207)
一	数项级数的概念(207) 二 级数的简单性质(208) 三 正项级数的敛散性判别法(209) 四 任意项级数(212) 习题 6-1(213)	
第二节	幂级数	(214)
一	函数项级数的概念(214) 二 幂级数及其收敛区间(214) 三 幂级数的性质(216) 习题 6-2(217)	
第三节	函数展成幂级数	(217)
一	泰勒公式(218) 二 泰勒级数(219) 三 函数展开成幂级数(220) 习题 6-3(223)	
第四节	傅立叶级数	(223)
一	三角函数系的正交性(223) 二 傅立叶级数(224) 三 函数展开成傅立叶级数(225) 习题 6-4(230)	
第七章	常微分方程	(231)
第一节	微分方程的基本概念	(231)
	习题 7-1(233)	
第二节	一阶微分方程	(233)
一	变量可分离的微分方程(233) 二 微分方程的应用举例(234) 三 齐次微分方程(237) 四 一阶线性微分方程(238) 习题 7-2(240)	
第三节	高阶微分方程	(241)
一	两种特殊类型的高阶微分方程(241) 二 线性微分方程解的结构(242) 三 常系数齐次线性微分方程(244) 四 二阶常系数非齐次线性微分方程(247) 习题 7-3(250)	
第四节	初值问题的数值解法	(251)
一	数值方法的基本思想(251) 二 龙格——库塔方法(253) 习题 7-4(255)	
第四篇	线性代数	(256)
第八章	线性代数	(256)

第一节 行列式	(257)
一 二阶行列式(257)	二 三阶行列式(259)
三 n 阶行列式的概念(262)	四 n 阶行列式的计算(264)
五 克莱姆法则(266)	习题 8-1(269)
第二节 矩阵	(270)
一 线性变换与矩阵的概念(270)	二 几种特殊的矩阵(272)
三 矩阵的运算(272)	四 逆矩阵(278)
五 矩阵的秩(280)	六 矩阵的初等变换(281)
七 克莱姆法则的矩阵形式(283)	习题 8-2(284)
第三节 线性方程组	(285)
一 线性方程组的消元解法(286)	二 线性方程组的相容性(287)
三 线性方程组的数值解法——高斯消元法(291)	习题 8-3(292)
第五篇 概率统计	(294)
第九章 概率论基础	(294)
第一节 随机事件与概率	(294)
一 随机事件(294)	二 概率的古典定义(295)
三 概率的统计定义(296)	习题 9-1(298)
第二节 随机变量及其分布	(298)
一 随机变量的概念(298)	二 离散型随机变量及其分布律(299)
三 连续型随机变量及其概率密度(301)	四 随机变量的分布函数(303)
习题 9-2(304)	
第三节 独立性	(305)
一 随机事件的独立性(305)	二 n 次独立试验概型与二项分布(307)
三 随机变量的独立性(308)	习题 9-3(309)
第四节 数学期望与方差	(311)
一 数学期望(311)	二 方差(317)
三 协方差与相关系数(319)	习题 9-4(321)
第五节 正态分布	(322)
一 正态分布的定义(322)	二 标准正态分布(324)
三 正态随机变量的数学期望与方差(326)	四 用正态分布来近似二项分布(327)
习题 9-5(327)	
第十章 数理统计初步	(329)
第一节 数据整理	(329)
一 总体与样本(329)	二 数据的整理(330)
三 样本的数字特征(333)	四 常用的统计量及其分布(335)
习题 10-1(339)	
第二节 参数估计	(339)
一 估计量和估计值(339)	二 点估计(340)
三 区间估计(344)	习题 10-2(349)
第三节 假设检验	(349)
一 假设检验的基本思想(349)	二 两类错误(350)
三 关于参数的假设检验(351)	四 参数的单边检验(353)
五 质量控制图(354)	习题 10-3(360)
第四节 一元回归分析	(361)
一 一元线性回归模型(361)	二 经验公式与最小二乘法(362)
三 平方和分解公式和相关性检验(364)	四 利用线性回归方程预测和控制(367)
五 一元	

非线性回归问题(371)	习题 10-4(377)	(379)
第六篇 数学建模知识简介		(379)
第十一章 数学模型与数学建模简介		(379)
第一节 数学建模浅谈		(382)
一 数学模型与数学建模的概念(379)	二 数学建模的步骤和实例(380)	(382)
第二节 利用微积分建模		(384)
第三节 微分方程建模		(387)
第四节 利用线性代数建模		(392)
第五节 数理统计方法建模		(395)
附录一 积分表		(404)
附录二 常用数理统计表		
附表 1 标准正态分布表(404)	附表 2 t 分布表(405)	附表 3 χ^2 分布表(406)
附表 4 相关系数 r 显著性检验表(407)		
附录三 部分常用数值计算子程序		(408)
一 Fortran 语言		(413)
二 C 语言		(416)
三 Pascal 语言		(423)
习题答案		

