LM
朗曼专题

北京朗曼教学与研究中心教研成果

• 学科专题研究系列丛书 •

主编 曾宪安

数学专题研究

ShuXueZhuanTiYanJiu

总主编 宋伯涛

方程与不等式

中国青年出版社

北京朗曼教学与研究中心资料

方程与不等式

主编 曾宪安

中国青年出版社

责任编辑:李 培 广
封面设计:Paul Song

方程与不等式

主编　曾宪安

*

中国青年出版社出版 发行
社址:北京东四12条21号　邮政编码:100708
三河欣欣印刷有限公司印刷　新华书店总经销
*
850×1168　1/32　3.875印张　110千字
2001年8月北京第1版　2001年8月北京第1次印刷
定价:5.00元
ISBN 7-5006-4566-X/O・33

敬告读者

《学科专题研究》系列丛书为作者精心之作，作者值此出版之际向全国千百万热心读者深表谢意。

本书读者如有疑难问题，可来信与我们联系，本中心将本着为读者服务及负责的精神，及时帮助你排忧解难，与你共同切磋，共同研究，携手共勉，建立友谊。

作者声明：《学科专题研究》系列丛书为北京朗曼教学与研究中心专项研究成果，请读者认准封面上“朗曼专题”、“北京朗曼教学与研究中心教研成果”等字样，以防假冒。凡以《朗曼专题》及“宋伯涛总主编”名誉出版的任何其它版本均为侵权行为。

作者声明：凡与本书内容雷同的任何其它版本，均为盗版物。保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现盗版，请及时来信告诉我们，我们将根据有关法律及规定对盗版者和非法买卖盗版书的个人及单位作出严肃处理。本书在全国各地均有销售，也可来信与我们联系。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局 100101—89 号信箱北京朗曼教学与研究中心宋伯涛收，邮编 100101。
本中心 E-mail：SPTJWLSQ@163bj.com

出 版 前 言

展望二十一世纪教育发展的未来，必将是以学生素质全面发展为前提，通过减轻学生过重的学业负担，还学生一个宽松的、有更多自由选择、自主学习的发展空间。从而做到有效地培养学生的创新意识和实践能力。这将是教育改革的一种必然趋势。为此，国家教委进行高考课程改革，推广试用新教材。在这种情况下，我们的助学用书如何适应这一变化，并与素质教育的要求相匹配呢？基于这样的思考与愿望，我们按照新教材的体系，将新教材中有关章节的内容有机组合，编写一套既相互联系，又自成体系的《数学专题研究》系列丛书。

本丛书共13分册，分别为：1. 集合与简易逻辑；2. 函数及其性质；3. 数列、极限、数学归纳法；4. 三角函数；5. 向量；6. 方程与不等式；7. 排列、组合和概率；8. 直线、平面、简单几何体；9. 直线与二次曲线；10. 怎样解高中数学选择题；11. 怎样解高中数学应用题；12. 高中数学解题方法集锦；13. 高中数学重点问题详析。

本丛书在编写过程中，始终坚持以高中新教材为基础、以高考的内容和要求为主线、还兼顾拓展学生视野和进行强化训练，并有意识地引导学生亲历“做数学”的过程，并且最终得出结论。因为，与具体的知识、技能相比，探索知识的过程有利于开发学生的潜能。也可以这样说，本丛书在数学教学《大纲》的基础上，本着源于教材且高于教材的要求进行编写，并以典型常规题、创新开放题及实践应用题为线索，进行精析和指导，并且坚持了以学生为主体，以学生能力发展为根本的理念，便于学生展开自学和自练。

本丛书使用的数学符号以新教材为准，在知识点的归类讲解与拓展方面兼顾了两套教材，并在书后附上新教材与统编教材中相异数学符号对照表，供读者对照使用。

由于作者水平有限，且时间仓促，书中难免存有不尽人意之处，敬请广大读者不吝指教。

宋伯涛

2001年8月于北师大

目　录

方程(一)——一元二次方程

【基本知识】

1. 序：关于方程这部分内容，大家在初中学习了方程中的一元一次方程、一元二次方程、分式方程、无理方程及其解法，鉴于一元二次方程处于其它方程的基础地位，在高考中也扮演着重要的角色，因此本节主要论述一元二次方程的有关内容.

