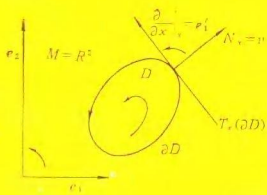


数学物理中的微分形式

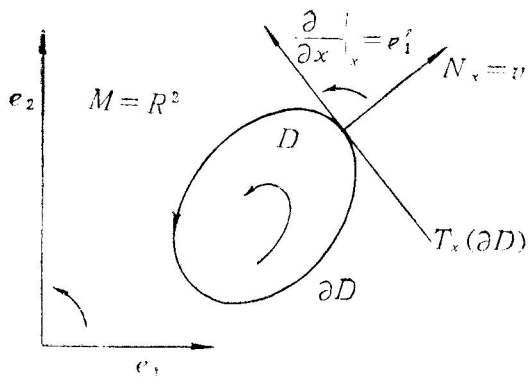
C. 冯·韦斯坦豪斯 著
蒋正新 陆启超 路精保 译



北京航空航天大学出版社

的微分形式

霍尔斯 著
路精保 译



北京航空航天大学出版社

数学物理中的微分形式

SHUXUE WULI ZHONG DI WEIFEN XINGSHI

C·馮·韦斯坦霍尔斯 著

蔣正新 陆启韶 路精保 譯

郭兴宗 吳义保 校

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是专门向数学家、数学物理学家、理论物理学家介绍微分流形方面的数学思想和方法及其在数学物理中的应用。全书共七个部分,包括十四章:拓扑, $\mathbb{R}^n$ 上的微分学,流形上的微分学,李群,纤维丛,微分形式的积分,上同调论,联络理论,哈密顿力学,相对论,统一场论等。本书特别强调几何观点的描述和在数学物理中的应用。是学习现代数学思想和方法的一本极好的参考书。

本书可供大学数学、力学、物理、系统工程等系的高年级大学生、研究生、教师以及科学研究单位的科学工作者们参考。

DIFFERENTIAL FORMS IN MATHEMATICAL PHYSICS

C. VON WESTENHOLZ

数学物理中的微分形式

C. 冯·韦斯坦霍尔斯 著

蒋正新 陆启韶 路精保 译

郭兴宗 吴义保 校

责任编辑 郭维烈

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经售

北京航空航天大学印刷厂印装

787×1092 1/16 印张: 25.5 字数: 653千字

1989年元月第一版 1989年元月第一次印刷 印数: 3000册

ISBN 7-81012-056-5/O·007

定价: 5.00元

译者的话

八五年我摘取本书部分内容一般为力学专业的博士研究生讲授过，后来又陆续有其它专业的研究生参加，因此研究生院决定正式设立这方面的课程，这就需要教材使用。于是便和陆启韶、路精保同志合作将该书译出：我自己译第一、二、三、四、五、六、九、十章；陆启韶译第七、八、十一、十二章；路精保译第十三、十四章。由于我们也是边学习边翻译，水平有限，所以错漏之处定会出现，敬请专家指正。

原书目录所列标题有几处(注有星号的章节)与书中相应内容所用标题不一致，可能是作者修订后的疏漏，我们在翻译时作了订正。

本书的出版得到北航出版社和北航研究生院的大力支持，我们表示衷心的感谢。

蒋正新

一九八八年四月

3F50'05

序 言

数学物理，包括量子场论、基本粒子物理、固体物理、动力系统理论等，受到近代数学强力的影响，所采用的方法发生了根本性的变化。因此亟需象本书这样的专著，以便为物理学家提供与之相关的微分流形方面的数学思想和方法。读者将会发现，根据“几何思想”建立起来的方法能为描述自然现象提供一套崭新、奇妙而统一的工具，与分析方法相比，则有更大的优越性。

