工程数学

1

陆传务　主编

华中理工大学出版社

内 容 简 介

工科本科的"工程数学"共有八个部分，即基础概率论，数理统计，线性代数，计算方法，复变函数与积分变换，数理方程与特殊函数，优化方法，抽样技术.共分四册出版.本书是第一册，内容包括：事件及其概率，随机变量的分布和它的数字特征，大数定律和中心极限定理，统计量的分布，参数估计和假设检验，非参数的假设检验，正交试验设计，方差分析和回归分析等.

本书比相应的同类教材在内容上稍为多些，写法上也有许多特点.本书除作为工科本科的教材外，还可供电大，函大，夜大工科各专业学生参考.

前　言

工科本科的“工程数学”过去共包括六个内容，即场论，线性代数，概率和统计，积分变换，复变函数，数理方程和特殊函数，而且这六个内容不是各专业都设课作为必修内容。但近年来，情况有些变化。例如，工程数学的许多内容已与微积分的内容并列，作为工科硕士研究生的“高等数学”统考内容；另外，根据我校多年来的教学实践，认为这六个内容，有的要加深，有的要合并，且学时又有限。因此，除场论部分已与微积分中的多元函数合并讲授外，我们把“工程数学”分成基础概率论，数理统计，线性代数，计算方法，网络最优化方法，复变函数与积分变换，数理方程与特殊函数，优化方法等八个部分。每一个部分约40学时。这八个内容共分三册出版，每册包括两个内容。整个教材在写法上的指导思想是，除保证各部分的基本理论和基本运算外，要突出工程数学的特点——方法和应用。因此，这部教材与相应的通用教材相比，具有下列一些特点：即

1）思路清晰，基本概念讲得比较透彻。例如，概率和统计这两部教材在参加全国工科“工程数学”教材评比的第一阶段投标中，即以此特点取胜；

2）例子广泛，方法多样，强调应用，富有启发性。例如线性代数部分就是这样；

3）突出重点，分散难点，条理清楚，通俗易懂，如复变函数和数理方程部分就是例子。一般来说，多数内容在深度上都比过去相应的教材有所加强。

另外，限于编者的水平，难免有不妥之处，切望读者指正！

陆传务

1988年9月于华中理工大学　数学系

目　录

第一篇　基础概率

第二篇 数理统计

《工程数学》第一册

第 一 篇

基 础 概 率

编者：樊孝述　汪昌瑞

引　言

概率论是研究大量随机现象统计规律性的数学学科．它和其他数学学科一样是由于实践的需要而发展起来的．早在17世纪就已开始对大量随机现象的研究，并提出了相应的数学工具。17世纪初叶，物理学的发展需要对测量的误差作科学的分析；各种社会保险事业的发展，要求掌握患病、死亡、灾害等大量随机现象的规律性．正是这些实际的需要推动着概率论的蓬勃发展，并且也找到了它的应用．但是，概率论在它的整个发展过程中，在相当长的历史时期内却未能建立起坚实的理论基础．例如，“事件”和“概率”这两个最基本的概念就一直没有明确的定义．进入本世纪后，特别是由于苏联数学家Kolmogorov的工作，概率论严格的数学基础才被建立起来．从这以后，理论研究和实际应用都得到了极大的发展．现在，概率论已成为近代数学的一个重要的组成部分，在基础科学、技术科学、社会科学、经济科学和管理科学中都得到了广泛的应用，它有机地渗透于这些学科之中是近代科学技术发展的特征之一．

本书作为“工程数学”中“基础概率论”的教材，目的在于通过本教材的学习，使读者能初步掌握处理随机现象的基本理论和方法，为分析和解决实际问题打下相应的数学基础．下面通过例子先介绍一些最基本的概念和术语．

一　必然现象和随机现象

在自然界，在生产实践和科学实验中，人们看到的现象，大体上可以分为两类，一类是必然现象（或叫确定性现象）．这类现象的特点是，在一定条件下必然会出现某种结果．例如，纯水在

