

反 演 理 论

数 据 拟 合 及 模 型 参 数

估 算 方 法

艾伯特·塔兰托拉 著

张先康等 译

刘福田 校

学术书刊出版社

内容提要

本书较系统地介绍了反演问题的理论, 论述了离散反演问题和一般反演问题, 以丰富的实例说明了反演理论在地球物理学中的应用, 内容涉及新近发展起来的地球物理层析成象方法。本书从事地球物理学研究以及其它有关学术领域研究人员有很好的参考价值。

• • •

INVERSE PROBLEM THEORY

Methods for data fitting and model parameter estimation

Albert Tarantola

Elsevier Science Publishers B.V., 1987

• • •

反 演 理 论

数据拟合及模型参数估算方法

艾伯特·塔兰托拉 著

张先康等 译 刘福田 校

责任编辑: 姜维岐

•

学术书刊出版社出版(北京海淀区学院南路86号)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京印刷三厂联营厂印刷

•

开本: 850×1168毫米 1/32 印张: $17\frac{3}{8}$ 字数: 453千字

1989年12月第1版 1989年12月第1次印刷

印数: 1—1500册 定价: 9.50元

ISBN 7-80045-509-2/P·14

目 录

译者的话.....	(VI)
中译本序.....	(VII)
前言	(IX)

第一部分 离散反演问题

第一章 一般离散反演问题.....	(1)
1.1 模型空间和数据空间.....	(1)
1.1.1 模型空间	(2)
1.1.2 数据空间	(6)
1.1.3 联合空间 $D \times M$	(7)
1.1.4 符号	(8)
1.2 信息状态	(10)
1.2.1 概率的数学概念	(10)
1.2.2 概率的解释	(14)
1.2.3 全知状态.....	(19)
1.2.4 完全无知状态(或参考信息状态).....	(19)
1.2.5 信息量的Shannon测度	(26)
1.2.6 信息状态的组合	(27)
1.3 物理理论得到的信息(求解正问题)	(30)
1.4 测量得到的信息和先验信息	(34)
1.4.1 测量结果.....	(34)
1.4.2 模型参数的先验信息	(37)
1.4.3 $D \times M$ 空间的联合先验信息	(47)
1.5 确定反演问题的解.....	(47)
1.5.1 实验、先验和理论信息的组合	(47)
1.5.2 反演问题的求解	(49)
1.5.3 一些特殊情况	(50)

1.6	反问题解的利用	(55)
1.6.1	描述模型空间的后验信息	(55)
1.6.2	误差和分辨分析	(57)
1.6.3	解析解	(58)
1.6.4	模型空间的系统探索	(59)
1.6.5	Monte Carlo法	(59)
1.6.6	最大似然点的计算	(59)
1.7	几种特殊情况	(61)
1.7.1	高斯假设(最小二乘准则)。情况 $d=g(m)$	(61)
1.7.2	高斯假设(最小二乘准则)。情况 $f(d, m)=0$	(70)
1.7.3	广义高斯假设(最小绝对值准则, 极小极大准则)	(75)
补充1.1	中心估计和离差估计值	(13)
补充1.2	广义高斯型	(24)
补充1.3	对数正态概率密度函数	(44)
补充1.4	利用贝叶斯方法解反演问题	(53)
	第一章的问题	(78)
第二章	尝试法	(151)
	第二章的问题	(154)
第三章	Monte Carlo法	(155)
3.1	寻找容许模型的范围	(156)
3.2	方差与协方差的非线性计算	(158)
3.3	模拟热处理	(164)
补充3.1	数值积分的Monte Carlo法	(161)
第四章	最小二乘(l_2-范数)准则	(173)
4.1	最小二乘法的引入	(173)
4.2	求解方法(I)	(176)
4.2.1	模型空间的系统搜索	(176)
4.2.2	尝试法	(177)
4.2.3	松弛法	(177)
4.2.4	Monte Carlo法	(177)
4.2.5	高斯-牛顿法	(178)