微分形式的概念与微分流形的思想相结合，作为当代数学的一块奠基石，出现在偏微分方程、代数拓扑和微分几何的理论之中。用张量方法研究几何和物理定律有明显的不足之处，因为张量分析要求一个非奇异坐标系，在其中给出矢量或张量的分量。然而，按照微分流形的定义，单个的非奇异坐标系是不足以覆盖整个流形的。因此，在一般的微分流形中，我们不可能用张量在某个坐标系下的分量来描述张量场。由此可见，张量场的分量远不如张量的内蕴表示这个概念来得重要，后者是从前者抽象出来的。在各种张量场中，反对称协变张量场可以内蕴地用微分形式表示。大量的物理理论都能通过它们给出优美而简洁的公式表示，特别是Maxwell电磁理论，杨振宁-Mills理论，相对论，以及热力学和分析力学（辛力学）中的物理定律。

De Rham*利用微分形式揭示了流形的拓扑结构与流形上矢量分析的某些问题间的深刻联系。E.Cartan 则利用微分形式去研究微分系统和 Riemann 几何的问题。因此，本书主要是对流形上的矢量分析进行直接的阐述，可以作为对 Cartan和De Rham 的工作的一个全面而初步的探讨。我们要特别指出，除非系统地研究微分形式的运算，否则要把 Stokes 定理和散度定理推广到一般流形上去，将是十分的困难。在讲述这些运算并用于建立积分理论的过程中，物理学家可以从中学到许多近代数学的方法。与此同时，我们还打算对物理定律给出一个概念上明白透彻的矢量分析描述。所以，在本书中穿插了很多物理方面的应用，特别是在最后两章里专门讲述物理问题。

在过去几年(1969—1977)里，作者就微分形式及其在数学物理中的应用为题，在几所大学为数学家、数学物理学家、理论物理学家以及对数学有兴趣的实验物理学家和工程师们举办过讲座。本书就是以这些讲演材料为基础，经过适当的扩充和完善而写成的。然而我要强调的是，本书的意图是给出关于“数学物理中的微分形式”这个课题的直观而实用的知识，而不过份追求那些只有对数学家才适合的高度严谨和精确。

要想顺利地阅读并理解本书的内容，则需具备集合论、线性代数、微积分方面的知识，并且要有本科物理的知识。

(谢启略)

* 此处原文中为de Rham，但有些地方为De Rham，考虑到习惯上的述写，后面一律用De Rham——译者

第二版序言

本书（《数学物理中的微分形式》）第一版问世数月便告脱销，这清楚地表明对这方面的教材是多么的需求。因为它能向物理学家和数学物理学家提供近代数学，特别是流形理论方面的工具。

经过修改的第二版特增加了两节，即第十章的§5和§6，在那里利用De Rham 上同调理论把内蕴场论的梗概清楚地展示出来，它与近代物理中极为重要的最小耦合原理密切相关。近十几年来，数学物理学家把内蕴场的概念用于建立最小耦合原理的几何描述，通常称之为规范结构。

在第一版的基础上又增加了第七篇，它讲述统一场论，例如 Kaluza-Klein 理论（电磁相互作用和引力的统一理论）、非阿贝尔规范场论等，这样就把第十章所增加的新内容作了进一步的推广。此外，还补充了关于规范对称性的自发破缺机理的内蕴描述，之所以把这些内容组成为一节，是基于如下的事实：自发对称性破缺在近代物理的各个领域，如超导性、铁磁性及基本粒子物理等的研究中变得越来越重要。在第七篇中，对弱相互作用和电磁相互作用的统一场结构，以及有可能统一基本物理相互作用的超引力，也作了简要的描述。

（谢启略）

目 录

第一篇 基本概念

第一章 拓扑预备知识

摘要	(1)
§1 引言	(1)
§2 拓扑空间	(1)
§3 闭包, 内部, 边界	(3)
§4 连续映射, 同胚	(4)
§5 拓扑空间的性质	(6)
§6 特殊的拓扑	(8)

第二章 $\mathbb{R}^n$ 上的微分学

摘要	(12)
§1 引言	(12)
§2 多元映射的微分法	(13)
§3 可微映射的性质	(14)
§4 方向导数	(15)
§5 偏导数	(16)
§6 微分的矩阵, 雅可比	(17)
§7 C^1 -映射和微分同胚	(21)
§8 中值定理	(22)
§9 高阶微分和 Taylor 公式	(22)
§10 C^k -微分同胚的概念	(24)
§11 反函数定理	(25)
§12 隐函数定理	(26)