一个标准大气压下加热到100℃，水必然会沸腾；让一物体自由下落，该物体必然会落到地面上；同性电荷放在一起必然互相排斥；等等。定量地研究这类现象的数学工具是几何、代数和微积分等。另一类是随机现象(又叫偶然现象)。这类现象的特点是：在一定条件下具有多种可能结果，且事先不可能预言会出现哪种结果。例如，任意掷一枚均匀硬币，其结果可能出现正面也可能出现反面；远距离射击一目标，可能击中也可能击不中；电话交换台在单位时间内接到用户的呼叫次数，可能是0，1，2，…；用同一测量工具重复测量某零件的长度或重量时，由于气温对测量工具的影响，测量者读数上的误差等原因，各次测量的结果一般是不同的；如此等等。这类随机现象广泛地存在于自然界和人类社会生活之中，是需要我们去研究的。

二 随机现象的统计规律性

必然现象服从确定性规律的支配，在数量上往往可以通过数学公式来表达。例如，在真空中，自由落体下落的距离s可以用公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

表示。其中g是重力加速度。又如，边长分别为a、b的矩形的面积为$a\cdot b$等。

对于随机现象，由于人们事先不能断定将会出现什么结果，似乎是偶然性在起作用。但是，正如恩格斯说的，“在表面上是偶然性起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽的规律支配，而问题只是在发现这种规律”(《路德维希·费尔巴哈与德国古典哲学的终结》)。大量的社会实践表明：随机现象的结果所以事先不可预言，是因为观测的次数太少，当在相同的条件下，作大量重复观测时，随机现象就会呈现出某种规律性。例如，多次随意

地抛掷一枚均匀硬币，出现正面和出现反面的次数几乎是相等的；一段时间内，一个地区出生的男婴和女婴的比例近似于1:1；气体对容器壁的压力等于单位时间内撞击在容器壁单位面积上的气体分子的总影响，就单个分子而言，其运动速度和方向都是随机的，无规律性可言，但从宏观上看，对一定温度和体积的全体分子来说，它们对容器壁的压力可以认为是恒定的，即压力为一常数值．随机现象在大量重复观测下所呈现的这种规律性，叫做**统计规律性**．概率论就是研究大量随机现象统计规律性的数学工具。

1.1 事件及其概率

本章将介绍事件、事件的概率、事件的独立性等最基本的概念，以及事件的运算、概率的加法公式、乘法公式和全概率公式等基本内容，这些内容是概率论的最基本的部分。

一 随机试验

为了揭示随机现象的统计规律性，常常要对随机现象进行观测．观测总是在一组条件的实现下进行的，观测一组条件实现下所发生的现象叫做试验．不过，概率论只讨论具有如下特点的试验：

(a) 可以在相同的条件下重复；

(b) 每次试验可以出现不同的结果，究竟出现哪种结果，试验前不能预言；

(c) 事先知道试验可能出现的全部结果．

具备上述三个特点的试验叫**随机试验**，以后简称**试验**，并记为E．下面是一些随机试验的实例．

E_1：随意抛一枚均匀硬币，观察出现正面和反面的情况；

E_2：将一枚均匀硬币随意抛两次，观察正反面出现的情况（注意，连抛两次为一次试验）；

E_3：掷一颗均匀对称的骰子，观察出现的点数；

E_4：记录某电话交换台在一段时间内接到呼叫的次数；

E_5：从含两件次品（记为a_1,a_2）和三件正品（记为b_1,b_2,b_3）的五件产品中，随意抽出二件，观察出现正品次品的情况；

E_6：从一批灯泡中任意抽取一个灯泡并观测它的寿命；

E_7：一射手进行射击，直到击中目标为止，记录射击的次

数；

E_8：向坐标平面区域D：$x^2+y^2\leqslant100$内随机地投掷一点（假定点必落在D上），观察落点M的坐标。

由这些实例可见，在随机试验中，被观测的对象，实际上就是一个随机现象，随机试验是产生随机现象的过程.随机试验和随机现象是并存的，我们是通过随机试验来观察和研究随机现象的。