2. 一元二次方程的概念

①只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程，叫做一元二次方程.

②一元二次方程的一般形式为：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

3. 一元二次方程的解法：

解一元二次方程，通常有四种解法：开平方法、配方法、求根公式法和因式分解法. 其中开平方法和因式分解法是特殊方法，而配方法和求根公式法是一般方法，对于任何一元二次方程都可以使用. 解题的关键是要根据方程系数的不同特点及方程的不同形式，选用适当的方法，使解法简便. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式为：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant 0)$.

4. 一元二次方程的根的判别式定理

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

(1)当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

(2)当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

(3)当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根.

5. 一元二次方程的根与系数的关系——韦达定理.

(1)韦达定理：如果方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个根是 x_1,x_2，那么 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

(2)韦达定理的逆定理：

以两个数 x_1,x_2 为根的一元二次方程(二次项系数为 1)是 x^2

$-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$. 一般地，如果有两个数 x_1,x_2 满足

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

那么 x_1,x_2 必定是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个根.

(3)更一般的结论及说明：

如果一元 n 次方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0=0$ 在复数集中的根是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，那么

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \qquad\cdots\cdots, \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\cdot\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

法国数学家韦达最早发现代数方程的根与系数之间有这种关系，因此，人们把这个关系称为韦达定理. 历史是有趣的，韦达在16世纪就得出这个定理，证明这个定理要依靠代数基本定理，而代数基本定理却是在1799年才由高斯作出第一个实质性的证明.

6. 一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，由二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的图象和性质我们不难得出以下结论：

(1)方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$在区间(α,β)上有两个实根的充要条件是

$$\begin{cases} \Delta=b^2-4ac\geqslant 0 \\ f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c>0 \\ f(\beta)=a\beta^2+b\beta+c>0 \\ \alpha<-\dfrac{b}{2a}<\beta. \end{cases}$$

(2)方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$在区间(α,β)内有两个相异实

根中的一个的充要条件是 $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

(3)方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的两实根都在区间 (α,β) 外的充要条件是

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\geqslant 0\\ f(\alpha)\geqslant 0\\ -\dfrac{b}{2a}\leqslant\alpha;\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\geqslant 0\\ f(\beta)\geqslant 0\\ -\dfrac{b}{2a}\geqslant\beta.\end{cases}$$

或 $\begin{cases}f(\alpha)<0\\ f(\beta)<0\end{cases}$

(4)已知方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个相异实根为 x_1,x_2,且 $n<x_1<m,m<x_2<p$ 的充要条件是

$$\begin{cases}a>0\\ f(n)>0\\ f(m)<0\\ f(p)>0;\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}a<0\\ f(n)<0\\ f(m)>0\\ f(p)<0.\end{cases}$$

(5)已知方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有一正根,一负根的充要条件是 $ac<0$.

注:对于方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根是区间端点的情况,略.

【典型例题】

例 1 解关于 x 的方程:

$(m-1)x^2+2mx+(m+3)=0$.

解:当 $m=1$ 时,原方程化为 $2x+4=0$,

$\therefore x=-2$.

当 $m\neq 1$ 时,原方程是关于 x 的一元二次方程.

$$\begin{aligned}b^2-4ac&=(2m)^2-4(m-1)(m+3)\\&=4(3-2m).\end{aligned}$$

①当 $m<\dfrac{3}{2}$ 且 $m\neq 1$ 时,$b^2-4ac>0$,

有 $x_{1,2}=\dfrac{-2m\pm\sqrt{4(3-2m)}}{2(m-1)}$,

$\therefore x_1=\dfrac{-m+\sqrt{3-2m}}{m-1},x_2=\dfrac{-m-\sqrt{3-2m}}{m-1}$.

②当 $m=\frac{3}{2}$ 时，$b^2-4ac=0$，$x_1=x_2=-3$.

③当 $m>\frac{3}{2}$ 时，$b^2-4ac<0$，原方程没有实数根.

例 2 若 $3x^2-x=1$，求多项式 $6x^3+7x^2-5x+1997$ 的值.

