工程中的
现代数学方法

F. S. 梅里特 著

科学出版社

内 容 简 介

本书是为有志进修数学的工程技术人员编写的. 本书内容分三部分: (一)数学模型,介绍了抽象代数的有关概念,分析了数学结构的内在本质,揭示了不同模型的基本共同点;(二)向量分析与张量分析以及与之有密切联系的内容——曲线坐标与微分几何; (三)介绍复变函数论,包括有关复数运算的简要复习,目的在于介绍保角映射方法. 每章末附有问题及详细解答.

本书读者对象为工程技术人员以及工科大学教师和高年级学生.

F. S. Merritt

MODERN MATHEMATICAL METHODS IN ENGINEERING

McGraw-Hill 1970

工程中的现代数学方法

F. S. 梅里特 著

丁 仁 陈乐湘 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981年1月第一版 开本：787×1092 1/32

1981年1月第一次印刷 印张：9 1/4

印数：0001—11,700 字数：208,000

统一书号：13031·1450

本社书号：2000·13—1

定价: 1.15 元

序　　言

本书是为有志进修数学的工程技术人员编写的．其宗旨不只是单纯讲述高等数学，更重要的是，希望由此增进学习的兴趣，并说明如何运用高等数学解决工程问题．凡选入本书的内容，在工程技术中均有广泛应用，且宜于使用高速电子计算机快速求解．

本书涉及的许多课题不久前还被认为完全属于纯粹数学的范畴，除有助于数学基础的研究外，几乎没有什么实际用途．现在人们逐渐认识到，这些课题提供了能用以解决工程问题的数学模型；由于高速计算机的产生，许多这种模型，如矩阵等，已成为极有价值的工具．

本书内容分三大部分：数学模型、向量分析与张量分析、复变函数．

第一部分——数学模型，介绍了抽象代数的有关概念，分析了数学结构的内在本质，揭示了不同模型的基本共同点．学完这部分内容，读者可更紧凑、更系统地掌握业已获得的数学知识，并找到由现有知识通向新的领域的新途径．此外，在抽象代数中，就某一抽象模型证得的结果对同类的其它模型也必成立．因而一条定理只须对某一抽象模型——同类模型中的一个特定模型推导一次，而不必对等价模型再行推导．这样可以节省不少时间与精力，许多结果也不必逐条记忆．在处理工程问题时，为加快求解，可由一个模型转换到另一个模型，如由平面几何到解析几何，由复数到向量，由向量或张量到矩阵等等．

读者如果是初次涉足抽象代数，定会觉得第一部分内容颇为新奇，在这里会遇到一些陌生的运算与结果．如在普通代数中，若 $ac=bc$ 且 $c\neq 0$，则 $a=b$；而在本书第一部分读者会见到上述消去律并不成立的数学模型，这类模型的奇特之处还在于可以含有所谓“零因子”．此外，在第一部分会发现，有些模型允许有相当于 $(1/3)+1=1$ 及 $6+7=9$ 的等式．

第一部分内容也许是引人入胜的，但其目的还是为了帮助解决工程问题．如布尔代数在电路分析、概率论中均有应用；矩阵可广泛应用于所有的工程领域，特别是线性方程组的求解；拓扑有助于处理网络问题（无论是电路网络还是构架网络）；线性向量空间则扩大了向量分析的适用范围．

第二部分包括向量分析、张量分析以及与之有密切联系的内容——曲线坐标与微分几何．

第二部分中有关向量的讨论是第一部分中论述的向量代数的继续．不过第一部分中的向量代数是抽象的，允许将向量推广到具有虚的或复的分量，而第二部分则是在实空间中讨论向量．这种向量是读者所熟悉的，可用箭头表示．在第二部分中，向量的分量可以是变量——空间位置或时间的函数．所述处理这种变量的方法可用以解决许多不同类型的工程问题．张量，连同不变量这一重要概念，是作为向量的推广而引入的．在向量与张量的代数表示中用到的一种有效工具——和式简记法，在第一部分即已介绍，这样读者可及早使用．

第三部分介绍复变函数论，包括有关复数运算的简要复习，目的在于介绍保角映射（共形映照）方法．在解决涉及拉普拉斯方程的工程问题时，保角映射是特别有用的．

本书假定读者熟悉一般大学水平的数学知识，故不再包

括这类材料.