二 随机事件

随机试验的每一个可能结果都称为随机事件。例如，上面提到的随机地掷一枚均匀硬币，其可能结果：{出现正面}或{出现反面}都是随机事件；某射手用步枪对距离为100米的靶子进行射击，射击结果：{中靶}或{脱靶}都是随机事件；记录某电话交换台从早上8点到10点接到呼叫的次数，在这段时间内，{没有呼叫}，{呼叫1次}，{呼叫2次}，…，{呼叫多于5次}，…，都是随机事件。随机事件以后简称**事件**，它是概率论中一个最基本的概念。

随机事件可以划分为基本事件（又称简单事件）和复合事件。所谓**基本事件**是指不能再细分的事件。例如，掷一颗均匀对称的骰子，{出现1点}，{出现2点}，…，{出现6点}，都是基本事件。所谓**复合事件**，是指由若干基本事件组成的事件.例如，{出现偶数点}，{出现奇数点}，{出现的点数大于2}，…，都是复合事件。{出现偶数点}由{出现2点}、{出现4点}、{出现6点}等三个基本事件组成；{出现的点数大于2}由{出现3点}、{出现4点}、{出现5点}、{出现6点}等四个基本事件组成。一个复合事件，当且仅当组成该事件的某个基本事件发生时才发生。例如，当且仅当{出现2点}，{出现4点}，{出现6点}这三个基本事件之一发生时，{出现偶数点}这一复合事件才发生。

把事件区分为基本事件和复合事件是针对具体试验的考察目

的而言的，不可绝对化。例如，同是投掷一颗骰子，若关心的是各种点数，则基本事件和复合事件将按上面所说的那样来区分；若关心的是“奇数点”还是“偶数点”，则每次试验只有两种可能结果：{出现奇数点} 或 {出现偶数点}，并且它们可以看成是基本事件。又如，对某工厂的产品随机地抽取10件作质量检查，检查结果：{没有次品}，{有1件次品}，{有2件次品}，…，{有10件次品}。若关心的是10件产品中的次品数，则上述11个结果中的每一个都是基本事件，而 {次品多于5件}，{次品不多于2件} 都是复合事件。前者由 {有6件次品}，{有7件次品}，…，{有10件次品} 等5个基本事件组成；后者由 {没有次品}，{有1件次品}，{有2件次品} 等三个基本事件组成。若规定抽取10件产品，其中次品多于2件为不合格，否则为合格，检查的目的是确定该批产品是否合格，则这时只有两种可能结果：{合格} 或 {不合格}，因而相应的基本事件也只有两个。

若随机试验的结果是由测量或计数而得到的，则事件是数量性的。例如记录电话交换台在一段时间内接到呼叫的次数，这时，{呼叫1次}，{呼叫2次}，…等事件是数量性的。若随机试验的结果是由观察事件的属性而得到的，则事件是非数量性的。例如，掷一枚硬币，{出现正面} 或 {出现反面} 是非数量性的事件；从装有红、蓝、白三色球的袋子中任取一球，{得红球}，{得蓝球}，{得白球} 等事件也都是非数量性的事件。

随机事件中还有两个极端情形。一个是在大量重复试验中，每次试验都必然会发生的事件，叫**必然事件**，记为 Ω；另一个则相反，每次试验都不发生的事件，叫**不可能事件**，记为 $\varnothing$。例如，在标准大气压下，将纯水加热到100℃，{水沸腾} 是必然事件，{水不沸腾} 是不可能事件。投掷一颗骰子，{出现的点数小于7} 是必然事件，{出现的点数大于6} 是不可能事件。必然事件和不可能事件本来没有不确定性，但为讨论方便，今后把它们当