4.2.6	解的特征	(181)
4.3	误差和分辨分析	(182)
4.3.1	后验协方差算子的计算	(182)
4.3.2	后验协方差算子的解释	(184)
4.3.3	分辨算子	(185)
4.3.4	特征向量分析	(187)
4.3.5	数据空间中后验协方差算子, 数据的重要性	(184)
4.3.6	残差是否太大?	(195)
4.4	离散最小二乘的数学问题	(197)
4.4.1	距离、范数和标积的最小二乘定义	(197)
4.4.2	对偶空间	(200)
4.4.3	$S(m)$ 的梯度、海赛 (Hesse) 算子、最速上升方向和曲率	(208)
4.4.4	梯度法的引入	(211)
4.4.5	最优化方法的选择	(218)
4.5	求解方法 (I)	(220)
4.5.1	预条件最速下降法	(220)
4.5.2	预条件共轭方向法	(221)
4.5.3	拟牛顿法	(222)
4.5.4	变尺度法	(223)
4.6	线性问题的特殊公式	(227)
4.6.1	预条件最速下降法	(228)
4.6.2	预条件共轭方向法	(228)
4.6.3	牛顿法	(228)
4.6.4	变尺度法	(229)
4.7	可线性化问题的特殊公式	(229)
4.7.1	预条件最速下降法	(230)
4.7.2	预条件共轭方向法	(230)
4.7.3	牛顿法	(231)
4.7.4	变尺度法	(231)
补充4.1	协方差矩阵的平方根	(190)
补充4.2	Lanczos分解	(191)

补充4.3	距离、范数和标积	(198)
补充4.4	“核”的不同意义	(204)
补充4.5	转置算子和伴随算子	(206)
补充4.6	符号 $O(\ \delta m\)$	(210)
补充4.7	梯度和最速上升方向	(214)
补充4.8	什么是代数重建法?	(226)
	第四章的问题	(262)
第五章	最小绝对值(l_1范数)准则和极小极大(l_∞范数)准则	(271)
5.1	l_p 范数	(272)
5.1.1	加权 l_p 范数的定义	(272)
5.1.2	l_p 空间的对偶空间	(273)
5.1.3	解反演问题的 l_p 范数准则	(280)
5.2	求解反演问题的 l_1 范数准则	(283)
5.2.1	线性问题	(283)
5.2.2	非线性问题	(288)
5.3	l_1 范数准则和最速下降法	(291)
5.3.1	梯度和最速上升方向	(292)
5.3.2	算法	(293)
5.4	l_1 范数准则和线性规划方法	(295)
5.4.1	FIFO方法	(395)
5.4.2	FIFO算法	(300)
5.4.3	应用于非线性问题	(302)
5.5	利用Cauchy概率密度的健全性反演	(308)
5.6	求解反问题的 l_∞ 范数准则	(312)
5.7	l_∞ 范数和最速下降法	(315)
5.7.1	梯度和最速上升方向	(315)
5.7.2	算法	(316)
5.8	l_∞ 范数准则和线性规划方法	(316)
补充5.1	l_p 范数空间内最速上升方向和梯度	(277)
补充5.2	多维指数概率	(288)
补充5.3	线性规划中的单纯形法	(302)

补充5.4 利用线性规划的 l_1 范数极小化	(305)
补充5.5 Cauchy概率密度	(311)
补充5.6 线性规划中的对偶问题	(318)
补充5.7 线性规划中的松弛变量	(320)
附录5.1 l_p 范数极小化的牛顿步长	(322)
附录5.2 l_p 范数的梯度法	(323)
第五章的问题	(336)