为节省篇幅并保证思路连贯,有关史料、证明及推导本书一般从略(但为阐明概念,也给出了若干推导). 对这方面知识与细节感兴趣的读者,可参阅书末参考文献中列举的有关书籍.

为帮助读者充分利用本书,谨提供下述建议:

通读各节以了解主要内容. 如在阅读中遇到疑难问题,不要急于在读完这一节前着手解决,因为常常在这一节结束之前,也许就在下一句或下一段中便会找到答案. 第一遍阅读完毕后,应从头至尾再行钻研,这时读者务须理解每句话的意义.

每章末尾附有问题及详细解答(共计 350 余题). 努力解决这些问题,然后与解答逐步核对,这样,读者将会更好地掌握有关知识.

阅读本书时若能将所学内容与日常工作相联系,则获益更大.

F. S. 梅里特

目　　录

第三部分　复 变 函 数

第一部分　数学模型

第一章　抽象代数引论

数学使我们得以运用严密的逻辑来阐述工程问题中的各种概念. 为此，首先须将这些概念与诸如点、曲线、曲面、数集之类的数学元素相联系，然后再选择一个由这些元素及其结合、运算法则构成的数学模型. 至于选择什么样的数学模型，则取决于我们的判断：该模型能在多大程度上反映有关的实际状况. 运用所选模型的定理及关系式求出一个数学上的解，由此即可得到我们所关心的工程概念.

本章要说明，数学模型是多种多样的，对这些模型可作出种种不同解释，以帮助解决工程问题；本章还要说明，抽象代数为数学模型的研究提供了捷径. 此外，本章给出了若干有关抽象代数应用的实例. 不过，为数更多的例子则安排在以后各章，这些例子涉及到一些特定的数学模型.

§1-1　抽象代数与数学模型

在抽象代数中，数学模型的元素、关系及运算均用符号表示. 例如，如果 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ 是两个向量，我们就可将 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 写成 $\mathbf{x}R_1\mathbf{y}$；又如果一个点可以用一个数组表示，则点与数组的这一关系可写成 ARb，其中 A 代表数组，b 代表相应的点，R 为"表示". 类似地，可以规定表达式 $x_1\,R\,x_2\,R\,x_3$ 中的 R 代表 $>$(大于)或"后接"，也就是 $x_1>x_2>x_3$ 或 x_2 介于 x_1 与 x_3 之间.

一个表达式是否有意义，取决于我们对式中符号所赋予的含义. 作为工程技术人员，我们关心的仅仅是能产生有助于解决实际问题的数学模型的含义.

我们来研究符号表示中的几个有关问题. 设 a_1，a_2，$\cdots$ 是具有相同性质的数学元素，问运算 $a_x\ R\ a_y$ 是否总是产生具有相同性质的元素 a_z? 当然不一定. 如元素为整数，运算为除法，运算结果就可能不是整数而是分数. 所以，如果希望数学模型仅包含这样的运算，由这种运算所产生的元素与被施行运算的元素具有相同性质，我们就必须运用闭合律（或称封闭律），使模型不含有任何其它类型的运算. 读者将会看到，以后各章所研究的数学模型都要求运算所产生的元素与被施行运算的元素为同类元素.

类似地，如果要求数学模型具备下述特性，则必须在该模型的基本法则即公理中指明:

$$aR_1b = bR_1a, \qquad \text{（交换律）}$$

$$(aR_1b)R_1c = aR_1(bR_1c), \qquad \text{（结合律）}$$

$$aR_2(bR_1c) = (aR_2b)R_1(aR_2c). \qquad \text{（分配律）}$$

此外，如果希望模型含有单位元素，或对应于每个元素有逆元素，也必须在公理中指出.

