电磁流体力学

T. G. 柯林著

科学出版社

电磁流体力学

T. G. 柯林 著

唐戈、郭均 譯

科學出版社

196

T. G. COWLING

MAGNETOHYDRODYNAMICS

1957

內容簡介

本书介紹了一門新兴的学科——电磁流体力学，它研究导电流体在磁場中的运动。书中扼要地闡述了电磁流体力学的基本原理，也介紹了它的应用，并特別着重討論了它在天体物理学上的应用。

閱讀本书需要具备电动力学、流体力学和矢量分析的初步知識。

本书可供物理学工作者、天体物理学工作者参考。

电磁流体力学

T. G. 柯林 著

唐戈、郭均 譯

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街117号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第061号
中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1960年8月第一版　书号：2268　字数：77,000
1960年8月第一次印刷　开本：787×1092 1/27
（京）00001—21,000　印张：3 15/27　插页：1

定价：0.42元

序　言

电磁流体力学是一門正在迅速发展的学科．在刚开始动手写这本书的时候，它的主要应用还只限于地球物理学和天文学問題；但在过去一两年內，人們已开始認識到它在工程上的应用了．本书把重点放在地球物理学和天文学的应用上，我希望它的出版能够促进这两門学科的发展．

电磁流体力学假設有一种导电的媒質，它既可以是液体，也可以是电离的气体．如果电离的气体可以看作是連續流体的話，那么两者可以在一个共同的理論中統一討論．这正是本书所正常地假設的情况．电离气体的某些不能采用这个假設的問題，由萊曼·斯必泽(Lyman Spitzer)博士在本丛书[1)]的另一本册子[2)]中討論．

我假設讀者已經具有一些麦克斯韦方程及流体力学基本方程的知識．本书尽量使用矢量方法，包括涉及矢量的旋度和散度的变换及其在柱形极坐标中的表示式．参考书目虽不求其完备，但在每章中也給出了与該章主題有关的几篇最重要的論文．

承蒙皇家天文学会允許我翻印图 4，6，9，10，伦敦皇家学会允許我翻印图 3，11，12，以及“自然”杂志(Nature)的編者允許翻印图 14，在此謹向他們表示衷心的感謝．也得感謝我的几位朋友的协助，特別是薩勿多夫(M. Savedoff)博士，他看过本书的手稿并且提出了改进的建議．

T. G. 柯林

1956 年 11 月于英国里茲

---

1) 指由 R. E. Marshak 主編的 Interscience Tracts on Physics and Astronomy 这一丛书．紐約 Interscience Publishers 出版．——譯者．

2) L. Spitzer: Physics of fully Ionized Gases (中譯本：斯必泽著，左耀等譯，完全电离气体的物理学，科学出版社，1959年)．——譯者．

目　录

第一章 一般概念和簡单应用

1.1 引言

电磁流体力学研究导电流体在磁場中的运动. 由于流体运动而在流体内部感生的电流改变着磁場；与此同时，电流在磁場中流动又产生机械力，后者又改变流体的运动. 电磁流体力学的独特兴趣和困难，就由这种場和运动的相互作用而来.

在寻常实驗室的实驗中，可以看得出这門学科的重要性的一些苗头. 但是，唯有在考虑"宇宙"問題(这里指的是地球內部的問題，太阳、星球和星际空間的問題)的时候，它的重要性才能全部体会得到. 在实驗室里是較为次要的一些現象，一到宇宙問題中就占着支配的地位. 因为宇宙导体的尺度非常巨大，它內部的电流就主要是由自感决定而不由电阻决定. 因为在宇宙問題中有效用的时間很长，所以由电磁原因所引起的机械力虽然不大，却能产生重大的效应. 由于这两个原因，从寻常实驗室的实驗所得出的一些概念，到了宇宙問題中就很容易把人引向歧途.