第二篇 流 形

第三章 微分流形

摘要	(29)
§1 引言	(29)
§2 图和图册	(30)
§3 微分流形的定义	(31)

§4	微分流形的性质.....	(32)
4.1	M^n 的Hausdorff性质	(32)
4.2	M^n 是局部欧的	(33)
4.3	M^n 是局部紧的 ^[*]	(33)
4.4	流形的开子集.....	(33)
4.5	积流形.....	(33)
4.6	单位分解.....	(34)
§5	微分流形的例子.....	(34)

第四章 流形上的微分学

§1	可微映射.....	(39)
§2	切矢量和切空间.....	(43)
§3	映射的微分.....	(47)
§4	映射的秩.....	(50)
§5	浸没, 浸入, 子流形 ^[*]	(52)
§6	数学物理中的应用.....	(54)

第五章 李 群

	摘要.....	(56)
§1	引言和历史背景.....	(56)
§2	李群的定义, 例子.....	(57)
§3	左不变矢量场.....	(59)
§4	李群的李代数.....	(60)
§5	李群的同态.....	(62)
§6	李群的李子群.....	(64)
§7	单参数子群.....	(64)
§8	指数映射.....	(66)
§9	典范坐标系.....	(70)
§10	伴随表示.....	(71)
§11	李变换群.....	(73)
§12	李群的齐性空间.....	(76)
§13	应用: Klein的“Erlanger 纲领”	(77)

第六章 纤维丛

§1	引言.....	(79)
§2	纤维丛的定义, 例子.....	(80)
§3	切丛和余切丛.....	(82)
3.1	引言和动机.....	(82)
3.2	切丛(余切丛)的严格描述.....	(83)

§4	张量丛	(85)
§5	矢量丛	(88)
§6	主丛	(89)
§7	相伴丛	(91)

第三篇 微分形式

第七章 微分形式的基本概念

	摘要	(93)
§1	微分形式的定义	(94)
	1.1 用截面去定义微分形式	(94)
	1.2 用交错多重线性映射去定义微分形式	(95)
	1.3 微分形式的标准型	(97)
	1.4 伴随微分形式	(98)
§2	微分形式的运算	(99)
	2.1 外导数	(100)
	2.2 可微映射的对偶 φ^*	(104)
	2.3 φ^* 的标准型的计算	(106)
	2.4 Poincaré 引理及其逆命题	(108)
	2.5 微分形式与矢量场的内积	(113)
	2.6 微分形式的李导数	(115)
§3	李群上的不变微分形式	(118)
§4	在数学物理中的应用	(122)
	(A) 电磁学中的微分形式	(122)
	4.1 电磁场	(123)
	4.2 电磁场的变换规律	(124)
	4.3 在Minkowski时-空中的Maxwell方程组	(125)
	4.4 在三维空间中的Maxwell 方程组	(127)
	(B) 热力学中的微分形式	(129)
	(C) 数学物理中的Maurer-Cartan形式	(132)
	4.5 在刚体动力学中的左不变微分形式	(132)
	4.6 牛顿质点力学中的右不变形式	(135)

第八章 Frobenius理论

§1	引言	(142)
§2	Frobenius 条件	(144)
§3	Frobenius 可积性定理	(147)
	3.1 引言	(147)

3.2	k 维分布的积分流形	(148)
3.3	局部Frobenius 可积性定理	(151)
3.4	整体Frobenius 定理; 叶层结构	(152)
3.5	用微分形式表示的Frobenius 可积性定理	(153)
3.6	用微分理想表示的Frobenius 定理	(156)
§4	数学物理中的应用	(158)
4.1	力学系统的对合性 (完整性)	(158)
4.2	热力学的 Caratheodory 定理	(160)
4.3	物理中的一阶常微分方程组	(162)
4.4	物理中的一阶偏微分方程	(163)
4.4.1	偏微分方程概要	(163)
4.4.2	一阶偏微分方程的一般解法	(164)
4.4.3	一阶偏微分方程的Caychy问题	(167)
4.4.4	Cartan 的偏微分方程理论在物理中的应用	(173)