现在我们来看看如何对一个数学模型加以解释. 写成抽象代数，一种最常用的数学模型的头几条公理是:

1. 给定 a_1 与 a_2，必存在 b，使得 $b\ R_1\ a_1$ 与 $b\ R_1\ a_2$ 为真，其中 R_1 是一种关系;

2. 给定 a_1 与 a_2，仅有一个 b 满足 $b\ R_1\ a_1$ 与 $b\ R_1\ a_2$;

3. 给定 b_1，必存在 a_1 与 a_2，使得 $b_1\ R_1\ a_1$ 与 $b_1\ R_1\ a_2$ 为真，且存在 a_3，使得 $b_1\ R_1\ a_3$ 不真;

4. 若 a_1，a_2，a_3 与任何 b 都不具备关系 R_1，则存在一个 c，使得 cR_1a_1，cR_1a_2，cR_1a_3 均为真:

5. 若 $a_1R_2a_2R_2a_3$ 为真，则 $a_3R_2a_2R_2a_1$ 也为真，且存在 b，使得 bR_1a_1，bR_1a_2，bR_1a_3 均为真.

对于各个 a，b，c 及 R 可任意赋予一种含义，只有这样做了以后，才能回答由这些公理导出的命题或定理是否成立. 如果所赋含义保证这些公理相容(无矛盾)且相互独立，那末，这些公理就提供了数学模型的描述性定义——利用该模型的性质所下的定义. 一个数学模型对工程实践是否有用，要看该模型与它的原型——工程模型相符到何种程度.

假定在上述公理中用"点"代 a，用"直线"代 b，用"平面"代 c，并假定 R_1 代表"通过"，R_2 代表"在···之后"，那末在叙述上略加变更，上述公理即可写成:

1. 给定两点 a_1 与 a_2，必存在通过这两点的直线 b;

2. 给定两点，至多存在一条通过这两点的直线;

3. 在一条给定的直线上至少有两个点，至少存在三个点不在同一条直线上;

4. 如果三个点 a_1，a_2，a_3 不在同一条直线上，则至多存在一个平面 c 通过这三点;

5. 若点 a_2 介于点 a_1 与 a_3 之间，则 a_2 也介于 a_3 与 a_1 之间，且 a_1，a_2，a_3 在同一条直线上.

不难看出，这正是 D. 希尔伯特(Hilbert)给出的欧几里得几何公理. 我们也可以用"直线"(或圆)代 a，用"直线束"(或圆束)代 b，从而确定一种真实几何. 我们还可以用有序数组(坐标)代 a (这里有序的意思是将数组中的数换一种排列一般即得出另一数组)，再适当定义 R_1 与 R_2，从而确定一种特殊的代数——解析几何，对其可作出多种解释.

现在我们可以开始认识抽象代数的一个优点了. 凡可由一个数学模型的公理确定的定理与关系，我们只须推导一次，这些定理与关系对于该模型所表示的任何数学体系都成立;

如果一个新的体系可由该模型表示，就不必再从这个体系的公理出发来推导有关的定理及关系，所需结果均可由前已导出的结果得到.

下面是一个简单的例子. 设有一轮子在地平面上沿一直线作无滑动的滚动,滚动的角速度为常值 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$，其中 t 为时间,试确定轮缘上一点的速度. 为解决这个问题,开始可能要描出滚动过程中轮缘上一点的位置,这样就得到模型1——问题的几何表示. 如果继续用几何方法求解，步骤会十分繁杂. 于是应用模型 2——解析几何，即有序实数组的代数，求解比较容易. 这时可以看出，原先画出的曲线是旋轮线，其参数方程为 $x = (\theta - \sin\theta)D/2$，$y = (1 - \cos\theta)D/2$，其中 D 为轮子的直径，求导即得速度分量 $v_x = (\omega D/2)(1 - \cos\theta)$，$v_y = (\omega D/2)\sin\theta$. 最后运用模型3——向量加法，即得欲求的速度为 $v = \omega D\sin(\theta/2)$. 如有必要，可画出关于时间的速度或位移，或将两者同时都画出（模型 1). 在上述问题的求解过程中，对于抽象代数的符号赋予了种种不同的含义.

以下我们要较详细讨论抽象代数的性质，并说明如何将这些性质应用于工程问题的求解.