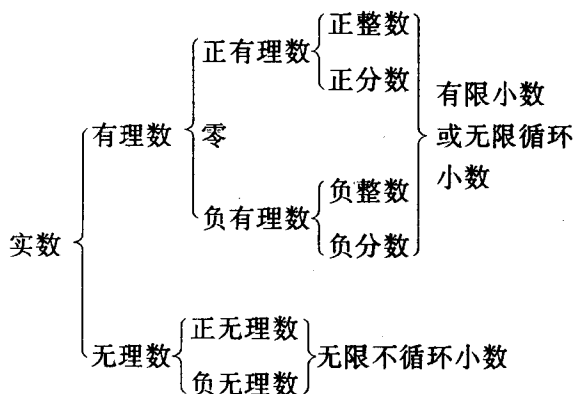
第一篇 预备知识

第一章 初等数学部分主要内容及重要公式

第一节 初等代数

一 实数系统及基本运算律

(一) 实数的系统表



(二) 基本运算律

交换律: $a+b=b+a$; $ab=ba$.

结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$; $(ab)c=a(bc)$.

分配律: $(a+b)c=ac+bc$.

(三) 乘法公式及因式分解

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab;$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}), \quad (n \text{ 为正整数}).$$

二 一元二次方程

(一) 一般形式: $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$.

(二) 求根公式: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

(三) 根和系数的关系: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

(四) 判别式: $b^2 - 4ac > 0$, 有两个不等实根; $b^2 - 4ac = 0$, 有两个相等实根;
 $b^2 - 4ac < 0$, 有两共轭复根。

三 集合初步

(一) 集合的基本概念

1 集合

把一些确定的对象看成一个整体,就形成了一个集合。一般用大写拉丁字母 A, B, C 等作为集合的记号。

2 元素

集合里的各个对象叫做集合的元素。一般用小写拉丁字母 a, b, c 等表示。 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 的元素,读作“ a 属于 A ”; $a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 的元素,读作“ a 不属于 A ”。

3 空集

不含有任何元素的集合,记作 $\emptyset$ 。

4 常见的数集

自然数集(正整数集):全体自然数的集合,通常记作 N 。

整数集:全体整数的集合,通常记作 Z 。

有理数集:全体有理数的集合,通常记作 Q 。

实数集:全体实数的集合,通常记作 R 。

复数集:全体复数的集合,通常记作 C 。

(二) 集合的表示法

1 列举法

把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内,如 $\{a, b, c\}$ 。

2 描述法

把集合中的元素的共同性质用式子或语言描述出来,写在大括号内,如

$$\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}, \quad \{\text{直角三角形}\},$$

有时也用图示法表示集合。

(三) 集合与集合的关系

1 子集:对于两个集合 A 与 B ,如果集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,那么集合 B 叫做集合 A 的子集,记作: $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$,读作“ B 包含于 A ”或“ A 包含 B ”,易见 $A \subseteq A$, $\emptyset \subseteq A$ 。

如果集合 B 是集合 A 的子集,并且 A 中至少有一个元素不属于 B ,那么集合 B 叫做集合 A 的真子集,记作 $B \subset A$ 或 $A \supset B$ 。如图 1-1。

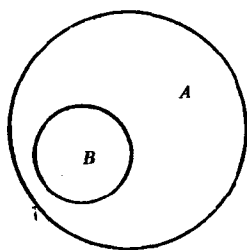


图 1-1

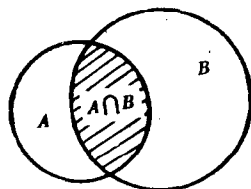


图 1-2

2 集合相等: 对于两个集合 A 与 B , 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 那么称集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A=B$.

3 交集: 由集合 A 与集合 B 的所有公共元素组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$. 如图 1-2, 易见 $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

4 并集: 把集合 A 与 B 的所有元素并在一起所组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$. 如图 1-3, 易见 $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$.

