目　　录

第一章　线性代数

§1　行　列　式

提　要

定义1　在自然数1，2，…，n的一个排列$(i_1, i_2, \cdots i_n)$中，任取一对数，若大者在前，则说此二数有一个逆序，且称为该排列的一个逆序数对，否则称为顺序数对。排列$(i_1, i_2, \cdots i_n)$中所有的逆序数对的个数之和，称为此排列的**逆序数**，记为$[i_1, i_2, \cdots i_n]$，若逆序数为奇(偶)数的排列称为**奇(偶)排列**。

定理1　将某排列$(i_1, \cdots, i_n)$中任意两个元素互换，则改变其奇偶性。

定义2　由n^2个数$a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$排成的$n$行$n$列的符号表为

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}(\text{或记作}\ |a_{ij}|_{n\times n}),$$

称作**n阶行列式**，它表示数$\sum\limits_{(i_1,\cdots,i_n)}(-1)^{[i_1\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}$，这里求和号表示对$(1, \cdots, n)$的所有排列$\{(i_1, \cdots, i_n)\}$求和。

称行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

为上述行列式A的**转置**记为A'。

定理2 行列式有以下主要性质：(1)$A'=A$；(2)A的某一行(列)的所有元素同乘常数k所得行列式等于k乘以A；(3)对换A中任意两行（或两列)的元素，所得行列式等于$-A$；(4) 把行列式某行(列) 乘同一数加到另一行(列)，其值不变；(5)两行列式只有一行(列)不相同时，则两行列式之和等于相同行（列)不变而不同行(列)元素对应相加所成的新行列式；(6)若行列式某一行(列)等于另一些行(列)的线性组合，则其值为0。

定义3 在n阶行列式A中任选k行，设为$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，$k$列设为$1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n$，位于这些行和列交点上的 k^2 个元素照原来先后位置构成的k阶行列式，称为A的一个**k阶子式**，记为$D\begin{pmatrix} i_1, & \cdots, & i_k \\ j_1, & \cdots, & j_k\end{pmatrix}$；在划去上述$k$行，$k$列后余下的$n-k$阶行列式称为 $D\begin{pmatrix} i_1, & \cdots, & i_k \\ j_1, & \cdots, & j_k\end{pmatrix}$ 的**余子式**，记为$M\begin{pmatrix} i_1, & \cdots, & i_k \\ j_1, & \cdots, & j_k\end{pmatrix}$；称$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}M\begin{pmatrix} i_1, & \cdots, & i_k \\ j_1, & \cdots, & j_k\end{pmatrix}$为其**代数余子式**，记为 $\widetilde{M}\begin{pmatrix} i_1, & \cdots, & i_k \\ j_1, & \cdots, & j_k\end{pmatrix}$，特别当$k=1$，即将第$i$行、第$j$列元素划去后所得 $n-1$ 阶余子式，称为 a_{ij} **的余子式**，记 M_{ij}，而$(-1)^{i+j}M_{ij}\triangleq A_{ij}$，称为$a_{ij}$**的代数余子式**。当$i_1=j_1$，$\cdots$，$i_k=j_k$时称$k$阶子式$D\begin{pmatrix} i_1, & \cdots, & i_k \\ i_1, & \cdots, & i_k\end{pmatrix}$为**k阶主子式**。

定理3 设A为n阶行列式，则$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{kj}=A\delta_{ij}$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$。

更一般有拉普拉斯展开定理：

$$A=\sum_{(j_1,\cdots j_k)} D\begin{pmatrix} i_1, & \cdots, & i_k \\ j_1, & \cdots, & j_k\end{pmatrix}\widetilde{M}\begin{pmatrix} i_1, & \cdots, & i_k \\ j_1, & \cdots, & j_k\end{pmatrix}.$$

这里$(i_1, \cdots, i_k)$为A中某固定k行，Σ为对$1, \cdots, n$中所有取 k 个元素$(j_1, \cdots, j_k)$其中$j_1<j_2<\cdots<j_k$的组合求和。

定理4 （克莱姆法则)，设线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

系数所成行列式 $D=|a_{ij}|_{n\times n}\neq 0$，则该方程组存在唯一解，$x_j=\dfrac{D_j}{D}$ $(j=1,2, \cdots, n)$，其中D_j为将D中第j列元素 $a_{1j}, \cdots, a_{nj}$ 换为$b_1, \cdots, b_n$所得行列式.