作两种极端情况来处理。

§1.1-1　样本空间、事件的运算

为了用数学方法描述随机现象，下面引入样本空间的概念。

一　样本空间

一个随机试验E，它所有可能出现的不能再细分的结果都是基本事件。抛开基本事件的具体含义，让每一个基本事件对应着唯一的一个抽象元素ω，称ω为**样本点**。由所有样本点ω组成的集合$\{\omega\}$，称为**样本空间**．样本空间也记为Ω，即$\Omega=\{\omega\}$．这样，样本空间是由所有代表基本事件的样本点组成的．下面是1.1中列出的8个随机试验所对应的样本空间：

E_1的基本事件有两个：{出现正面}和{出现反面}．若记{出现正面}对应着抽象元素ω_1，{出现反面}对应着抽象元素ω_2，则E_1的样本空间由两个样本点构成，即

$$\Omega_1=\{\omega_1,\ \omega_2\}.$$

E_2的基本事件有四个，即{出现正正}，{出现正反}，{出现反正}，{出现反反}．若记{出现正正}对应着元素ω_1，{出现正反}对应着元素ω_2，{出现反正}对应着元素ω_3，{出现反反}对应着元素ω_4，则E_2的样本空间由四个样本点构成，即

$$\Omega_2=\{\omega_1,\ \omega_2,\omega_3,\omega_4\}.$$

以后为了方便，直接用基本事件的记号代替样本点ω，这样，

E_3的样本空间$\Omega_3=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$；

E_4的样本空间$\Omega_4=\{0,\ 1,\ 2,\cdots\}$；

E_5的样本空间

$$\Omega_5=\{(a_1,\ a_2),\ (a_1,\ b_1),\ (a_1,\ b_2),\ (a_1,b_3),\ (a_2,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ (a_2,\ b_3),\ (b_1,b_2),(b_1,b_3),$$

$(b_2, b_3)\}$；

E_6的样本空间$\Omega_6 = \{t \mid t \geqslant 0\}$；

E_7的样本空间$\Omega_7 = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$；

E_8的样本空间$\Omega_8 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 100\}$，其中$(x, y)$表示落点的坐标.

由于任何一个事件，或是基本事件或是由基本事件组成的复合事件，而样本空间Ω的元素是代表基本事件的样本点，因此，试验E的任何一个事件A就是样本空间Ω的一个子集. 若A是基本事件，则A由Ω的某一个元素组成，即$A = \{\omega_i\}$，它是Ω的一个单点子集. 若A是某些基本事件$\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_k}$组成的复合事件，则$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_k}\}$，它是$\Omega$的一个真子集. 若$A$是由$\Omega$的全部元素组成，则$A = \Omega$. 所以样本空间本身也是一事件. 因为在每次试验时，必有Ω的某一个样本点出现，也仅有一个样本点出现，所以Ω在每次试验中必然出现，即Ω是必然事件. 这就是为什么将样本空间也记为Ω的原因. 不包含Ω中任何元素的空集$\varnothing$是另一事件，它在每次试验中都不发生，所以是不可能事件. 其他任何一个事件A，当且仅当它所包含的某个样本点发生时，它才发生. 下面是用样本空间的子集表示事件的几个例子.

在E_2中，若事件$A_1 = \{$第一次出现正面$\}$，则$A_1 = \{$(正，正)，(正，反)$\}$.

若事件$A_2 = \{$两次出现同一面$\}$，则$A_2 = \{$(正，正)，(反，反)$\}$.

若事件$A_3 = \{$两次出现不同的面$\}$，则$A_3 = \{$(正，反)，(反，正)$\}$.

在E_6中，若事件$A = \{$寿命小于100小时$\}$，则$A = \{t \mid 0 \leqslant t < 100\}$.

在E_8中，若事件$A = \{$落点M在直线$x = 0$的右侧$\}$，则

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 100, \text{且} x > 0\}.$$