5 全集与补集: 在研究集合与集合之间的关系时, 这些集合常常是某一个给定的集合的子集, 这个给定的集合叫做全集, 用符号 I 表示; 已知全集 I , 集合 $A \subseteq I$, 由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做集合 A 在全集 I 中的补集, 记作 $\bar{A}$. 如图 1-4, 易见 $A \cup \bar{A} = I$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

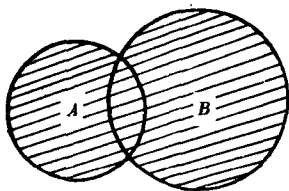


图 1-3

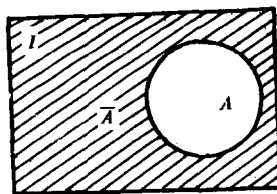


图 1-4

例 用适当的符号($\in$, $\notin$, $=$, $\subset$, $\supset$)填空。

(1) $1 \underline{\quad} N$;

(2) $0 \underline{\quad} N$;

(3) $\emptyset \underline{\quad} Q$;

(4) $C \underline{\quad} Z$;

(5) $\{1\} \underline{\quad} \{1, 2, 2\}$;

(6) $1 \underline{\quad} \{1, 2, 3\}$;

(7) $0 \underline{\quad} \emptyset$;

(8) $\{0\} \underline{\quad} \emptyset$;

(9) $0 \underline{\quad} \{0\}$;

(10) $\{1, 2, 3\} \underline{\quad} \{3, 2, 1\}$.

解

(1) $1 \in N$;

(2) $0 \notin N$;

(3) $\emptyset \subset Q$;

(4) $C \supset Z$;

(5) $\{1\} \subset \{1, 2, 2\}$;

(6) $1 \in \{1, 2, 3\}$;

(7) $0 \notin \emptyset$;

(8) $\{0\} \supset \emptyset$;

(9) $0 \in \{0\}$;

$$(10) \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}.$$

四 不等式

(一) 基本性质

如果 $a > b$, 则 $a \pm c > b \pm c$;

如果 $a > b, c > 0$ 则 $ac > bc$;

如果 $a > b, c < 0$ 则 $ac < bc$;

如果 $a > b > 0, n \in N$ 则 $a^n > b^n, \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

(二) 重要不等式

设以下各量取正值, 则必有 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

一般地 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad (n \in N),$

即算术平均值不小于几何平均值。

(三) 绝对值与不等式

绝对值定义

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|; \quad |a-b| \leq |a| + |b|;$$

$$|a-b| \geq ||a| - |b||; \quad -|a| \leq a \leq |a|;$$

$$\sqrt{a^2} = |a|; \quad |ab| = |a| \cdot |b|;$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad (b \neq 0); \quad |-a| = |a|.$$

$$|a| < b (b > 0) \iff -b < a < b;$$

$$|a| > b (b > 0) \iff a > b \text{ 或 } a < -b.$$

例 求解 $|2x-3| < 7$.

解 $\because |2x-3| < 7,$

$$\therefore -7 < 2x-3 < 7,$$

$$-7+3 < 2x < 7+3,$$

$$-2 < x < 5,$$

原不等式的解集为 $\{x | x \in R, -2 < x < 5\}$.

五 指数与对数

(一) 指数

正整数指数幂: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ 个}}, \quad (n \in N, n > 1); \quad a^1 = a.$

零指数幂: $a^0 = 1, \quad (a \neq 0).$

负整数指数幂: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $(a \neq 0, n \in \mathbb{N})$.

有理数指数幂: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $(a \geq 0, m, n \in \mathbb{N}, m > 1)$.

幂的运算法则: $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$, $(a > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$; $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$, $(a > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$;

$(ab)^a = a^a b^a$, $(a > 0, b > 0, a \in \mathbb{R})$.

(二) 对数

如果 $a^b = N (a > 0, a \neq 1)$, 那么 b 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作 $\log_a N = b$, 其中 a 叫做底数, N 叫做真数.

对数的性质:

- 1 零与负数没有对数;
- 2 底的对数等于 1, 即 $\log_a a = 1$;
- 3 1 的对数等于 0, 即 $\log_a 1 = 0$;
- 4 $a^{\log_a N} = N$, $\log_a a^b = b$.

运算法则:

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N, \quad (M > 0, N > 0);$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N, \quad (M > 0, N > 0);$$

$$\log_a M^n = n \log_a M, \quad (M > 0);$$

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M, \quad (M > 0).$$

换底公式:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}, \quad (N > 0).$$

常用对数: 以 10 为底的对数叫做常用对数, $\log_{10} N$ 通常又记为 $\lg N$.

自然对数: 以数 e 为底的对数叫做自然对数, $\log_e N$ 通常又记为 $\ln N$. 其中数 e 为一无理数, $e = 2.718281828459045 \dots$.

例 1 化简 $\sqrt[3]{ab^2 \sqrt{ab^{-1}}} \div \sqrt{ab}$.

解 原式 $= [ab^2(ab^{-1})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}} \div (ab)^{\frac{1}{2}} = (ab^2 a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = 1$.

例 2 计算 $\lg 5 + \lg 2 \lg 5 + \lg^2 2$.

解 原式 $= \lg 5 + \lg 2 (\lg 5 + \lg 2) = \lg 5 + \lg 2 = 1$.