的确也存在小量的有关电磁流体力学的实驗情报（主要是水銀或液态鈉在磁場中的运动）. 但是由于这些实驗在空間和时間两方面受到的局限，充其量也只能对宇宙問題中将会出現什么事情作一些提示. 在許多方面，对宇宙現象本身的观測必須代替实驗室里的实驗. 当然，在宇宙这样一个大范围內要进行可控制的实驗是不可能的；我們只得滿足于大自然所供給的情报. 因此，如果預先不作一些数学分析，对宇宙的观測結果的解释就不怎么确定，有时甚至不能解释. 因此，我們不得不在很大程度上采取数学途径.

在本书的大部分討論中，都假設所考虑的流体是連續的；对于

构成此流体的单个粒子的性质，则只是通过它們对流体的粘滞性、热导率和电导率的影响才加以考慮。处于磁場中的稀薄电离气体，其电导率是各向异性的；由此而来的对理論的修正，将在第六章中扼要地討論。电子的慣性效应是忽略不計的；因此，等离子体的振盪就不在本书范围之內了。

1.2 方程

电磁流体力学方程就是普通的电磁学方程和流体力学方程，在考虑了运动和磁場之間的相互作用以后，經过修正而成的。正如在許多涉及导体的电磁学問題（但那些与高頻振盪有关的問題除外）中一样，都将麦克斯韦位移电流略而不計。由此而得的一个推論就是，在电荷的連續性方程中，电荷的堆积也要忽略不計，因此应認为电流是在一个閉合迴路中流动[1]。不过这句話并不意味着由电荷堆积所引起的静电效应无关紧要；事实上它們是很重要的[2]。但是，在电荷的連續性方程中，代表电荷密度变化率的那一項，一般是 v^2/c^2（其中 v 是实物的速度，而 c 是光速）的数量級乘上别的項，因此在絕大多数通常的問題中忽略掉这一項是妥当的。

假定所有的电磁变量都用电磁单位制来量度；因此，若 $\mathbf{j}$ 是电流密度，$\mathbf{H}$ 是磁場強度，则有

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{1-1}$$

我們假設物质是非磁性的。在所有的应用中，它的磁导率 μ 都取作 1；但仍将 μ 保留在方程中，以便于变换到别的单位系統。因此，若 $\mathbf{E}$ 是电場強度，则有

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\mu\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right); \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{1-2}$$

---

1) 讀者还会記得，麦克斯韦原来引入位移电流的目的，就是为了使得即使电荷的流动在某处中断（电荷即堆积于此处，例如电容器的极板），也仍然維持电流永远是在一个閉合迴路中流动这一习慣想法。因此，当位移电流被略去时，为了一致起見，作为电荷堆积的自然結果的电流中断也应該忽略不計。

2) 作者的意思就是：我們只能忽略电荷密度变化率，而电荷则不能忽略。——譯者

如果物质具有速度 $\mathbf{v}$，那么它所經受到的电場就是 $\mathbf{E}+\mu\mathbf{v}\times\mathbf{H}$. 因此，若 σ 是电导率，則

$$\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mu\mathbf{v}\times\mathbf{H}). \tag{1-3}$$

若 ρ 是物质的密度，流体力学的連續性方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0. \tag{1-4}$$

在运动方程中出現有一項由电磁原因而产生的彻体力：每单位体积上 $\mu\mathbf{j}\times\mathbf{H}$. 如果其他的彻体力只有一項重力，它产生的加速度(矢量)为 $\mathbf{g}$，則运动方程便是

$$\rho\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)=-\operatorname{grad}p+\rho\mathbf{g}+\mathbf{F}+\mu\mathbf{j}\times\mathbf{H}, \tag{1-5}$$

其中 p 是压強，$\mathbf{F}$ 是每单位体积所受的粘滞力，而 $\frac{d}{dt}$ 是运动算符

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}. \tag{1-6}$$

在液体中 $\mathbf{F}$ 由下式給出：

$$\mathbf{F}=\rho\nu\nabla^2\mathbf{v}, \tag{1-7}$$

其中 ν 是粘滞率. 在某些問題中，特别是在那些涉及大块物質的运动的問題中，可把 $\mathbf{F}$ 从运动方程中略去.