第四篇 流形上的积分理论

第九章 微分形式的积分法

§1	欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$ 中的积分法	(175)
1.1	一次微分形式的曲线积分	(175)
1.2	二次微分形式的曲面积分	(176)
§2	定向	(178)
2.1	n 维矢量空间 $V^n(\mathbf{R})$ 的定向	(178)
2.2	n 维流形的定向	(179)
§3	n -形式在 $\mathbf{R}^n$ 中的积分法	(181)
§4	链上的积分法	(183)
4.1	可微链的概念	(183)
4.2	形式在链上的积分法	(186)
4.3	关于链的 Stokes 定理	(187)
§5	定向流形上的积分	(188)
5.1	具有紧支集的微分形式的积分	(188)
5.2	关于流形的 Stokes 定理	(191)
5.3	Riemann 流形上的积分	(197)

第十章 De Rham 上同调

	摘要	(200)
§1	De Rham 上同调	(200)
1.1	通常的De Rham 上同调	(200)

1.2 De Rham群的例子	(202)
1.3 具有紧支集的De Rham上同调	(208)
§2 可微的奇异同调	(209)
§3 De Rham定理	(211)
§4 映射度	(213)
§5 环绕数	(215)
§6 用基础物理定律中的结构定义De Rham上同调	(217)
§7 Hodge 定理	(229)
7.1 引言	(229)
7.2 Hodge 星形算子	(229)
7.3 上微分 $\delta^{[*]}$	(229)
7.4 Laplace-Beltrami 算子	(230)
7.5 调和的微分形式	(232)
7.6 Hodge 分解定理	(234)
§8 Poincaré 对偶性	(236)
§9 数学物理中的应用	(238)

第五篇 联络理论

第十一章 纤维丛上的联络

摘要	(242)
§1 古典微分几何中的仿射联络	(242)
1.1 协变微分	(242)
1.2 协变微分的几何解释	(244)
1.3 平行移动的物理解释	(245)
§2 Koszul 意义下的仿射联络	(246)
2.1 Koszul 联络的概念	(246)
2.2 矢量场沿曲线的协变导数	(248)
2.3 沿曲线的平行移动	(249)
2.4 在张量丛上的协变导数	(249)
2.5 仿射联络的挠率和曲率	(250)
2.6 挠率和曲率的內蕴定义	(251)
2.7 黎曼联络	(253)
2.7.1 逆变和协变张量场间的典范对应关系	(253)
2.7.2 黎曼联络 (Levi-Civita 联络)	(254)
2.8 在数学物理中的应用	(256)
§3 Cartan 联络	(259)
§4 Ehresmann 联络	(263)
4.1 历史背景	(263)

~ V ~

4.2 用线性映射定义 Ehresmann 联络	(264)
4.3 用 $\mathcal{Y}$ -值的 1-形式定义 Ehresmann 联络	(265)
4.4 联络的曲率形式, 结构方程	(267)
4.5 平坦联络	(270)
4.6 完整群	(271)
4.6.1 平行移动	(271)
4.6.2 联络的完整群	(274)
4.6.3 Ambrose-Singer 的完整性定理	(275)
§5 线性联络	(277)

第六篇 内蕴分析力学

第十二章 Hamilton力学和几何学

摘要	(280)
§1 引言	(280)
§2 保守力学, 辛流形	(282)
2.1 局部坐标中的辛结构	(284)
2.2 Hamilton系统	(287)
2.3 Noether定理	(293)
2.4 正则变换	(295)
2.5 正则变换和生成函数	(299)
2.6 无穷小切触变换	(301)
2.7 生成函数和无穷小切触变换 (小结)	(302)
§3 非定常力学	(303)
§4 Hamilton原理的几何理论	(306)
附录: Legendre 变换	(312)
§5 Hamilton-Jacobi 方程的几何理论	(314)
5.1 保守系统	(314)
5.2 非保守系统	(314)