解：由已知，得 $3x^2-x-1=0$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad &6x^3+7x^2-5x+1997\\&=2x(3x^2-x-1)+3(3x^2-x-1)+2000\\&=2000.\end{aligned}$$

说明：由已知条件 $3x^2-x=1$，知多项式里 x 的值是一元二次方程 $3x^2-x-1=0$ 的实数根，但并不直接求出 x 的值，而是整体思想的方法求值，过程简便！

例 3 求满足如下条件的所有 k 的值：使关于 x 的方程 $kx^2+(k+1)x+(k-1)=0$ 的根都是整数.

解：①当 $k=0$ 时，原方程即为 $x-1=0$，此时方程有整数根 1.

②当 $k\neq0$ 时，关于 x 的方程为二次方程，依题意，设它的两个整数根为 x_1，x_2，则

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{k+1}{k}, & ①\\[2mm] x_1x_2=\dfrac{k-1}{k}. & ②\end{cases}$$

①－②，得：

$x_1+x_2-x_1x_2=-2$.

$\therefore(x_1-1)(x_2-1)=3$.

又 x_1，x_2 均为整数，

$$\therefore\begin{cases}x_1-1=1,\\x_2-1=3;\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_1-1=-1,\\x_2-1=-3;\end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases}x_1-1=1,\\x_2-1=3;\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_1-1=-1,\\x_2-1=-3.\end{cases}$$

$\therefore x_1+x_2=6$，或 $x_1+x_2=-2$.

将它们分别代入①，即得

$k=-\frac{1}{7}$ 或 $k=1$，

又 $\Delta=-3k^2+6k+1$，

当 $k=-\frac{1}{7}$ 或 $k=1$ 时，均有 $\Delta>0$.

故满足要求的 k 的值为 $0,-\frac{1}{7}$ 或 1.

例 4 设 $f(x)=(x-2k)^2, x\in I_k, I_k$ 表示区间 $(2k-1,2k+1)$，对于自然数 k，求集合

$M_k=\{a\mid$ 使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实数根$\}$ (1989 年全国高考理科题改编).

解：当 $k\in N$ 且 $x\in I_k$ 时，方程 $f(x)=ax$，即 $(x-2k)^2=ax$，整理得 $x^2-(4k+a)x+4k^2=0$，因为此方程在区间 $(2k-1,2k+1]$ 内有两实根，令 $\varphi(x)=x^2-(4k+a)x+4k^2$ 由 6 中结论(1)，得

$$\begin{cases}\Delta=(4k+a)^2-16k^2>0 & ①\\ \varphi(2k-1)>0 & ②\\ \varphi(2k+1)\geqslant 0 & ③\\ 2k-1<\dfrac{4k+a}{2}<2k+1 & ④\end{cases}$$

①的解为 $a>0$ 或 $a<-8k$；

②的解为 $a<\frac{1}{2k-1}$；

③的解为 $a\leqslant\frac{1}{2k+1}$；

④的解为 $-2<a<1$.

综上所述，得 $0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}$.

故所求集合为 $M_k=\left\{a\,\middle|\,0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}\right\}$.

注：本题用数形结合法解会更简捷，请大家不妨一试.

例 5 已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实数根 α,β

证明：(1) 如果 $|\alpha|<2,|\beta|<2$，那么 $3|a|<4+b$ 且 $|b|<4$；

(2) 如果 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$，那么 $|\alpha|<2,|\beta|<2$.

(1993 年全国高考理科压轴题).

证：由韦达定理，得 $\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=b$.

(1) 如果 $|\alpha|<2,|\beta|<2$，则 $-2<\alpha<2,-2<\beta<2$，

且 $|b|=|\alpha\beta|<4$.

设 $f(x)=x^2+ax+b$，则由 6 中结论(1)，得

$$\begin{cases}f(2)>0,\\f(-2)>0.\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}4+2a+b>0,\\4-2a+b>0.\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}2a>-(4+b),\\2a<4+b.\end{cases}\quad 故\quad 2|a|<4+b.$$

(2)由 $2|a|<4+b$,得

$$\begin{cases}4+2a+b>0,\\4-2a+b>0.\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}f(2)>0 & ①\\f(-2)>0. & ②\end{cases}$$

由 6 中结论(1)、(3)可知,$f(x)=0$ 的每个实数根或者在区间 $(-2,2)$ 之内或者在 $(-2,2)$ 之外.