在可压縮的液体或气体中，除了方程(1-4)和(1-5)之外，还应补充一个热学方程. 若 U 是每单位質量的热能，則此方程为

$$\rho\frac{dU}{dt}=\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\epsilon, \tag{1-8}$$

其中 ϵ 代表由热传导、粘滞性和电流流动在每单位体积中所产生的連合生热效应. 在这些因素中，正常地說，以第一項为最重要；因此

$$\epsilon=\lambda\nabla^2T, \tag{1-9}$$

其中 T 是温度，而 λ 是热导率. 方程(1-1)至(1-5)和(1-8)就构成了电磁流体力学的方程組[1].

---

1) 关于电磁流体力学方程組的一个比較完整的推导和討論，以及它們适用的条件，可参看 С. И. Сыроватский: Магнитная Гидродинамика, §1. (УФН, 第 LXII 卷第 3 期, 1957 年 7 月). ——譯者.

1.3 电磁效应

我們首先考虑由这些方程直接得出的电磁方面的推論. 設 σ 在空間中是均匀的；从而由方程(1-1)、(1-2)和(1-3)得

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{curl}(\mathbf{v} \times \mathbf{H} - \mathbf{j}/\mu\sigma)$$

$$= \operatorname{curl}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \eta \nabla^2 \mathbf{H}, \tag{1-10}$$

其中

$$\eta = (4\pi\mu\sigma)^{-1}. \tag{1-11}$$

方程(1-10)給出了磁場随时間的变化.

如果物質是静止的，方程(1-10)变为

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{H}. \tag{1-12}$$

这个方程具有扩散方程的形式；量 η 可以称为磁扩散率. 因此这个方程就表示，磁場会穿过物質由一处"漏"往另一处. 因为在不同地点的方向相反的場漏到一起互相抵消，結果場就会衰減. 由量綱的論証表明，衰減时間的数量級为 $L^2\eta^{-1} = 4\pi\mu\sigma L^2$，其中 L 是一个可与电流流动区域的尺度相比較的长度. 这个結果也被精确理論所証实；例如，一个半径为 a 的均匀球內的場，最长的衰減时間为 $4\mu\sigma a^2/\pi$.

实驗室里的导体，衰減时間是很小的；即使一个半径为 1 米的銅球，其衰減时間也小于 10 秒. 但是对于宇宙导体，由于它的巨大的广延度，衰減时間可以很大. 假設地核是由熔融的鉄組成的，埃耳沙塞(Elsasser)曾算得地球磁場的自由衰減时間为 15,000 年；我曾估計过，太阳黑子的磁場衰減时間至少是 300 年，而太阳整个的磁場，則为 10^{10} 年；銀河系內星际气体中的場，那就更要长得多. 普遍地說，在一个大导体中，磁力綫只能很緩慢地漏过物質.

以上都是当物質静止时的結果. 作为另一种极限情况，我們假設物質在运动，但其电阻可以忽略不計. 于是方程(1-10)成为

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{curl}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}). \tag{1-13}$$

这个关于 $\mathbf{H}$ 的方程和无粘滞流体流动理論中涡旋所满足的方程完全相同；在那个理論中，将这个方程解释为涡綫和流体一起运动．于是方程（1-13）的意义就是，場的变化情况就如同磁力綫被約束在物質上而和物質一起运动一样；事实上，可以証明，穿过一个其每点都以当地速度运动的迴路[1]的总磁感应通量守恒的条件就是方程(1-13)[2]． 这是一件在意料中的事．粗略地說，当物質在磁場中运动时，感应电动势是由物質相对于磁力綫的运动所引起的．旣然在这里电阻可以忽略不計，感应电动势即应为零，因而也就沒有物質相对于磁力綫的运动．用阿耳芬（Alfvén）的話来說，就是磁力綫"冻結"在物質里面了．沿磁力綫的运动并不会影响場；但当物質横越过磁力綫时，就会带着磁力綫一起运动．