第七篇 统一结构

第十三章 引力理论^{【*】}

摘要	(317)
§1 引言 (引力理论的历史发展)	(317)
§2 牛顿联络	(320)
§3 基于引力的几何结构	(321)
§4 广义相对论中的对称性	(323)
4.1 无穷小运动或Killing 矢量场	(324)

4.2 Killing方程和守恒定律	(326)
§5 相对论性流体力学	(326)
5.1 引言	(326)
5.2 非相对论性流体力学	(327)
5.2.1 Navier-Stokes 方程和Euler方程	(328)
5.2.2 Bernoulli方程	(331)
5.2.3 涡量守恒的Helmholtz定理	(332)
5.2.4 环量守恒的Thomson 定理	(333)
5.3 相对论性流体力学	(333)
5.3.1 积分不变量	(333)
5.3.2 环量守恒的Thomson 定理	(336)
5.3.3 涡量守恒的Helmholtz定理	(339)
 第十四章 统一场理论	
摘要	(343)
§1 Kaluza-Klein 的五维理论	(343)
1.1 电磁场的结构	(346)
1.2 M^6 上的Kaluza-Klein度量	(347)
1.3 用Kaluza-Klein 几何学描述带电粒子的相对论性流体	(348)
§2 规范对称性与整体对称性	(348)
§3 几何学的规范结构	(350)
§4 自发的对称破缺	(351)
附录: 拓扑量子数	(354)
§5 整体对称性的自发破缺	(357)
§6 弱相互作用和电磁相互作用的统一	(359)
6.1 统一的Salam-Weinberg模型	(361)
6.2 自发的 μ - e 质谱分裂	(362)
§7 统一物理规律的超引力	(372)
内容索引	(378)
参考书目	(391)

第一篇 基本概念

第一章 拓扑预备知识

摘要 本章研究的对象是拓扑空间。所谓拓扑空间，指的是一个集合 E 及 E 上的一个拓扑，而拓扑分别可用开集、闭集或邻域等价地加以定义。开集拓扑或闭集拓扑虽然没有邻域拓扑那样直观，但逻辑上却比较简单，因此是定义拓扑的一种较好方法 (§2)。

拓扑空间的很多性质都与开集在这个空间中的分布有关。如果一个拓扑空间包含的开集很少，那么它就象是第一或第二可数的。另一方面，如果一个拓扑空间含有很多或足够多的开集，并且还满足适当的分离性，则这个空间的序列有唯一的极限。这样的空间是容易定义的，只要在拓扑空间的公理化体系上再补充一个分离性公理就行了。不过，本书仅限于讨论由Hausdorff分离性公理所定义的拓扑空间 (§5)。

正规地讲，拓扑学研究的是拓扑空间在同胚变换 (§4) 之下所保留的那些性质 (比如紧性或连通性，见§5)。换句话说，拓扑学是研究拓扑不变量的。

预备知识：集合论 (集运算，笛卡尔积，映射)。

§1 引言

拓扑学的思想是要给出邻近性和连续性这些极为直观的含义。定义拓扑有几种互相等价的方式：用开集，用闭集，或者用点的邻域的概念。前两种定义方式虽然没有用邻域定义来的直观，但逻辑上较为简单，因而是定义拓扑的较好方式。

在这一章，我们扼要地大都不加证明地给出本书所必需的拓扑知识。读者欲知其详，可阅读书后列举的有关参考书。

§2 拓扑空间

所谓拓扑空间，指的是一个非空集合 E 和 E 的一个满足下述公理的子集族 $\mathcal{T} = (U_i | i \in I)$ ：

(01) $E \in \mathcal{T}$, $\Phi \in \mathcal{T}$, 其中 Φ 表示空集。

(02) $\mathcal{T}$ 中任意有限多个集合的交集，仍属于 $\mathcal{T}$ ，也就是说：

$$J \text{ 有限且 } J \subset I \implies \bigcap_{i \in J} U_i \in \mathcal{T}$$

(03) $\mathcal{T}$ 中任意多个集合之并集，仍属于 $\mathcal{T}$ ，也就是说：

$$J \subset I \implies \bigcup_{i \in J} U_i \in \mathcal{T}$$

$\mathcal{T}$ 中的元素 (E 的子集) 叫做 $\mathcal{T}$ -开集，或简称 E 中的开集。而序偶 $(E, \mathcal{T})$ 便叫做拓扑空间。