若两根 α,β 均落在 $(-2,2)$ 之外,则与 $|b|=|\alpha\beta|<4$ 矛盾;

若 α(或 β)落在 $(-2,2)$ 外,则由于 $|b|=|\alpha\beta|<4$,另一个根 β(或 α)必须落在 $(-2,2)$ 内,则与①,②式矛盾.

综上所述,这 α,β 均落在 $(-2,2)$ 内. $\therefore |\alpha|<2,|\beta|<2$.

注:本题仅用初中知识即可解答.

例 6 集合 $A=\{(x,y)|x^2+mx-y+2=0\}$,

$B=\{(x,y)|x-y+1=0$,且 $0\leqslant x\leqslant 2\}$,

若 $A\cap B\neq\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

解:$\because A\cap B\neq\varnothing$,

$$\therefore 方程组\begin{cases}x^2+mx-y+2=0 & ①\\x-y+1=0, & ②\end{cases}$$

在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 中有解.

由①,②得 $x^2+(m-1)x+1=0$.

设 $f(x)=x^2+(m-1)x+1$,则有 $f(0)=1>0$.

(1)若 $f(x)=0$ 在 $[0,2]$ 内有且仅有一个解,则由 6 中结论(2),得

$f(2)<0$,即 $4+2(m-1)+1<0$.

解得 $m\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)$;

(2)若 $f(x)=0$ 在 $[0,2]$ 内有两个根,则由 6 中结论(1),得

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\0\leqslant-\dfrac{m-1}{2}\leqslant 2,\\f(2)\geqslant 0.\end{cases}\quad 即\begin{cases}m\geqslant 3 或 m\leqslant -1\\-3\leqslant m\leqslant 1\\m\geqslant-\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

解得 $m\in\left[-\frac{3}{2},-1\right]$

由(1),(2)知,$m\in(-\infty,-1]$.

【巩固性训练题】

一、选择题:

1. 方程 $3x^2-4\frac{n}{m}x+\frac{n^2}{m^2}=0$ 的根为 ( )

(A)$\frac{n}{3m},\frac{n}{m}$ (B)$-\frac{n}{3m},-\frac{n}{m}$

(C)$\frac{3n}{m},\frac{n}{m}$ (D)$-\frac{3n}{m},-\frac{n}{m}$.

2. 若 a,b,c 为$\triangle ABC$的三边,且方程 $4x^2+4(a^2+b^2+c^2)x+3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=0$ 有两个相等的实根,则$\triangle ABC$一定是 ( )

(A)直角三角形 (B)等腰直角三角形

(C)等边三角形 (D)非等腰三角形.

3. 若方程 $x^2+px+1=0(p>0)$的两根之差为1,则 p 等于 ( )

(A)2 (B)4 (C)$\sqrt{3}$ (D)$\sqrt{5}$.

4. 已知 b,c 是满足 $c>b>0$ 的整数,方程 $x^2-bx+c=0$ 有两个不相等的实根 x_1 和 x_2,在 $P=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$,$Q=x_1^2+x_2^2$,$R=(1+x_1)(1+x_2)$的值中,最大和最小的分别是: ( )

(A)P,R (B)Q,R (C)Q,P (D)R,P.

5. 方程 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0(k\in R)$有两个实根 α,β,且 $0<\alpha<1,1<\beta<2$,那么 k 的取值范围是 ( )

(A)$3<k<4$ (B)$-2<k<-1$

(C)$3<k<4$ 或 $-2<k<1$ (D)无解.

6. 将 a 元钱存入银行 n 年(n 为正整数),每年的存款年利率都为 x,那么到期后取出存款,包括利息共应得款 ( )

(A)$(1+x)^n$ 元 (B)$a(1+x)^n$ 元

(C)$a(1+x)^{n-1}$元 (D)$a(1+x)^{n+1}$元.

二、填空题：

1. 已知 $x=\frac{\sqrt{3}-2}{3}$，那么多项式 $9x^3+21x^2+13x+4$ 的值等于________.

