高等学校试用教材

高等代数

北京大学数学力学系
几何与代数教研室代数小组编

人民教育出版社

高等学校试用教材

高 等 代 数

北京大学数学力学系
几何与代数教研室代数小组编

人民教育出版社
1978 11.30
1978年·北京

内 容 提 要

本书是根据1977年在上海召开的理科教材编写大纲讨论会制订的高等代数教材编写大纲的精神，由北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组在1964年编的《高等代数讲义》和1966年编的《高等代数简明教程》的基础上修改编成的。内容为多项式理论、线性代数及群、环、域的概念介绍。每章后均附有一定数量的习题和补充题。

本书可作为综合大学和高等师范院校数学专业高等代数的试用教材。

高等代数

北京大学数学力学系

几何与代数教研室代数小组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京新华印刷厂印装

*

1978年3月第1版　1978年6月第1次印刷

书号 13012·098　定价 0.92 元

前　　言

本书是在我校1964年编的《高等代数讲义》和1966年编的《高等代数简明教程》的基础上，根据1977年在上海召开的理科教材编写大纲讨论会上制订的高等代数教材编写大纲的精神修改而成的. 本书分三个部分，即多项式理论，线性代数及群、环、域的概念介绍. 因有计算方法的试用教材，方程论的大部分内容和代数中的计算方法内容都略去了. 另外考虑到综合大学数学专业和高等师范院校数学专业两方面的需要，所以本书中包含的内容对每个学校不一定都是必要的. 还有些内容，如行列式的拉普拉斯展开定理、线性变换的值域和核、线性空间按特征值分解成不变子空间的直和、λ-矩阵和若当标准形的理论推导、酉空间介绍是选学内容，不作基本要求. 因此在采用本书作为教本时，教师可根据实际情况作适当的取舍. 如学员以后有近世代数基础课，第十章群、环、域的基本概念也可不讲. 我们力求做到所附的习题大致反映各章的基本要求，至于补充题就只有参考的意义，不在基本要求之内.

本书用了数学归纳法，但是没有讲数学归纳法. 这是考虑到，数学归纳法(特别是第二数学归纳法)可以在高等代数中讲，也可以在其它课程中讲，甚至于也可以只简单地提一下而在用的过程中熟悉它. 教师可根据情况作适当处理. 关于连加号“Σ”，我们写了一个附录，供参考.

我们采用符号“∎”表示一个定理或者论断的证明完结. 当符号“∎”紧接着一个定理或者论断的叙述之后出现，这就表示它不证自明或者在前面已经证明了.

这几年教育战线受四人帮严重破坏，影响了教学活动的正常进行，极大地妨碍了高等代数课教学经验的积累，加之这次修改时间仓促，书中的问题一定不少．我们希望大家在使用的过程中不断提出意见，以便今后写出高质量的教材．

参加教材审查会的同志们对本书提出了不少宝贵意见，我们表示衷心感谢．

北京大学数学力学系

几何与代数教研室代数小组

1978.3

目　　录

第一章　多项式

§1. 数　域

多项式是代数学中最基本的对象之一，它不但与高次方程的讨论有关，而且在进一步学习代数以及其它数学分支时也都会碰到. 本章就来介绍一些有关多项式的基本知识. 在中学代数中我们学过多项式，在一定意义上，现在的讨论可以认为是中学所学知识的加深和系统化.

我们知道，数是数学的一个最基本的概念. 我们的讨论就从这里开始. 在历史上，数的概念经历了一个长期发展的过程，由自然数到整数、有理数，然后是实数，再到复数. 这个过程反映了人们对客观世界的认识的不断深入. 中学数学的学习也基本上反映了这样一个发展过程. 回想一下，中学数学中数的涵义在不同的阶段实际上是不同的，只是没有明确指出而已.

按照所研究的问题，我们常常需要明确规定所考虑的数的范围. 譬如说，在解决一个实际问题中列出了一个二次方程，这个方程有没有解就与未知量所代表的对象有关，也就是与未知量所允许的取值范围有关. 又如，任意两个整数的商不一定是整数，这就是说，限制在整数的范围内，除法不是普遍可以做的，而在有理数范围内，只要除数不为零，除法总是可以做的. 因此，在数的不同的范围内同一个问题的回答可能是不同的. 我们经常会遇到的数的范围有全体有理数，全体实数以及全体复数，它们显然具有一些不同的性质. 当然，它们也有很多共同的性质，在代数中经常是将有共同性质的对象统一进行讨论. 关于数的加、减、乘、除等运算的性质通常称为数的**代数性质**. 代数所研究的问题主要涉及到数

的代数性质，这方面的大部分性质是有理数、实数、复数的全体所共有的．有时我们还会碰到一些其它的数的范围，为了方便起见，当我们把这些数当作整体来考虑的时候，常称它为一个数的集合，简称数集．有些数集也具有与有理数、实数、复数的全体所共有的代数性质．为了在讨论中能够把它们统一起来，我们引入一个一般的概念．