例2.1 取集合 E 的子集族 $\mathcal{T} = \{E, \Phi\}$, 它满足拓扑的三条公理, 故构成一个拓扑, 被称之为非离散拓扑 (indiscrete topology)。则 $(E, \mathcal{T})$ 被称之为非离散的拓扑空间。

例2.2 取集合 E 的所有子集构成的族 $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ (又叫做 E 的幂集)。很显然 $\mathcal{P}(E)$ 满足拓扑的三条公理(01)–(03)。这个拓扑叫做离散拓扑 (discrete topology); 而序偶 $(E, \mathcal{T})$ 叫做离散拓扑空间。

例2.3* 取 $E = \mathbb{R}$ 为实直线。在 $\mathbb{R}$ 上定义拓扑如下: 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 考虑含 x 的开区间 (a, b) , 则得到 $\mathbb{R}$ 的子集族

$$\mathcal{T} = \{U_i = (a_i, b_i) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$

若 $a_i = b_i$, 则 $(a_i, b_i) = \Phi$ 。

通过直接验证可知 $\mathcal{T}$ 满足公理(01)–(03)。这个拓扑被认为是 $\mathbb{R}$ 上的通常拓扑 (usual topology)。类似地, $\mathbb{R}^n$ 作为 n 个 $\mathbb{R}$ 的笛卡尔积, 其上的通常拓扑由集族 $\mathcal{T}$ 给出, 而 $\mathcal{T}$ 是由所有形如

$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n, \quad U_i = (a_i, b_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

的开集所组成。其中 $U_i = (a_i, b_i)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开区间。如果不加声明, 则我们总是假定采用 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 上的通常拓扑。

设 $(E, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, A 是 E 的一个子集。如果 A 的余集

$$c_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

是一个开集, 则称 A 是闭的。

由拓扑空间的公理(01), (02), (03)和De Morgan定律, 我们可以断言: E 的所有闭子集构成的集族 $\overline{\mathcal{T}} = \{A_i \mid i \in I\}$ 满足下述条件:

(C1) E 和 Φ 都闭集, 即 $E, \Phi \in \overline{\mathcal{T}}$ 。

(C2) $\overline{\mathcal{T}}$ 中任意有限多个集合的并集仍属于 $\overline{\mathcal{T}}$:

$$J = \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset I \implies \bigcup_{i=1}^n A_i \in \overline{\mathcal{T}}.$$

(C3) $\overline{\mathcal{T}}$ 中任意多个集合的交集仍属于 $\overline{\mathcal{T}}$, 即

$$J \subset I \implies \bigcap_{i \in J} A_i \in \overline{\mathcal{T}}.$$

从公理(01), (02), (03), 我们可以断言, 通过对偶性, 拓扑空间可以用闭集等价地来定义。我们用 $(E, \overline{\mathcal{T}})$ 来记这个拓扑空间。

设 $x \in E$ 是拓扑空间 E 中的一点, 如果 V 是 E 的一个含有开集 U 的子集, 且 $x \in U$, 则称 V 是 x 的一个邻域。用 $V = V(x)$ 记之。特别是, 任一开集 U 都是 U 的每一个点的一个邻域。点 $x \in E$ 的所有邻域构成的集族用 $\mathcal{B}(x)$ 表示, 并叫做 x 的基础邻域系 (fundamental neighbourhood system)。

例2.4 设 $x \in \mathbb{R}$, 则以 x 为中心的每个闭区间 $[x - \delta, x + \delta]$ 都是 x 的一个邻域, 因为它含有开区间 $(x - \delta, x + \delta)$, 而后者含有 x 。

* 这个例子中, 作者给出的 $\mathcal{T}$ 不是一个拓扑, 而是通常拓扑的一个基 (见§2的末尾关于拓扑基的定义)。很显然, 两个不相交的开区间的并集, 不再是 $\mathbb{R}$ 上的一个开区间, 故不满足公理(03)。因此, 例2.3后面关于 $\mathbb{R}^n$ 上的通常拓扑的说明, 也是欠妥的。他给出的也是 $\mathbb{R}^n$ 上通常拓扑的基。——译者注。