§ 1-2 数学模型的定义

我们已经看到，数学模型涉及未定义的，或者说抽象的数学元素，如点、曲线、曲面及数等. 模型建立了一组法则或运算，从而将一个或多个元素（运算对象）与另一些元素（运算结果）相联系. 每一模型都是由一组公理定义的，这组公理规定了必要的运算，陈述了确定模型各种性质的充分必要条件，公理自身必须无矛盾且相互独立. 以下几章将给出几种特定类

型的数学模型.

§1-3 函数与关系

假定集合 X 以某种方式与集合 Y 相联系，令 R 表示一种规则，按此规则，X 的每个元素 x 都有 Y 的唯一的元素 y 相对应. 这样，我们就可定义函数如下:

函数 f 是一个由有序偶 (x, y) 组成的集合，其中任意两个有序偶的第一个数学元素 x 不得相同.

因此，f 就是集合 X(定义域)的元素与集合 Y (值域)的元素间的一种关系，这种关系是由 R 规定的. 在 f 中，x 称为自变量，y 称为因变量，或对应于特定 x 的函数值 $f(x)$.

函数是关系的一种特例. 对于自变量的每个值，函数仅允许因变量的一个值与之相对应，要不是这一限制，我们也不妨把关系定义为多值函数. 现在我们定义，关系也是由有序偶 (x,y) 组成的集合，有序偶中第一元素的集合 X 为定义域，第二元素的集合 Y 为值域；对于每个 x，按规则 R，可以有 Y 中的多个元素相对应.

按上述定义，若 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$，其中 a，b，c 为常数，则由使上式成立的 x，y 所构成的有序偶 (x, y) 的集合就是一个函数；对于每个 x，由规则 $ax^2 + bx + c$ 可确定唯一的一个 y 值. 但 $ay^2 - bx + c = 0$ 则是一个关系，因为对于 x 的某些值，由此可得出两个 y 值.

§1-4 等价性

设 R 为联系两个数学元素 a 与 b 的关系，当且仅当 R 具有下述性质时，称 R 为等价关系:

1. aRa; (自反性)
2. 若 aRb，则 bRa; (对称性)

3. 若 aRb, bRc, 则 aRc. （传递性）
相等就是一种等价关系. 设元素 a 与元素 b 相等用 $a=b$ 表示,显然有 $a=a$; 若 $a=b$, 则 $b=a$; 若 $a=b$,且 $b=c$,则 $a=c$. 函数的恒等,三角形的全等及相似、同构等都是等价关系的例子. 等价关系常用双箭头表示，如 A 等价于 B 可记为 $A\longleftrightarrow B$.

§ 1-5 变换

在§ 1-3 中,函数与关系是用数学元素的有序偶定义的,其中的元素由一种规则相联系. 这里的规则也可以解释成由第一元素到对应的第二元素的变换，或者说这种规则把第一元素映入或映到第二元素.

于是函数 $y=f(x)=ax^2$ 就表示 x 到 y 的一个变换,而关系 $ay^2-bx+c=0$ 则表示 x 到 y 的另一变换. 也可以说,函数与关系表示 x 到 y 的两种不同的映射,两种情形下 y 均称为 x 的象. 由元素集 X 到元素集 Y 内的映射乃是一个匹配过程——令 X 中的每个元素 x 都有 Y 中唯一的一个元素 y 相对应. 如果 Y 中的每个元素都是 X 中某个元素的象，那末映射不仅是由 X 到 Y 内的,也是由 X 到 Y 上的.

图 1-1a 表示由线段 AB 到线段 $A'C'$ 内的映射. 过 AB 上各点作平行于 AA' 的直线，它与 $A'C'$ 的交点就是 AB 上各点在 $A'C'$ 中的象. 这一规则将 AB 映射到 $A'B'$ 上了，但并没有将 AB 映射到 $A'C'$ 的另一部分 $B'C'$ 中.

图 1-1b 表示由线段 AB 到另一线段 $A'B'$ 上的映射. 过点 O 与 AB 上各点作直线,它与 $A'B'$ 的交点就是 AB 上各点在 $A'B'$ 中的象; $A'B'$ 中的任一点都是 AB 中某点的唯一的象.