当方程(1-10)右边的两項沒有一項可以忽略时，$\mathbf{H}$ 随时間的变化是分別由（1-12）和（1-13）这两个方程給出的两部分之和．于是磁力綫在被运动物質带动的同时，又在物質中瀰散．若再一次令 L 为一个可与場的广延大小相比拟的长度，V 为一个可与实际出現的速度相比拟的速度，則在 $LV \gg \eta$ 时，輸送效应就会超过瀰散效应．与定义雷諾（Reynolds）数 R 的方程

$$R=\frac{LV}{\nu} \tag{1-14}$$

类似，我們可用下面的方程来定义一个"磁雷諾数" R_M：

$$R_M=\frac{LV}{\eta}. \tag{1-15}$$

于是輸运过程超过瀰散的条件为 R_M 比 1 大得多．

在实驗室中，这个条件罕能满足（水銀的 η 約为 8×10^3 厘米²/秒）．但是在宇宙問題中，由于 L 的庞大的尺度，这个条件是很容易满足的． 例如在太阳中，η 的变化范围是从光球的約 10^8 厘米²/秒到太阳中心的 10^2 厘米²/秒，而 L 的数量級为 10^8 厘米，V 的数量級为 10^5 厘米/秒．因此，在实驗室的导体中，力綫很快地

1）即由固定的流体質点組成的物質迴路．——譯者．
2）見斯米尔諾夫："高等数学教程"，卷二，第 120 节．——譯者．

穿过物质散开；而另一方面，在宇宙体中，则瀰散极慢，可以认为磁力綫几乎是冻結在物质中的。

这意味着，虽然在实驗室里，导体中的电流主要是取决于电导率 σ，但在宇宙体中，σ 对电流流动的大小的直接影响则很小。在宇宙体中，σ 的突变将不会使 $\mathbf{H}$ 有多大的变化（对电流也是一样）；它只会影响到方程(1-10)右边的第二項，而这一項比起第一項来要小得多。在实驗室里，因果次序一般是这样：电动势和电导率决定了电流的流动，而电流流动决定磁場。在宇宙体中，这个次序必须倒过来：磁場的变化由方程（1-13）近似地給出；电流则可由方程(1-1)从場定出；而电导率唯一的作用就在于决定产生这个电流所需的（很小的）电动势 $\mathbf{E}+\mu\mathbf{v}\times\mathbf{H}$。因此非常清楚，在把通常实驗室里的概念用到宇宙体上去时必須异常小心。

1.31 冻凝場

现在将一些有关冻結在物质内的磁場的普遍結果收集在这里，以备以后参考。应用連續性方程及 $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$，可将决定磁場变化的方程(1-13)改写成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{H}}{\rho}\right)=\left(\frac{\mathbf{H}}{\rho}\cdot\operatorname{grad}\right)\mathbf{v},\qquad(1\text{-}16)$$

其中 $\frac{d}{dt}$ 是由方程(1-6)定义的运动标符。这个方程［首先由瓦伦(Walén)得到］可以积分，积分出来以后，它就能表明，給定物质内部的运动怎样改变着磁場。但是正如瓦伦所指出的，可以更为直接地看出这个方程的意义。

如果 dS 是一个磁力綫管的法向截面，当这个磁力綫管被物质带动时，它的强度 HdS 必須保持不变。令 dl 为两个相邻截面之間沿着管子量度的距离；当管子被带动时，这些相邻截面之間的质量 $\rho dldS$ 也保持不变。因此在运动中 $H\propto\rho dl$。这就是說，如果运动的效果是使磁力綫伸长，那么它也将增大 $\frac{H}{\rho}$。如果一根磁力綫上相邻两点間的位移向量用 $\epsilon\mathbf{H}/\rho$ 来表示，那么在这些点和

物质一道运动时，ϵ 保持为常数。

設在一段时間后一物质点的位置矢量（即由一个固定原点到这个物质点的位移矢量）由 $\mathbf{r}$ 变成 $\mathbf{r}'$，并且这个物质点的場強和密度分别由 $\mathbf{H}$ 和 ρ 变成 $\mathbf{H}'$ 和 ρ'。于是 $\epsilon\dfrac{\mathbf{H}'}{\rho'}$ 就是 $\mathbf{r}'$ 上的增量，它相应于初始时刻的 $\mathbf{r}$ 上的增量 $\epsilon\dfrac{\mathbf{H}}{\rho}$。因此得

$$\frac{\mathbf{H}'}{\rho'}=\left(\frac{\mathbf{H}}{\rho}\cdot\operatorname{grad}\right)\mathbf{r}' \tag{1-17}$$