例　题

1　选择i与k，使1)$1i25k4897$成奇排列．2)$1274i56k9$成偶排列．

解　1)　由题意i，k只有两种选择：$i=3$，$k=6$或$i=6$，$k=3$。在前一情况，排列132564897的逆序对为(3，2)，(5，4)，(6，4)，(8，7)，(9，7)，故[132564897]＝5，即为所求。

2)　由题意i，k可能选择：$i=3$，$k=8$或$i=8$，$k=3$，对前一情况，排列127435689的逆序对：(7，4)，(7，3)，(7，5)，(7，6)，(4，3)，故[127435689]＝5．从而由定理1有127485639成偶排列．

注　解本类问题时，一般取小数在先，大数在后，这样逆序对容易求些．如果符合要求，即为所求；如果不合要求，则由定理1另一情况必符合要求．

2　试求排列$n, n-1, \cdots, 2, 1$的逆序数，并讨论它的奇偶性。

解　在此排列中，以i为第一数的逆序数对为$(i,i-1), \cdots, (i, 1)$共有$i-1$个$(i=1, 2, \cdots, n)$，从而

$$[n, n-1, \cdots, 1]=\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

由于n，$n-1$不能同时为偶(奇)数，故$[n, n-1, \cdots, 1]$为偶

数的充要条件是$\frac{1}{2}n(n-1)$为偶数即$n=4m$或$n=4m+1$

注 在求某排列的逆序数时，总是从第1个数开始，逐个往后求出逆序数再相加。

3 设排列i_1，…，i_n的逆序数为I，求排列i_n，…，i_1的逆序数。

解 在排列i_1，…，i_n中任取二数i_k，i_l，$(k<l)$，则数对(i_k, i_l)或为逆序对或为顺序对，而该排列所有数对的总和为C_n^2，故$(i_1, \cdots, i_n)$的顺序数对共有C_n^2-I个，而$(i_n, \cdots, i_1)$的逆序数对正好是$(i_1, \cdots i_n)$中的顺序数对，从而$[i_n, \cdots, i_1]=C_n^2-I$。

注 第二题可作为本题的特例。因$[1, 2, \cdots n]=0$，所以

$$[n, n-1, \cdots, 1]=C_n^2-[1, 2, \cdots, n]=\frac{1}{2}n(n-1).$$

4 写出5阶行列式中所有形为$a_{14}a_{23}a_{3\alpha_1}a_{4\alpha_2}a_{5\alpha_3}$的项，若将其总和提出公因子$a_{14}a_{23}$则所得是什么。

解 为使$a_{14}a_{23}a_{3\alpha_1}a_{4\alpha_2}a_{5\alpha_3}$为5阶行列式中的项当且仅当$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$为1，2，5的一个排列，且易知$[4, 3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]=3+2+[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]=5+[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$。其中$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$为排列$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$相对$(1, 2, 5)$的逆序数，从而这些项的总和为

$$\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(-1)^{[4,3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]}a_{14}a_{23}a_{3\alpha_1}a_{4\alpha_2}a_{5\alpha_3}$$

$$=-a_{14}a_{23}\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(-1)^{[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]}a_{3\alpha_1}a_{4\alpha_2}a_{5\alpha_3}$$

$$\xlongequal{\text{由行列式定义}}-a_{14}a_{23}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

5　证明n个数码1，2，3，…，n的所有排列中，奇偶排列各占一半。

证　考虑n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1\cdots1 \\ 1 & 1\cdots1 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & 1\cdots1 \end{vmatrix},$$

由定理2(6)，易知$D=0$，又由行列式定义，知

$D=\sum\limits_{(i_1\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}$。上述和式的每一项的绝对值皆为1，而$D=0$，这就意味着和式中1和$-1$的项数相等，亦即1，2，…，$n$的所有排列中，奇偶排列各占一半。

6　由行列式定义证明

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

证　由定义在项$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}a_{5i_5}$中$(i_3,\ i_4,\ i_5)$为从1，2，3，4，5中取3个元素的某一排列，从而至少有一个元素取自3，4，5中，不妨设为i_3，则$a_{3i_3}=0$，从而$a_{1i_1}\cdots a_{5i_5}$中至少有一个因子为零，所以$\Delta=0$。

注　(1) 读者可将本题推广到$2n+1$阶行列式的情形。(2) 本题用拉普拉斯展开定理亦可直接证明。

7　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\-2&5&-1&3\\3&-1&5&-5\\2&8&-7&-10\end{vmatrix}.$$

解 分别将第1行的2、-3、-2倍加到第2、3、4行，有

$$D=\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&26&-34&-26\\0&26&-33&-24\end{vmatrix}=13\begin{vmatrix}-1&25&17\\2&-34&-26\\2&-33&-24\end{vmatrix}.$$

又分别将第1行的2倍加到第2，3行，得到

$$D=13\begin{vmatrix}-1&25&17\\0&16&8\\0&17&10\end{vmatrix}=-13\times8\begin{vmatrix}2&1\\17&10\end{vmatrix}$$

$$=-13\times8\times3=-312.$$

注 此题解法虽然简单，且无特殊技巧，但却是一般方法，一个行列式（特别是数字行列式），如果没有别的特殊方法来计算，则只能象此题这样用某一行(列)去消各行(列)，使得这些行（列)在同一列(行)中的元素全部为零。这就可以用按列展开的公式使原行列式降一阶，逐步下去，直至能便于直接计算为止。