无限集是包含无限多个元素的集合，它的特点是可以将

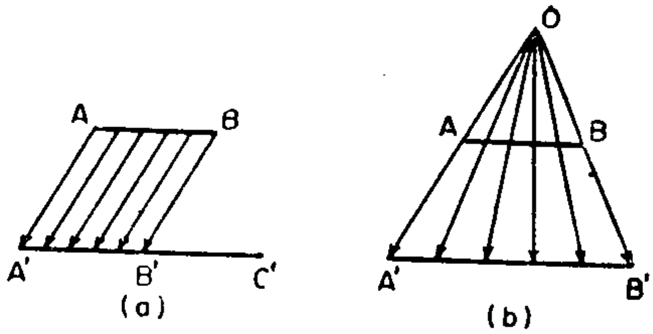

图 1-1

它自身映射到它的一部分——子集上.

图 1-1 中被映射的线段都表示无限集. 作为另一个例子,我们来考察偶数集,它是整数集的一个子集. 若 x 表示任一整数, $y=2x$ 就把整数集映射到它的子集——偶数集上了.

设 X, Y 为两个集合, 若可将 X 映射到 Y 上, 且 X 中不同元素的象也不同,则称 X 与 Y 间有一一对应关系,并称此种映射是一对一的. 此时必可将 Y 一对一地映射到 X 上. 两个集合间若有一一对应关系,则两者是等价的.

符号 x, y 不一定表示数. 如 x 可以代表某个地点,映射可以是用以确定该地点在地图上的位置 y 的规则.

映射可用箭头表示. 如由 $x'=f(x)$ 所确定的映射可记为 $x\rightarrow x'$.

函数、关系及变换(映射)也可看成数学元素.

§ 1-6 不变性

施行变换 $x\rightarrow x'$ 之后, x 与 x' 的某些性质若相同, 则称这些性质在该变换下是不变的.

比如说,变换是把一张椅子由房间的一处搬到另一处.在这一变换下,椅子的某些特性,如它与房间里其他物件的距离改变了;但另一些特性,如椅子的尺寸、重量、形状、颜色却保

持不变. 又如变换 $y=2x$ 把自然数变换成偶数, 在这一变换下,整数的数值改变了,但两个自然数的比值是不变的,"是整数"这一特性也是不变的.

若 $x\to x'$, p_1, p_2, $\cdots$是 x 与 x' 所共有的性质, 则称这些性质在变换 $x\to x'$ 下是不变的.

给定变换 $x\to x'$, $y\to y'$, $\cdots$, 若 $F(x', y', \cdots)=F[f(x), f(y), \cdots]=F(x, y, \cdots)$, 则称函数 $F(x, y, \cdots)$ 在所论变换下是不变的;同样,若 $R(x', y', \cdots)=R[f(x), f(y), \cdots]=R(x, y, \cdots)=C$, 则称关系 $R(x, y, \cdots)=C$ 在所论变换下是不变的. 这就是说, 这些函数或关系的形式不因变换而改变.

例如,在笛卡儿坐标轴的旋转之下, 即由 $x'=x\cos\theta-y\sin\theta$ 与 $y'=x\sin\theta+y\cos\theta$ 所确定的映射 $x\to x'$, $y\to y'$ 之下, 距离是不变的, 因代入距离函数 $d(x, y)$ 得 $d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x'^2+y'^2}$. 注意, 这里函数的形式不变. 在有关张量的章节中将给出其它不变量的例子.

§ 1-7 同态与同构

在 § 1-1 中曾举例说明, 对一个数学模型可作出多种解释,因而这个模型也可用其他模型表示. 在某种意义上说,这些模型本质上是相同的. 由一个模型转换到另一适当的模型(如欧几里得几何与向量解析几何的互换)有时可简化工程问题的求解. 在这里有必要介绍一下同态与同构的概念.

设M是由元素 a, b, $\cdots$及其上的闭合运算 R_1, R_2, $\cdots$构成的数学模型, M' 是由元素 a', b', $\cdots$及其上的闭合运算R_1', R_2', $\cdots$构成的数学模型,又设 M 的运算 R 与 M 的运算 R' 相对应. 如果由 M 到 M' 的映射使得当 $a\to a$, $b\to b'$, $\cdots$ 时, $R(a, b, \cdots)\to R'(a', b', \cdots)$, 则称该映射是$M$到 M'