第二部分 一般反演问题

第六章 一般问题	(352)
6.1 函数空间的随机过程	(353)
6.1.1 随机函数的描述	(353)
6.1.2 计算概率	(356)
6.1.3 协方差函数可给出随机函数的方便描述吗?	(361)
6.1.4 一般随机过程	(362)
6.2 一般反演问题的解	(364)
补充6.1 作为对偶空间上标积的协方差算子	(357)
补充6.2 柱测度	(358)
补充6.3 Backus的贝叶斯观点 (1970)	(365)
第七章 泛函空间中的最小二乘准则	(368)
7.1 协方差算子和适用空间	(369)
7.1.1 线性空间的对偶空间的表示	(369)
7.1.2 协方差算子的定义	(370)
7.1.3 协方差函数以及与之相关的随机实现的某些例子	(373)
7.1.4 随机实现的功率谱等于相关函数的振幅谱	(380)
7.1.5 加权算子、标积和“最小二乘”范数	(382)
7.1.6 最小二乘范数和 L_2 范数的关系	(386)
7.2 泛函空间的微商算子和转置算子	(386)
7.2.1 微商算子	(386)
7.2.2 转置算子	(396)

7.3 一般最小二乘反演	(410)
7.3.1 线性问题	(410)
7.3.2 非线性问题	(411)
7.3.3 可线性化问题	(412)
7.4 求解方法	(413)
7.5 实例: x 射线层析成象的反演问题	(418)
7.5.1 迭代解	(420)
7.5.2 牛顿非迭代解	(426)
7.6 实例: 声波波形反演	(429)
7.7 误差与分辨分析	(438)
7.7.1 误差分析	(439)
7.7.2 分辨分析	(440)
7.7.3 分辨核与后验协方差函数的实际计算	(444)
7.8 形式上的实例	(444)
补充7.1 微商算子的转置和伴随	(402)
补充7.2 Backus—Gilbert方法	(414)
补充7.3 一阶Born和Rytov近似	(435)
附录7.1 空间和算子: 基本定义和性质	(455)
附录7.2 常用泛函空间	(470)
第七章的问题	(475)
参考文献	(530)

第一章 一般离散反演问题

针对正确问题的近似答案，即使往往是模糊的，也要比针对错误问题所能精确得到的确切答案要好得多。

J.W.Tukey, 1962.

本章的中心内容是一组参数集的“信息状态”这一概念。假定，描述一参数集信息状态最普遍的方法是在相应参数空间中定义一概率密度函数，于是，可观测参数的测量结果（数据），模型参数的先验信息，以及可观测参数与模型参数间物理上相关联的信息均可用概率密度来描述。因而，一般反演问题可视为所有这些“组合”的问题。由这里提出的观点，反演问题的求解以及误差和分辨率的分析，可由完全非线性方法来完成（但也许要化长得惊人的计算时间）。一般场合下，该方法的结果可化简为更常规方法的结果。后面各章的所有结果均可由本章的论证证明为合理的。

1.1 模型空间和数据空间

设所研究的物理系统为 S 。譬如， S 对天文学家来说可能为一星系，对地球物理学家来说可能为地球，对量子物理学家来说可能为一量子。

研究一物理系统的科学过程可划分为（相当人为的）如下3个步骤：

i) 系统的参数比：寻求最小数目的模型参数，其数值可完全描述系统特征（从一给定观点出发）。

ii) 正演模拟：寻求物理定律，由所给的模型参数值预测可测参数的测量结果。

iii) 反演模拟：用可测参数的某些实测结果推断模型参数的真值。

这些步骤间存在着强反馈作用，其中某一步骤的惊人进展往往会导致其余两步骤的进展。

前两步骤主要为归纳法，第三步骤则主要为演绎法。这意味着在前两步骤我们所沿用的假定和思想方法难以用显式表达。相反，逻辑数学理论（由概率论实现）似乎相当好地适用于第三步骤。该步骤为本书所致力探讨的问题。