这就是方程(1-16)的积分形式。由方程(1-16)直接得出方程(1-17)的推导，已由伦德奎斯(Lundquist)和帕克(Parker)給出。

1.32 磁能

每单位体积磁場具有能量 $\mu H^2/8\pi$。因此总的磁能便是

$$W_H=\frac{1}{8\pi}\int\mu H^2\,d\tau, \tag{1-18}$$

积分是对磁場所占有的体积取的。应用方程(1-10)，得磁能的增加率为

$$\frac{dW_H}{dt}=\frac{1}{4\pi}\int\mu\{\mathbf{H}\cdot\operatorname{curl}(\mathbf{v}\times\mathbf{H})+\eta\mathbf{H}\cdot\nabla^2\mathbf{H}\}\,d\tau. \tag{1-19}$$

但是

$$\begin{aligned}(4\pi)^{-1}\int\mu\eta\mathbf{H}\cdot\nabla^2\mathbf{H}d\tau&=-\eta\int\mu\mathbf{H}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{j}\,d\tau\\&=-\eta\int[\operatorname{div}(\mathbf{j}\times\mu\mathbf{H})+\mu\operatorname{curl}\mathbf{H}\cdot\mathbf{j}]d\tau\\&=-\int(j^2/\sigma)d\tau,\end{aligned}$$

括号[ ]中的第一項，由于格林(Green)定理，在积分时消失[1)]。于是方程(1-19)右边的 η 項就代表磁能以每单位体积 j^2/σ 的速率轉化为焦尔热。

1) 如果場所占有的体积是无穷的，那么应用格林定理后，就将得到一个在无穷大球面上的面积分。我們假設电流密度 $\mathbf{j}$ 在某一个有限体积外为零，就足以保証这个面积分消失。

相似地，方程(1-19)右边的 $\mathbf{v}$ 项为

$$(4\pi)^{-1}\int\{\operatorname{div}[(\mathbf{v}\times\mu\mathbf{H})\times\mathbf{H}]+(\mathbf{v}\times\mu\mathbf{H})\cdot\operatorname{curl}\mathbf{H}\}d\tau$$
$$=-\int\mathbf{v}\cdot(\mathbf{j}\times\mu\mathbf{H})d\tau,$$

和以前一样，散度項在积分时消失. 于是这一項就給出了物質在运动中反抗磁力 $\mathbf{j}\times\mu\mathbf{H}$ 所作的功.

引用麦克斯韦应力，这一項可以非常簡单地解释如下. 由方程(1-1)，我們有

$$\mathbf{j}\times\mu\mathbf{H}=-\operatorname{grad}(\mu H^2/8\pi)+\operatorname{div}(\mu\mathbf{HH}/4\pi), \quad (1\text{-}20)$$

其中最后一項表示一个并矢式的散度. 这个方程表示，$\mathbf{j}\times\mu\mathbf{H}$ 这个力等价于一个流体静压強 $\mu H^2/8\pi$ 和一个沿磁力綫的张力 $\mu H^2/4\pi$. 这也就等价于一个沿磁力綫的张力 $\mu H^2/8\pi$ 和一个大小相等的垂直磁力綫的压力，这一形式是麦克斯韦应力通常采用的形式.

如果运动并不使密度发生变化，那么流体静压強就不作功. 这时磁能的变化是由反抗沿磁力綫的张力 $\mu H^2/4\pi$ 所作的功而来；磁力綫的任何伸长都使磁能增加. 这和上一节的結果是一致的.

反之，如果运动是均匀的膨胀，那么流体静压強 $\mu H^2/8\pi$ 所作的功，就将超过反抗张力 $\mu H^2/4\pi$ 所作的功(二者之比为 3:2). 因此，均匀膨胀会減少磁能，粗略地說，这是由于磁力綫更加远离，因而場強也相应地減少.