例 3 计算 $25^{\log_5 4}$.

解 原式 $= (5^2)^{\log_5 4} = 5^{2\log_5 4} = 5^{\log_5 4^2} = 16$.

例 4 若 $2 < \log_n 47 < 3$, 求正整数 n .

解 当 $n \neq 1$ 时,

$$\therefore \log_n n = 1,$$

$$\therefore 2\log_n n < \log_n 47 < 3\log_n n,$$

$$\log_n n^2 < \log_n 47 < \log_n n^3,$$

$$n^2 < 47 < n^3.$$

故正整数 n 应取为 4, 5, 6.

六 复数

(一) 复数的概念

1 虚数单位

规定虚数单位为 i , 并且规定 $i^2 = -1$, 这个虚数单位 i 可以与实数一起进行加减乘除四则运算, i 的乘方还具有如下性质:

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2 复数的定义

形如 $a+bi$ (其中 a, b 都为实数) 的数叫做复数, a 叫做复数的实部, b 叫做复数的虚部。

$$\text{复数}(a+bi) \begin{cases} \text{实数}(b=0), \\ \text{虚数} \begin{cases} \text{纯虚数}(a=0, b \neq 0), \\ \text{非纯虚数}(a \neq 0, b \neq 0). \end{cases} \end{cases}$$

3 复数的相等

两个复数的实部相等, 虚部也相等, 我们规定这两个复数是相等的, 即当 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 时, 有

$$\left. \begin{matrix} a=c \\ b=d \end{matrix} \right\} \iff a+bi=c+di.$$

4 共轭复数

两个复数实部相等, 虚部互为相反数时, 这两个复数叫做互为共轭复数, 复数 $z=a+bi$ 的共轭复数记为 $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$, 如图 1-5.

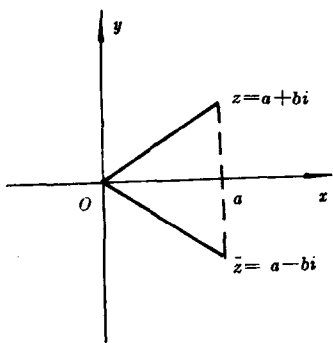


图 1-5

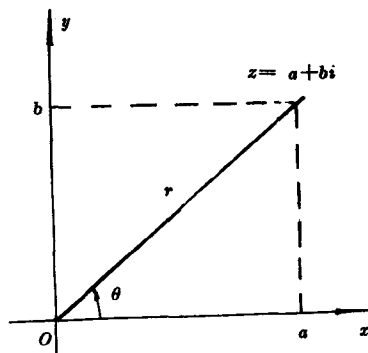


图 1-6

(二) 复数的表示式

代数式: $z=a+bi$.

三角式: $z=r(\cos\theta+\sin\theta)$.

指数式: $z=re^{i\theta}$.

相互间的关系(如图 1-6):

$$\begin{cases} a=r\cos\theta, \\ b=r\sin\theta; \end{cases} \quad \begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2}, \\ \operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}. \end{cases}$$

(三) 复数的运算

1 代数式:

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

2 三角式:

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+isin\theta_1), \quad z_2=r_2(\cos\theta_2+isin\theta_2),$

则

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+isin(\theta_1+\theta_2)];$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+isin(\theta_1-\theta_2)];$$

设

$$z=r(\cos\theta+isin\theta),$$

则

$$z^n=[r(\cos\theta+isin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+isin n\theta);$$

设

$$z^n=r(\cos\theta+isin\theta), \quad \text{则} \quad z=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+isin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),$$

其中 $k=0,1,2,\dots,(n-1), \quad (n\in N).$

例 1 计算 $\frac{(2+2i)^7}{(-1+\sqrt{3}i)^3}.$

解

$$\text{原式}=\frac{2^7(1+i)^7}{2^3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3}=\frac{2^4(1+i)^6(1+i)}{1}=2^4(2i)^3(1+i)=2^7(-i)(1+i)=2^7(1-i).$$

例 2 解方程 $x^2-(3-i)x+2=i.$

解 不妨先设 x 为实数,于是

$$x^2-3x+xi+2=i,$$

$$x^2-3x+2=(1-x)i,$$

由于 x 为实数,可知

$$x^2-3x+2=0,$$

$$1-x=0,$$

解得 $x_1=1$, 又由韦达定理知 $x_1+x_2=3-i$, 得 $x=2-i$, 故原方程有两个根: $x_1=1, x_2=2-i$.

例 3 解方程 $x^3=1.$

解 $\because x^3=\cos\theta+isin\theta,$

$$\therefore x=\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3}+isin\frac{\theta+2k\pi}{3}\right), \quad (k=0,1,2);$$