1.1.1 模型空间

一般来说用以描述一个系统的模型参数的选择是不唯一的。

例1 为描述固体的弹性性质，可用每一点 X 上将应力 $\sigma^{ij}(x)$ 和应变 $\varepsilon^{ij}(x)$ 联系起来的弹性刚度张量 $c^{ijkl}(x)$

$$\sigma^{ij}(x) = c^{ijkl}(x) \varepsilon^{kl}(x)$$

另一方面，也可用将应变和应力联系起来的弹性柔度张量 $s^{ijkl}(x)$

$$\varepsilon^{ij}(x) = s^{ijkl}(x) \sigma^{kl}(x)$$

其中张量 s 为 c 的逆：

$$c^{ijkl} s^{klmn} = \delta^{im} \delta^{jn}$$

运用刚度或是运用柔度完全等价，并不存在“固有的”选择。

模型参数特定的选择称为系统的参数化。如果两种不同的参数化是以双射相联系，那么它们是等价的。

可以不依赖于任何特定的参数化方法而引进一个点的抽象空间集合，每个点表示系统的一想象的模型。该空间称为模型空间并以 $\mathcal{M}$ 来表示。

为了对系统进行定量地讨论，须选用一特定的参数化方法。定义一参数化方法意味着定义一组实验过程，从而能够测定（至少在理论上）系统的不同特征。一特定的参数化方法一旦选定，模型空间中的每一点将与一组数值相联系，用 M 空间的一点来表示， M 同构于 R^n 的一个部分（ R 表示实线， n 为参数的个数）。模型空间 $\mathcal{M}$ 被本征地定义，而 M 空间则取决于所选择的具体参数化方法。

从数学观点来看， $\mathcal{M}$ 为一（非线性）流形，而 M 则为 $\mathcal{M}$ 的一

个图。

例2: 当一核爆炸发生于地球表面时, 它产生在地球内部传播的地震波。因而可用一些地震台站的波到时估计爆炸的位置。于是, 一个“模型”为爆炸的一个特定位置, 亦即地表的一个几何点。模型空间 N 可用一单位球的球面来表示 (图1.1左)。模型空间就被本征地定义了, 即并没有参照任何特定的坐标系。然而, 为了进行数值计算, 有必要将模型空间的每个点用给定的坐标系中坐标来表示。对模型空间定义一坐标系就是给出模型空间的一个图 M 。于是每个模型相应于 R^2 中的一部分的一个点 (图1.1右)。本例中“图”这个词还可视为原来字面上的意义。经引伸后, 数学家们将 n 维非线性流形和 R^n 的一部分间的任何“映射”均称作“图”。模型空间的一个映象也经常被称为“模型空间”, 这是语言上的误用。这种误用唯一的不便在于, 它将导致这样的印象, 似乎模型空间必须是线性空间, 但一般来说并非如此。在此特例中, 可为模型空间引入一个任意两点间的距离的概念 (它既可为连接球面两点穿过球的直线段的欧几里德长度, 亦

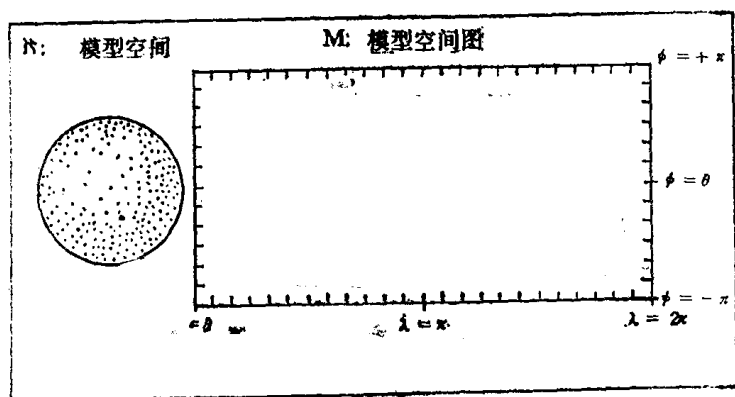


图1.1 模型空间 N 一般为一非线性流形 (左图)。为进行数值计算, 我们引入流形的图 (右图)。用不严格的词语表达, 仍称其为“模型空间” (见正文的讨论)