8 求证：一个n阶行列式Δ，若其元素满足$a_{ij}=\overline{a_{ji}}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则Δ必为实数。

证 由于$a_{ij}=\overline{a_{ji}}$故$\Delta'=|a_{ij}|'=|a_{ji}|=|\overline{a_{ij}}|=\overline{\Delta}$。

又由定理2(1)：$\Delta'=\Delta$，所以$\Delta=\overline{\Delta}$。从而Δ的虚部为零，这说明Δ必为实数。

9　求方程

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}$$

的根。

解　将第一行乘-1，再加到以下各行有

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1}-x \end{vmatrix}.$$

若$a_1=0$，则$\Delta_n\equiv 0$，一切数x均为方程的解。

若$a_1\neq 0$，则$\Delta_n=a_1\prod\limits_{i=1}^{n-1}(a_i-x)=0$，所以方程有$n-1$个解：$x_i=a_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$。

10　设

$$f(t)=\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

证明　$$f'(t)=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a'_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a'_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a'_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

证　由行列式展开式有

$$f(t)=\sum_{(i_1\cdots i_n)}(-1)^{[i_1\cdots i_n]}a_{1i_1}(t)\cdots a_{ni_n}(t).$$

又由求导法则，得到

$$f'(t)=\sum_{(i_1\cdots i_n)}(-1)^{[i_1\cdots i_n]}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{1i_1}(t)\cdots a'_{ji_j}(t)\cdots a_{ni_n}(t)\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{(i_1\cdots i_n)}(-1)^{[i_1\cdots i_n]}a_{1i_1}(t)\cdots a'_{ji_j}(t)\cdots a_{ni_n}(t)\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a'_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a'_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a'_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

注 本题亦可用数学归纳法证明：当$n=1$时，结论显见成立．设$n-1$时成立，则证n时成立，事实上

$$f'(t)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}\right)'=\sum_{i=1}^{n}a'_{i1}A_{i1}+\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A'_{i1}$$

$$=\begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a'_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a'_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a'_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a'_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a'_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

11 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解法一 分别从第2，3，…，n行中减去第1行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-x & 0 & 0 & & x-a \end{vmatrix},$$

将第2，3，…，n列加到第1列，有

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

解法二 将第2，3，…，n行加到第1行，便得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}.$$

再将第1行的$-a$倍加到第2，3，…，n行，有

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

解法三 将行列式D_n添加一行一列，但使其值不变即

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a & a & a & \cdots & a\\ 0 & x & a & a & \cdots & a\\ 0 & a & x & a & \cdots & a\\ 0 & a & a & x & \cdots & a\\ 0 & a & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}.$$

将第1行乘以-1，加到以下各行得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}.$$

当$x=a$，$D_n=0$。

当$x\neq a$，各行乘以$\dfrac{-a}{x-a}$加到第1行得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+\dfrac{na}{x-a} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & & x-a \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\frac{na}{x-a}\right)(x-a)^n=(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.$$

显见此结果对一切 x 均成立。

解法四 利用定理2(5)，建立D_n的递推公式

$$D_n=\begin{vmatrix} x-a+a & a & \cdots & a \\ 0+a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0+a & a & & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ 0 & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a & & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & & x \end{vmatrix}=(x-a)D_{n-1}+\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}.$$

故有递推公式$D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}$,

$$(x-a)D_{n-1}=(x-a)^2D_{n-2}+a(x-a)^{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(x-a)^{n-2}D_2=(x-a)^{n-1}D_1+a(x-a)^{n-1},$$

其中$D_1=x$，所有等式两边分别相加，则得

$$D_n=(x-a)^{n-1}[D_1+(n-1)a]$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

注 从此题的解法中，可大致归纳出计算 n 阶行列式的基本技巧：

(i)利用行列式的性质把不便于直接计算的形状化为便于直接计算的形状，如对角形，三角形；(ii)设法将原行列式表成与原行列式同形但低阶的行列式的函数，从而建立递推公式，最后直接算出阶为1或2时的情形；(iii)为此必需灵活地运用其它的技巧，如加边，折开，以造成(i)，(ii)中的情形。

12 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \gamma & \alpha & \beta & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

解 如果$\beta\gamma=0$，显见$D_n=\alpha^n$。如果$\beta\gamma\neq0$，考虑二次三项式$x^2-2x+\beta\gamma$，它必有两个根x_1，x_2（可以是复数）且$x_1+x_2=\alpha$，$x_1x_2=\beta\gamma$。将D_n按第1行展开，有$D_n=\alpha D_{n-1}-\beta\gamma D_{n-2}$，