1.4 力学效应

由于电磁原因产生的机械力 $\mathbf{j}\times\mu\mathbf{H}$ 垂直于磁場；因此它对沿着磁力綫的运动沒有直接影响；它对垂直于磁力綫的运动的作用，視磁力綫是自由地穿过物質消散还是近于冻結在物質里面而有所不同.

第一种情形：电阻很重要 我們先来考慮前一种情形，这时电阻的效应很重要. 应用方程(1-3)，得

$$\mathbf{j}\times\mu\mathbf{H}=\mu\sigma(\mathbf{E}+\mu\mathbf{v}\times\mathbf{H})\times\mathbf{H}$$
$$=\mu\sigma(\mathbf{E}_t\times\mathbf{H}-\mu H^2\mathbf{v}_t),$$

其中 $\mathbf{E}_t$、$\mathbf{v}_t$ 是 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{v}$ 在垂直于磁場方向上的分量。于是方程（1-5）可写成下面的形式：

$$\rho\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = \mathbf{P} + \mu\sigma(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H} - \mu H^2\mathbf{v}_t), \tag{1-21}$$

其中 $\mathbf{P}$ 为单位体积中一切非电磁力的总和。由这个方程可得：如果 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{E}_t$ 可以忽略，那么由于电感阻尼的結果，横过磁力綫的运动将会衰減，衰減时間为

$$\tau = \rho(\sigma\mu^2H^2)^{-1}. \tag{1-22}$$

时間 τ 可以是相对地很短的，即使在实驗室的实驗中也是这样；例如在場強为 1200 高斯的磁場中的水銀，其衰減时間小于 1 秒。因此，电感阻尼可以看成是一种很強的阻碍横跨磁力綫的运动的磁"粘滞性"。如果 L 和 V 象在方程（1-14）和（1-15）中那样定义，$\mathbf{H}$ 是一个可与实际出現的場相比拟的場強，那末单位体积的磁粘滞力的数量級为 $\mu^2\sigma\mathbf{H}^2V$，而普通的粘滞力的数量級为 $\rho\nu V/L^2$[見方程(1-7)]。因此，如果

$$M = \mu HL(\sigma/\rho\nu)^{1/2} \tag{1-23}$$

比 1 大得多的話，磁粘滞性就会大过普通的粘滞力。上面的 M 这个数的重要性，首先出現在哈脫曼（Hartmann）关于槽中流动的工作中[1]，因此 M 可以叫做哈脫曼数。

当 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{E}_t$ 不能忽略时，仍将有相近似的結果，这个結果用磁力綫的速度概念，可以非常方便地表示出来。磁力綫的速度这一概念只有当磁力綫是冻結在物質中时才有精确的意义。在这种情况下，由于 σ 实际上可看作无穷大，而

$$\mathbf{E} + \mu\mathbf{v} \times \mathbf{H} = 0,$$

因此 $\mathbf{E}$ 就只有横向分量 $\mathbf{E}_t$。推广这个方程，我們这样来定义磁力綫的速度 $\mathbf{w}$：$\mathbf{w}$ 永远垂直于磁場 $\mathbf{H}$，并且

$$\mathbf{E}_t + \mu\mathbf{w} \times \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{w} = (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H})/\mu H^2. \tag{1-24}$$

于是方程（1-21）就表示，如果 $\mathbf{P} = 0$，那么在經过一段与方程

---

1) 見下节。——譯者。

(1-22)中的衰減时間 τ 相等的时間之后，运动就将到达这样一个速度 $\mathbf{v}$，使得 $\mathbf{v}_t=\mathbf{w}$. 这就是說，力学效应仍然是阻碍物質横过磁力綫的相对运动. 由量綱关系可以推知，在許多場合下，物質速度有一个可观变化的时間大致是 L/V. 因此，若令

$$N=L/V\tau=\mu^2H^2\sigma L/V\rho, \tag{1-25}$$

則只有在 N 小的时候，横越磁力綫的相对运动才有希望被察覺到.