可为连接球面两点大圆弧的长度)。这属一特例而并非普通规律。对于一般的模型空间，不可能以这么自然的方式引入距离的概念。

对微分流形理论感兴趣的读者可参考Lang (1962)、Narasimhan (1968)或Boothby (1975)等人的著作。

我们已知道模型空间 $\mathcal{M}$ 的图 M 与 R^n “同构”。 n 维的图与 R^n 的差别在于， R^n 的每个点为一组纯实数，即无量纲的量。相反，图 M 的每个点为给定物理量纲（压强、温度、电量……）的 n 个值。

$\mathcal{M}$ 的每个点、或 M 的相应的点，被称为一个模型，并以 m 表示。

给定一模型空间 $\mathcal{M}$ 。如果能不致于引起混乱，则用非严格的说法，该空间的一个特定的“图”仍被称之为“模型空间”。这相应于反演问题文献中的传统叫法。

完全地描述一个系统所需模型参数的数目既可是有限的，亦可是无限的。

例3 例1中若固体的弹性性质逐点变化，那么，为了完全描述该系统，我们就需要无限个值。若固体为均匀的（即弹性参数的值不依赖于 x ），那么，21个参数就足以对它全面描述。

令 m^a 代表（一组有限或无限的参数中）一特定的参数。参数 m^a 的取值可为离散的或连续的。例如，若 m^a 表示太阳的质量，则可先验地假定它可取零至无穷的任何值；若 m^a 表示量子的自旋，可先验地假定它仅能取离散的值。以后我们将会看到，通过“ δ 函数”的运用，就可以将离散参数视为连续参数的特殊情况。为简化讨论，本书所用的术语均相应于假定所考虑的参数取其连续值。如在个别问题中不是这种情况的话，读者很容易作出相应的修改（见问题1.3和1.4）。

无限维空间理论比有限维空间理论需要更多的技术词汇。在下文，即本书的第一部分，假定模型空间是有限维的。按照数学的观点，将系统限制为有限个参数是相当苛刻的，因为函数领域（即使是连续的）比有限维空间领域广泛得多。但是，只要在一些问题中我们能够承认所考虑的函数是有限带宽的，则总可考

虑对这些函数的采样。在这种情况下，对反演问题理论来说，函数方法和离散方法所得的结果没有差别（但是，数值方法可能差别很大，如对比问题1.2和7.1即可发现）。

当系统的特定的参数化方法选定之后，每个模型可用一组特定的模型参数值来表示：

$$m = \{m^\alpha\} \quad (\alpha \in I_M) \quad (1.1)$$

其中 I_M 为一组有限个离散角标值。只要 S 的一个特定的参数化方法可视为对 $\mathcal{X}$ 选择坐标线，变量 m^α 即可称为 m （相对于给定出坐标线）的坐标值。

根据我们新定义的术语，下列提法为等价的：

- i) 对物理系统 S 参数化，
- ii) 对模型空间 $\mathcal{M}$ 定义一坐标系，
- iii) 定义 $\mathcal{M}$ 的一个图 M

根据定义， $\mathcal{M}$ 的图与 R^n 同构。一个特例是图为线性（向量）空间。那么，对给定的图 M 就可定义两模型 m_1 与 m_2 之和为其“分量”之和

$$(m_1 + m_2)^\alpha = m_1^\alpha + m_2^\alpha \quad (\alpha \in I_M) \quad (1.2)$$

模型与一实数相乘为与其“分量”相乘，

$$(rm)^\alpha = rm^\alpha \quad (\alpha \in I_M) \quad (r \in R) \quad (1.3)$$

这表明称坐标 m^α 为“分量”是合乎道理的。然而，应该强调，上述定义并非是本征的，因为这样定义的和或积依赖于 S 的参数化方法。一般来说给出 $m_1 + m_2$ 或 rm 的本征定义是不可能的，因模型空间 $\mathcal{M}$ 一般情况下并非线性空间。

例4 例1中的均匀固体可用21个弹性刚度系数 c^{ijkl} 或21个弹性柔度系数 s^{ijkl} 来描述。设 m_1 和 m_2 表示两不同的弹性固体，他们可用 c_1^{ijkl} 和 c_2^{ijkl} 或者 s_1^{ijkl} 和 s_2^{ijkl} 来表示。由 $c_1^{ijkl} + c_2^{ijkl}$ 定义的弹性体与 $s_1^{ijkl} + s_2^{ijkl}$ 所定义的弹性体不同。两模型的和不能被本征地定义。