于是 $D_n-x_1D_{n-1}=x_2D_{n-1}-x_2x_1D_{n-2}=x_2(D_{n-1}-x_1D_{n-2})$。

同理 $D_n-x_2D_{n-1}=x_1(D_{n-1}-x_2D_{n-2})$，$(n=3,\ 4,\ \cdots)$

记$E_n=D_n-x_1D_{n-1}$，$F_n=D_n-x_2D_{n-1}$，便有$E_n=x_2E_{n-1}$，$F_n=x_1F_{n-1}$，$E_2=x_2^2$，$F_2=x_1^2$，因此$E_n=x_2^n$，$F_n=x_1^n(n=2,3,\cdots)$

从而有

$$\begin{cases} D_n-x_1D_{n-1}=x_2^n, \\ D_n-x_2D_{n-1}=x_1^n \quad (n=2,\ 3,\ \cdots). \end{cases}$$

如果$x_1\neq x_2$，即$\alpha^2-4\beta\gamma\neq0$时，解此方程，即得

$$D_n=\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2},\quad x_1,\ x_2=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2}.$$

如果$x_1=x_2$，即$\alpha^2-4\beta\gamma=0$时，有

$$D_n=x_1D_{n-1}+x_1^n\quad(n=2,\ 3,\ \cdots),$$

$D_1=\alpha=x_1+x_2=2x_1$，不难归纳推出

$$D_n=(n+1)x_1^n=(n+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n.$$

注 这题使我们看到，有时建立了递推公式以后，要算出最后结果还需要有灵活的技巧。这往往是应用递推公式计算的难点，除本题方法外，常见技巧见例题11和习题。

13 证明下列等式

(1) $$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^{n-i-1};$$

(2) $$D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha;$$

(3) $$D_n=|a_{ij}+x|_{n\times n}=|a_{ij}|_{n\times n}+x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}.$$

其中A_{ij}是a_{ij}的代数余子式。

证 (1) 按最后一行展开得$D_n(x)=x\cdot D_{n-1}(x)+a_{n-1}$。对$D_{n-1}(x)$同样施行上述方法，逐步递推下去利用$D_1(x)=a_0$有

$$\begin{aligned} D_n(x)&=(D_{n-2}(x)x+a_{n-2})x+a_{n-1}=D_{n-2}(x)x^2+a_{n-2}x+a_{n-1} \\ &=\cdots=D_1(x)x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^1+a_{n-1} \\ &=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^{n-i-1}. \end{aligned}$$

(2) 用数学归纳法。显见$D_1=\cos\alpha$，假设 $D_k=\cos k\alpha$ $(k=1, \cdots, n-1)$，则证 n 时等式成立，将D_n按第n行展开得

$$D_n = 2\cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2} = 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha$$
$$= \cos n\alpha + \cos(n-2)\alpha - \cos(n-2)\alpha = \cos n\alpha.$$

(3) 按行列式求导公式，将$D_n(x)$对x求导得

$$D_n'(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} & \\ \begin{vmatrix} a_{11}+x & \cdots & 1 & \cdots & a_{1n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+x & \cdots & 1 & \cdots & a_{in}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & \cdots & 1 & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} & i \end{array}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 1 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第}i\text{列展开}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \ (\text{常数}).$$

又$D_n(0) = |a_{ij}|_{n\times n}$，解此微分方程得

$$D_n(x) - D_n(0) = x\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}, \ \text{即}$$

$$D_n(x) = |a_{ij}+x|_{n\times n} = |a_{ij}|_{n\times n} + x\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

注 这里介绍了三种证明行列式恒等式的方法：递推法，归纳法，求导法。第三种方法比较特殊，但对一些特殊情况采用此法比较方便，一般用一、二两种方法。如果结果已知，要验证等式采用归纳法比较方便。但结果不知道时，一般通过递推法找出递推关系再进一步求解。对第(3)题我们也可用定理2(5)去做。

14 证明范德蒙行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

证 用数学归纳法，当$n=2$时$V_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$。设等式对于$V_{n-1}$成立，考虑$V_n$。依次从$V_n$的第$i$行减去第$i-1$行的$x_1$倍($i=n,\ n-1,\ \cdots,\ 2$)，得到

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2^2-x_1x_2 & \cdots & x_n^2-x_1x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)V_{n-1}$$

$$\xlongequal{\text{归纳假设}}(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

注 在许多问题中都要经常用到范德蒙行列式，易知$V_n=0$当且仅当至少有一对i，j，$i\neq j$，使得$x_i=x_j$。

15 设a_1，a_2，…，a_n是互不相同的数，b_1，b_2，…，b_n