邻域的下述性质可用来定义 E 上的拓扑:

(V1) $\mathcal{B}(x)$ 不是空的, 并且 x 属于 $\mathcal{B}(x)$ 中的每一个成员, 即

$$x \in E, V \in \mathcal{B}(x) \implies x \in V.$$

(V2) 任取 $V_1, V_2 \in \mathcal{B}(x)$, 都在存 $V_3 \in \mathcal{B}(x)$, 使得 $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ 。

(V3) 若 $V \in \mathcal{B}(x)$, $y \in V$, 则在存 $U \in \mathcal{B}(y)$ 使得 $U \subset V$ 。

可以看出, 开集拓扑、闭集拓扑和邻域拓扑的结构能够互相确定。也就是说, 不管从哪一种拓扑结构出发, 都能导出另外两种拓扑结构。借助于拓扑空间的这三种不同的公理化体系, 可使“拓扑”一词表示这些等价的结构。因而一个拓扑空间具有所有这些结构, 并且可用其中任一方式来定义它们。最后, 设 $(E, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, $\mathcal{B}$ 是 E 中的部分开集构成的集族, 即 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ 。我们说 $\mathcal{B}$ 是拓扑 $\mathcal{T}$ 的一个基, 当且仅当

(B1) $\mathcal{T}$ 中的每个开集 U 都是 $\mathcal{B}$ 中的开集的并集。或等价地说: $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个基, 当且仅当

(B1') 对于属于开集 $U \in \mathcal{T}$ 的任一 x , 都存在 $B \in \mathcal{B}$, 且满足 $x \in B \subset U$ 。

知道了 $\mathcal{B}$, 我们便得到 x 的一个邻域 $V \in \mathcal{B}(x)$, 它是含有 $\mathcal{B}$ 的元素(是一个开集)的子集。

§3 闭包, 内部, 边界

设 $(E, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间。点 $x \in E$ 是子集 $A \subset E$ 的极限点或聚点, 当且仅当含有 x 的每个开集 $U \in \mathcal{T}$, 都含有 A 的不同于 x 的点, 也就是说:

$$U \text{ 是开集, } x \in U \implies (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

A 的所有聚点构成的集合, 记之为 A' , 叫做 A 的导集(derived set)。

命题3.1 拓扑空间 E 的子集 A 是闭的, 当且仅当 $A' \subset A$, 也就是说, A 包含了它的所有聚点。

设 $A \subset E$ 是拓扑空间 E 的一个子集。所谓 A 的闭包, 记之为 $\bar{A}$, 是 E 中所有包含 A 的闭子集的交集。点 $x \in E$ 叫做 $A \subset E$ 的附着点(adherent point), 当且仅当 $x \in \bar{A}$, (也就是说, x 属于 A 的闭包)。由于 $\bar{A}$ 是闭子集的交集, 故 $\bar{A}$ 是闭集。因此 $\bar{A}$ 也是包含 A 的最小闭集, 也就是说, 对任意包含 A 的闭集 C , 都有 $A \subset \bar{A} \subset C$ 。因此可以陈述为:

命题3.2 设 $\bar{A}$ 是集合 A 的闭包。则

- (a) $\bar{A}$ 是闭的;
- (b) 若 C 是包含 A 的闭集, 则 $A \subset \bar{A} \subset C$;
- (c) A 是闭的当且仅当 $A = \bar{A}$;
- (d) $\bar{A} = A \cup A'$ 。

(d)的证明 由于 $A \subset \bar{A}$ 和 $A' \subset (\bar{A})' \subset \bar{A}$ (据命题3.2b), 故有 $A \cup A' \subset \bar{A}$ 。反之, 可证明 $A \cup A'$ 是闭的, 因此有 $A \subset \bar{A} \subset A \cup A'$ (据命题3.2b)。