事实上，反演理论完全可不用参照任一特定的参数化方法而发展起来。下面我们将会看到，为了处理反演问题最普遍的公式，

唯一要确定的数学目标是模型空间的测度（积分意义下的）。 $\mathcal{A}$ 的测度为一映射。它把 $\mathcal{A}$ 任一子集 A 与一正实数相联系。

$$A \rightarrow P(A) \in \mathbb{R}^+$$

称为 A 的测度。一般 $P(\mathcal{A})=1$ ，且此测度称为 $\mathcal{A}$ 上的概率。从理论上讲，该测度可与 $\mathcal{A}$ 的任何参数化方法无关地定义，即是说，不依赖于任何特定的图。但是，一特定的图 M 一旦选定，那么，就非常容易用概率密度法描述概率。

实际应用中，我们遇到的总是一特定的参数化方法。该方法一经选定，我们既可忽略抽象的模型空间与其图的细微差异，而称后者为模型空间，即可忽略线性向量结构为非本征的，并进行计算。

对一物理系统定义参数化时，曾谈到须定义一些参数以便于“至少在理论上”可以度量。下面的例子说明了这一点。

例5 地球金属核的半径可“实验性地”定义为地球内这样一个球体的半径，在该球体内矿物成分大部分是金属。我们知道如何确定给定样品的化学成分。钻一（相当）深的孔并分析得到的样品，就“足以”测量地球核的半径。“核半径”这一参数就这样很完善地被定义了下来，尽管仅仅在理论上为可测的。运用物理定律我们可预测到达核表面的地震波的特性。在地表可直接观测到衍射——反射波。于是，反演理论可使我们得到核半径的信息。

1.1.2 数据空间

为得到模型参数的信息，我们须在一物理实验过程中进行一些观测。也就是说，我们须对一些可测参数进行测量。

例6 如例5中所讨论的，对一个兴趣在于地球物理深部构造的地球物理学家来说，观测量可能为在地表记录的一组地震图。

例7 对一个粒子物理学家来说，观测量可能为入射粒子流在靶上沿不同角度散射的通量。

实验者的任务是困难的，这不仅由于他必须尽可能地测量得

准确,更重要的是,他必须设想新的实验方法使得他所观测的量携带模型参数的最大限度的信息。例如:确定船长的年龄可能很容易(例如,可通过偷窃他的护照),但是很少有这样的机会,这种测量会携带船上桅杆数目的许多信息。

与模型参数的情况一样,实验设备给定后选择可测参数时仍有一定的自由度。

例8 对于一地震仪,我们可以选择正比于地动位移、速度或加速度的电压信号作为它的“输出”。

于是,我们得到了数据空间的抽象概念。它可定义为所有可能的仪器响应所组成的空间。每个特定的实现用 d 来表示。当“可测参数”一经选定后(如例8),数据空间的一个图,以 D 表示。用不太严格的语言描述,仍称其为“数据空间”。任一可能的测量结果可写成“分量”。

$$d = \{d^i\} \quad (i \in I_D) \quad (1.4)$$

其中 I_D 表示一组离散的(且有限的)角标。通过定义

$$(d_1 + d_2)^i = d_1^i + d_2^i \quad (i \in I_D) \quad (1.5)$$

$$(rd)^i = rd^i \quad (i \in I_D) \quad (r \in R) \quad (1.6)$$

则 D 为线性空间。于是,每个向量 d 被称为数据向量,或数据组。

1.1.3 联合空间 $D \times M$

有时引入积空间 $X = D \times M$ 是很有用的。其元素为一对 $x = (d, m)$ 。由于 d 的元素叫做观测参数, m 的元素叫做模型参数,因而 x 的元素可叫做物理参数,或简称为参数。 X 空间于是被称为参数空间。