定义 1　设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1．如果 P 中任意两个数（这两个数也可以相同）的和、差、积、商（除数不为零）仍然是 P 中的数，那么 P 就称为一个**数域**．

显然，全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域．这三个数域我们分别用字母 Q、R、K 来代表．全体整数组成的集合就不是数域，因为不是任意两个整数的商都是整数．

如果数的集合 P 中任意两个数作某一运算的结果都仍在 P 中，我们就说数集 P 对这个运算是**封闭的**．因此，数域的定义也可以说成，如果一个包含 0、1 在内的数集 P 对于加法、减法、乘法与除法（除数不为 0）是封闭的，那么 P 就称为一个数域．

下面来举一些例子．

例 1　所有具有形式

$$a+b\sqrt{2}$$

的数（其中 a，b 是任何有理数），构成一个数域．通常用 $Q(\sqrt{2})$ 来表示这个数域．显然，数集 $Q(\sqrt{2})$ 包含 0 与 1 并且它对于加减法是封闭的．现在证明它对乘除法也是封闭的．我们知道．

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

因为 a，b，c，d 都是有理数，所以 $ac+2bd$，$ad+bc$ 也是有理数．这就说明乘积 $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$ 还在 $Q(\sqrt{2})$ 内，所以

$Q(\sqrt{2})$对于乘法是封闭的.

设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$，于是$a-b\sqrt{2}$也不为零(为什么？)，而

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

因为a，b，c，d是有理数，所以$\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}$，$\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}$也是有理数.这就证明了$Q(\sqrt{2})$对于除法的封闭性.

例 2 所有可以表成形式

$$\frac{a_0+a_1\pi+\cdots+a_n\pi^n}{b_0+b_1\pi+\cdots+b_m\pi^m}$$

的数组成一数域，其中n，m为任意非负整数，a_i，b_j($i=0, \cdots, n$, $j=0, \cdots, m$,)是整数. 验证留给读者去做.

例 3 所有奇数组成的数集，它对于乘法是封闭的，但对于加、减法不是封闭的. $\sqrt{2}$的整倍数的全体成一数集，它对于加、减法是封闭的，但对于乘除法不封闭. 当然，以上这两个数集都不是数域.

最后，我们指出数域的一个重要性质. 所有的数域都包含有理数域作为它的一部分. 事实上，设P是一个数域，由定义，P含有1. 根据P对于加法的封闭性，$1+1=2$, $2+1=3$, $\cdots$, $n+1=$ $=n+1$, $\cdots$全在P中，换句话说，P包含全体自然数. 又因0在P中，再由P对减法的封闭性，$0-n=-n$也在P中，因而P包含全体整数. 任何一个有理数都可以表成两个整数的商，由P对除法的封闭性即得上述结论.

§2. 一元多项式

一元多项式以及它的运算是我们熟悉的，这里只作一个简单的介绍.

在对多项式的讨论中，我们总是以一个预先给定的数域P作为基础. 设x是一个符号(或称文字)，我们有

定义2 设n是一非负整数. 形式表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \tag{1}$$

其中$a_0,a_1,\cdots,a_n$全属于数域P，称为**系数在数域P中的一元多项式**，或者简称为**数域P上的一元多项式**.

在多项式(1)中，a_ix^i称为**i次项**，a_i称为**i次项的系数**. 以后我们用$f(x),g(x),\cdots$或$f,g,\cdots$等来代表多项式.

定义3 如果在多项式$f(x)$与$g(x)$中，同次项的系数全相等，那么$f(x)$与$g(x)$就称为**相等**，记为

$$f(x)=g(x)$$

系数全为零的多项式称为**零多项式**，记为0.

在(1)中，如果$a_n\neq0$，那么a_nx^n称为多项式(1)的**首项**，a_n称为**首项系数**，n称为多项式(1)的**次数**. 零多项式是唯一不定义次数的多项式. 多项式$f(x)$的次数记为

$$\partial(f(x))^{①}.$$

我们知道，两个多项式可以相加、相减、相乘. 例如，

$$(2x^2-1)+(x^3-2x^2+x+2)=x^3+x+1$$

$$\begin{aligned}(2x^2-1)(x^2-x+1)&=2x^4-2x^3+2x^2-x^2+x-1\\&=2x^4-2x^3+x^2+x-1\end{aligned}$$

显然，数域P上的两个多项式经过加、减、乘等运算后，所得结果仍然是数域P上的多项式.

为了便于计算和讨论，我们常常用和号来表出多项式.

---

① 因为零多项式不定义次数，所以在用符号$\partial(f(x))$时，总是假定$f(x)\neq0$. 以后就不一一说明了.