附注3.3 上述命题中的(c)和(d)给出: 若 A 是闭的, 则有

$$\bar{A} = A \implies A = A \cup A' \implies A' \subset A \text{ (见命题3.1)}.$$

例3.4 由于空集 $\emptyset$ 中没有点, 所以它没有不是聚点的点, 因而 $\emptyset = \emptyset$ 。据命题3.2c知, 空集 $\emptyset$ 是闭集。

对于 E 的每个子集 A , 规定其闭包 $\bar{A} \subset E$, 则关于闭包运算的公理已为 Kuratowski 所阐明。事实上, 这些公理可用来在 E 上定义拓扑。不过, 在这里Kuratowski的公理变成了如下的定理:

命题3.5 对于 E 的所有子集 A, B , 有

- (a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
- (b) $A \subset \bar{A}$;
- (c) $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$;
- (d) $\bar{\emptyset} = \emptyset$ 。

设 $(E, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间。点 $x \in A \subset E$ 叫做 A 的内点, 如果 A 包含一个含有 x 的开集 U ; $x \in U \subset A$, 且 U 是开集。 A 的所有内点构成的集合, 记之为 $\mathcal{A}$ (或 $\text{int}(A)$), 叫做 A 的内部。一个集合 A 的内部能够被表征如下,

命题3.6 集合 A 的内部是含于 A 中的所有开集的并集。此外, 还有

- (a) $\mathcal{A}$ 是开集;
- (b) $\mathcal{A}$ 是含于 A 中的最大开子集, 也就是说, 若 U 是 A 的一个开子集, 则 $U \subset \mathcal{A} \subset A$;
- (c) A 是开集当且仅当 $A = \mathcal{A}$ 。

证明 设 $(U_i | i \in I)$ 是 A 的所有开子集构成的族。若 $x \in \mathcal{A}$, 则 x 属于 A 的某一开子集, 即存在 $i_0 \in I$ 使得 $x \in U_{i_0}$ 。因此 $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, 从而据 $x \in \mathcal{A}$ 的任意性知 $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ 。反之, $y \in \bigcup_{i \in I} U_i$ 意味着对某一 $i_0 \in I$ 有 $y \in U_{i_0}$, 因而 $y \in \mathcal{A}$, 从而有 $\bigcup_{i \in I} U_i \subset \mathcal{A}$ 。结合在一起, 便证明了 $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} U_i$ 。

(a) $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} U_i$ 作为开集的并集是一个开集。

(b) 若 U 是含于 A 中的开集, 则 $U \in (U_i | i \in I)$, 因此 $U \subset \bigcup_{i \in I} U_i = \mathcal{A} \subset A$ 。

(c) 若 A 是开集, 则 $A \subset \mathcal{A} \subset A$, 即 $A = \mathcal{A}$ 。若 $A = \mathcal{A}$, 则由于 $\mathcal{A}$ 是开集, 故 A 是开集。

集合 $A \subset E$ 的边界(boundary, frontier)是指集合 $\partial A = \bar{A} - \mathcal{A}$, 并且有 $\bar{A} = \mathcal{A} \cup \partial A$ 。此外还有

$$A = \partial A \iff \mathcal{A} = \emptyset$$

例3.7 考虑有理数集合 $\mathbb{Q}$ 。在 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑中, 每个实数 $x \in \mathbb{R}$ 都是 $\mathbb{Q}$ 的一个聚点, 因此, 据命题3.2, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ 。进而, 由于 $\mathbb{R}$ 的每个开子集都既含有理点又含无理点, 说明 $\mathbb{Q}$ 和 $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ 都没有内点, 所以 $\text{int}(\mathbb{Q}) = \text{int}(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}) = \emptyset$; 从而有 $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ 。

例3.8 若 $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 则 $\text{int}(A) = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$ 。类似地有: 区间 (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ 的内部都为 (a, b) 。

§4 連續映射, 同胚

令 $(E_i, \mathcal{T}_i)$, $i=1, 2$, 是两个拓扑空间。映射 $f: E_1 \rightarrow E_2$ 在 $x_0 \in E_1$ 是连续的, 当且仅当对 $f(x_0)$ 的任一邻域 $V(f(x_0))$, 都存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$, 使得 $f(U) \subset V$, 也就是说:

~ 4 ~