2. 若对于任何实数 a，关于 x 的方程 $x^2-2ax-a+2b=0$ 都有实数根，则实数 b 的取值范围是________.

3. 已知关于 x 的方程 $4x^2+4(k-1)x+k^2=0$ 和 $2x^2-(4k+1)x+2k^2-1=0$，它们都有实数根，则实数 k 的取值范围为________.

4. 已知 α 是方程 $x^2-x-1=0$ 的一个根，则 $\alpha^{12}+\alpha^{-12}=$________.

三、设 a,b,c 为实数，且 $a\neq c$，若关于 x 的方程 $(a^2+b^2)x^2+2b^2x+4(a^2+c^2)=0$ 有两个实根，试证方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有两个不相等的实根.

四、设实数 s,t 分别满足 $19s^2+99s+1=0$，$t^2+99t+19=0$，并 $st\neq 1$，试求 $\frac{st+4s+1}{t}$ 的值.

五、已知 a,b 为整数，且 $a>b$，方程 $3x^2+3(a+b)x+4ab=0$ 的两根 α,β 满足关系式 $\alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)=(\alpha+1)(\beta+1)$，试求所有的整数点对 (a,b).

六、若抛物线 C_m：$y=x^2-mx+m+1$ 与线段 AB（其中 $A(0,4)$，$B(4,0)$）恰有两个交点，求 m 的取值范围.

七、已知 $0<a<1$，$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，且 $x=a^\alpha+a^\beta$，$y=a^{2\alpha}+a^{2\beta}$. 试在平面直角坐标系中画出点 (x,y) 的区域.

【巩固性训练题答案】

一、1.(A) 2.(C) 3.(D) 4.(C) 5.(C) 6.(B)

二、1. 3 2. $b\leqslant -\frac{1}{8}$ 3. $-\frac{9}{8}\leqslant k\leqslant \frac{1}{2}$ 4. 322

三、证：由方程 $(a^2+b^2)x^2+2b^2x+4(a^2+c^2)=0$ 有两个实根，

$\therefore \Delta_1\geqslant 0$. 得

$(b^2+2a^2+2c^2)(b^2-2a^2-2c^2)\geqslant 0$

$\because a\neq c$，

$\therefore a,c$ 至少有一个不为 0.

$\therefore b^2+2a^2+2c^2>0.$

$\therefore b^2-2a^2-2c^2>0.$

即 $b^2\geqslant 2(a^2+c^2)$.

设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式为 Δ_2,

$$\begin{aligned}\Delta_2&=b^2-4ac\\&\geqslant 2(a^2+c^2)\\&=2(a-c)^2>0\end{aligned}$$

故方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有两个不相等的实根.

四、解:$\because s\neq 0$. $\therefore$ 第一个等式可化为

$$\left(\frac{1}{s}\right)^2+99\,\frac{1}{s}+19=0.$$

$\because st\neq 1$,

$\therefore \frac{1}{s}$, t 是一元二次方程 $x^2+99x+19=0$ 的两个不等的实根.

由韦达定理,得

$\frac{1}{s}+t=-99$, $\frac{t}{s}=19$.

即 $\begin{cases}st+1=-99s\\ t=19s,\end{cases}$

$\therefore \frac{st+4s+1}{t}=s+4$,

$$\frac{s}{t}+\frac{1}{t}=\frac{-99s+4s}{19s}=-5.$$

五、解:据题意,可得 $\alpha+\beta=-(a-b)$, $\alpha\beta=\frac{4}{3}ab$ ①

由 $\alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)=(\alpha+1)(\beta+1)$,得

$(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta=1$, ②

把①代入②,得 $(a+b)^2-4ab=1$,即 $(a-b)^2=1$. ③

又 $a>b$, $\therefore a-b=1$. ④

由判别式 $\Delta\geqslant 0$,得 $3(a+b)^2\geqslant 16ab$ ⑤

将①代入⑤得 $(a+b)^2\leqslant 4$ ⑥

由①,⑥可知,满足条件的整数对 (a,b) 只可能为 $(1,0)$, $(0,-1)$.

六、解:线段 AB 的方程为 $x+y=4(0\leqslant x\leqslant 4)$,把 $y=4-x$ 代入 $y=x^2-mx+m+1$ 得