X 可被直观地理解为还包括测量仪器本身的广义物理系统 S 。这个空间比 D 和 M 要基本得多。事实上,许多问题中将 X 分离为数据空间和模型空间可能是随意的。

x 的分量可视为参数空间的坐标。我们可通过如下双射任意地定义另一坐标系:

$$x^* = x^*(x) \quad x = x(x^*) \quad (1.7)$$

这样的坐标系称为等价的。在1.2.3节我们将假定坐标系是最小的。

m 的分量用希腊字母 $\alpha, \beta, \dots$ 来表示, d 的分量用小写拉丁字母 $i, j, \dots$ 表示。 x 的分量在必要时用大写拉丁字母表示:

$$x = \{x^A\} \quad (A \in I_x) \quad (1.8)$$

1.1.4 符号

处理离散反演问题的作者往往用到列矩阵记法表示模型空间或数据空间的元素:

$$m = \begin{pmatrix} m^1 \\ m_c \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

本书中,“向量”一词总是意味“线性向量空间的元素”,从不认为向量自然表示为一列矩阵。

例9 如离散的模型相应于二元函数 $f(x, y)$ 的离散化,很自然地,模型空间的元素可表示为:

$$m = \begin{pmatrix} m^{11} & m^{12} & \dots \\ m^{21} & m^{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x^1, y^1) & f(x^1, y^2) & \dots \\ f(x^2, y^1) & f(x^2, y^2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

因而,角标组 I_M 为 $N \times N$ (即一组整数对)。这种场合下,二维(数组即矩阵)可方便地表示模型,而将 m 的分量排成一列矩阵却很不直观(在数值计算中向来也不需要)。

如果向量的分量须显式表达,则采用如下抽象的记法:

$$m = \{m^\alpha\} \quad (\alpha \in I_M)$$

$$d = \{d^i\} \quad (i \in I_D)$$

以上两式中并未假定任何特定的排列方式。

例如,令 G 表示从 M 到 D 的线性算子。我们写作:

$$d = Gm \quad (1.9a)$$

既然G将两离散空间联系起来，可以看出存在着常数 G^{ia} ($i \in I_D$) ($a \in I_M$)使得线性方程(1.9a)可写为，

$$d^i = \sum_{a \in I_M} G^{ia} m^a \quad (i \in I_D) \quad (1.9b)$$

像G那样的线性算子的分量一般可用多维数组（不要求一定为“矩阵”）表示。

例10 对于上例中的模型空间，有

$$d^i = G^{i11} m^{11} + G^{i12} m^{12} + \dots$$

其中，角标i可依次为多维的。

当然，只要m和d的分量个数为有限的，我们即可将其重排为列矩阵，像G那样的线性算子可用一般的二维矩阵来表示。但是，这样作的唯一效果一般是破坏了问题的所有对称性，并且引进了矩阵的运算。在这些问题中，稍微抽象一些的代数即可简化记号和运算（例如，见问题1.2）。作为一个固有的术语，表示线性算子的常数数组应叫做算子的核，不能与算子本身等同起来。算子是更基本的概念（对一给定的线性算子，不同的核有如不同的基那么多，而基可在相应的线性空间中选择）。

令 ϕ^a （或 ψ^i ）为常数使得 $\sum m^a \phi^a$ （或 $\sum d^i \psi^i$ ）有意义（尤其是物理量纲的一致性），并给定一（无量纲的）实数。定义

$$m^t = \sum_{a \in I_M} m^a \phi^a \quad (1.10a)$$

$$d^t \psi = \sum_{i \in I_D} d^i \psi^i \quad (1.10b)$$

在第4章和第5章， ϕ （或 ψ ）被视为M（或D）的对偶空间的元素。

给定方程(1.9)的线性算子G，将模型空间映射到数据空间，用 G^t 表示G的转置，它为由下面恒等式定义的线性算子

$$m^t (G^t \psi) = (Gm)^t \psi \quad (1.11a)$$