设 $$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$
$$g(x)=b_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$$
是数域P上两个多项式．那么可以写成

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

$$g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$$

在表示多项式$f(x)$与$g(x)$的和时，如$n\geqslant m$，为了方便起见，在$g(x)$中令 $b_n=b_{n-1}=\cdots=b_{m+1}=0$．于是

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots\\&\quad+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\\&=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i\end{aligned}$$

而$f(x)$与$g(x)$的乘积为

$$\begin{aligned}f(x)\cdot g(x)&=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}\\&\quad+\cdots+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0.\end{aligned}$$

其中s次项的系数是

$$a_sb_0+a_{s-1}b_1+\cdots+a_1b_{s-1}+a_0b_s=\sum_{i+j=s}a_ib_j$$

所以$f(x)g(x)$可表成

$$f(x)g(x)=\sum_{s=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)x^s.$$

对于多项式的加减法，不难看出

$$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant\max(\partial(f(x)),\partial(g(x)))①$$

---

① $\max(n,m)$ 代表 n,m 中较大的一个数。

对于多项式的乘法，可以证明，如果 $f(x)\neq0, g(x)\neq0$，那么 $f(x)g(x)\neq0$，并且

$$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$$

事实上，设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$$

其中 $a_n\neq0, b_m\neq0$，于是 $f(x)g(x)$ 的首项是

$$a_nb_mx^{n+m}$$

显然 $a_nb_m\neq0$，因之，$f(x)g(x)\neq0$ 而且它的次数就是 $n+m$.

由以上证明还看出，多项式乘积的首项系数就等于因子首项系数的乘积.

显然，上面得出的结果都可以推广到多个多项式的情形.

和数的运算一样，多项式的运算也满足下面的一些规律.

1. 加法交换律：

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$$

2. 加法结合律：

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$$

3. 乘法交换律：

$$f(x)g(x)=g(x)f(x)$$

4. 乘法结合律：

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$$

5. 乘法对加法的分配律：

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$$

这些规律都很容易证明. 下面只给出乘法结合律的证明.

设 $\qquad f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i;\quad g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j;\quad h(x)=\sum_{k=0}^{l}c_kx^k$

现在来证

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$$

等式左边，$f(x)g(x)$中 s 次项的系数为

$$\sum_{i+j=s}a_ib_j$$

因此左边 t 次项的系数为

$$\sum_{s+k=t}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)c_k=\sum_{i+j+k=t}a_ib_jc_k$$

在右边，$g(x)h(x)$中 r 次项的系数为

$$\sum_{j+k=r}b_jc_k$$

因此右边 t 次项的系数为

$$\sum_{i+r=t}a_i\left(\sum_{j+k=r}b_jc_k\right)=\sum_{i+j+k=t}a_ib_jc_k$$

与左边 t 次项的系数一样，所以左、右两边相等，这就证明了乘法满足结合律.

对于多项式的乘法，我们还可以证明

6. 乘法消去律：

如果 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$ 且 $f(x)\neq 0$，那么

$$g(x)=h(x)$$

因为由 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$ 有

$$f(x)(g(x)-h(x))=0$$

而 $f(x)\neq 0$，所以 $g(x)-h(x)=0$，也就是

$$g(x)=h(x)$$

最后我们引入

定义 4 所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体，称为数

域P上的一元多项式环，记为$P[x]$，P称为$P[x]$的系数域。

§3. 整除的概念

这一节以及后面各节的讨论都是在某一固定的数域P上的多项式环$P[x]$中进行的，以后就不每次重复说明了.

在一元多项式环中，可以作加、减、乘三种运算，但是乘法的逆运算——除法——并不是普遍可以做的. 因之整除就成了两个多项式之间的一种特殊的关系.

在中学代数中我们学过，怎样用一个多项式去除另一个多项式，求得商和余式. 例如，设

$$f(x)=3x^3+4x^2-5x+6$$

$$g(x)=x^2-3x+1$$

我们可以按下面的格式来作除法：

$$\begin{array}{r|r|l} x^2-3x+1 & 3x^3+4x^2\ \ -5x+6 & 3x+13 \\ & \underline{3x^3-9x^2\ \ +3x\quad\ \ } & \\ & 13x^2\ \ -8x+6 & \\ & \underline{13x^2-39x+13} & \\ & 31x-7 & \end{array}$$

于是求得商为$3x+13$，余式为$31x-7$. 所得结果可以写成

$$3x^3+4x^2-5x+6=(3x+13)(x^2-3x+1)+(31x-7)$$

这个求法实际上具有一般性，下面就按这个想法来证明一元多项式环的一个基本性质.

带余除法 对于$P[x]$中任意两个多项式$f(x)$与$g(x)$，其中$g(x)\neq 0$，一定有$P[x]$中的多项式$q(x)$，$r(x)$存在，使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x) \tag{1}$$

成立，其中$\partial(r(x))<\partial(g(x))$或者$r(x)=0$，并且这样的$q(x)$，