如果 $\mathbf{P}\neq 0$，那么横渡磁力綫的运动将不会被破坏，但是趋向一个一定的值，这个值由下面的等式决定：

$$\mathbf{P}_t=\sigma\mu^2H^2(\mathbf{v}_t-\mathbf{w}).$$

这个式子意味着，力 $\mathbf{P}$ 将以这样的速度拖着物質穿越磁力綫，使得自感阻尼刚好和 $\mathbf{P}$ 平衡.

第二种情形：电阻不重要 在磁力綫冻結在物質內的情形下，別的类型的效应就重要起来. 电流不能再認为是由方程(1-3)决定了，而应認为是由方程(1-1)决定. 它的力学效应这时以用麦克斯韦应力来表示为最簡单，卽一个垂直于磁力綫的压強和一个沿磁力綫的相等的张力. 它們产生三个主要效应：

(a) 由于横向压強的存在，一束磁力綫将反抗在横方向压縮它們的任何作用.

(b) 由于纵向张力，磁力綫将尽力使自己縮短，一直到物質对压縮的抵抗所容許的限度为止.

(c) 由于上述二者，如果磁力綫偏离平衡位置，就会引起一个回复力，在平衡位置附近产生振盪. 力 $\mathbf{j}\times\mu\mathbf{H}$ 总是垂直于 $\mathbf{H}$ 的；因此，回复力就使磁力綫具有一种刚性.

和第一种情形下一样，磁場的效果，粗略地說，是阻碍物質运动. 但是在第一种情况下，对运动的反作用是純粹消极的，只是簡单地使运动减幅，而現在却相反，反作用是积极的，如同一条弹簧先被压縮然后松开一样. 在所有两种情况下，磁場都反对在导电流体中发生湍流；但是在磁力綫冻結在物質內的情况下，还有一些別的效应可以发生.

将麦克斯韦应力表示为一个流体靜压強 $\mu H^2/8\pi$ 和一个沿磁

力綫的张力 $\mu H^2/4\pi$，有时比表示成纵向张力和横向压强更为有用。在液体中，一个流体静压强一般并不重要，因为它的效果被液体所加的压强的减小所抵消；因此张力 $\mu H^2/4\pi$ 就給出磁应力的大小的数量級。运动过程中的慣性力等价于一个数量級为 ρV^2 的应力；因此磁胁強和慣性力之比的数量級就是 S，

$$S = \mu H^2/4\pi\rho V^2. \tag{1-26}$$

这个式子也給出了单位体积内的磁能 $\frac{\mu H^2}{8\pi}$ 和物質的动能 $\frac{1}{2}\rho V^2$ 的比率的数量級。

S 数給出磁力綫冻結在物質中时的磁場和运动的相对重要性。如果 S 小，运动难于受到磁場的影响；反之，如果 S 大，則运动就会受到磁場很強的控制作用；如果 S 之数量級为 1，那么运动和磁場以大致相等的程度相互作用，并且能量在运动和磁場之間均分。因此 S 的值具有根本的重要性。

本节中前些时候引进的两个无量綱的量 M 和 N [方程 (1-23) 和(1-25)]，可以由 S 和两个雷諾数的組合表示出来：

$$M^2 = SRR_M, \quad N = SR_M. \tag{1-27}$$

1.5 平行流动

我們来研究均匀液体在两块静止的平行平板之間的层流运动，作为上面建立的許多原則的一个簡单例子[1]。令两个平面为 $z = \pm L$；設速度 v 在 x 方向，并在垂直边界面(亦即平行 Oz)的方向上加上一个均匀磁場 H_0。因为在正中平面 $z=0$ 附近的液体，要比边界附近的液体运动得快一些，它就会把磁力綫往自己运动的方向拖出一些。因此磁場就获得了一个平行于运动的分量 H_x；此外还有一个均匀电場 E，它一般作用在 y 方向。

把粘滞性考慮在內，但忽略重力，那么，稳定运动的方程为

1) 本节的許多計算可参看 Ландау и Лифшиц: Электродинамика Сплошных сред (連續介質电动力学)一书第 275 頁。——譯者。