OLYMPIC MATHS

奥林匹克数学训练题集

高三分册

钱展望 朱华伟/编著

湖北教育出版社

与《奥林匹克数学》高三分册配套

奥林匹克数学训练题集 高三分册 钱展望 朱华伟/编著 湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学训练题集. 高三分册/钱展望,朱华伟编著.
—武汉:湖北教育出版社,2002
(奥林匹克数学系列丛书)
ISBN 7-5351-3151-4

Ⅰ.奥… Ⅱ.①钱…②朱… Ⅲ.数学课-高中-习题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011129 号

出版 发行:湖北教育出版社
网址:http://www.hbedup.com
武汉市青年路 277 号
邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北新华印务有限公司 (430034·武汉市解放大道 145 号)
开 本:850mm×1168mm 1/32 6.25 印张
版 次:2002 年 3 月第 1 版 2002 年 3 月第 1 次印刷
字 数:154 千字 印数:1-5 000

ISBN 7-5351-3151-4/G·2557 定价:9.50 元

目 录

测试题一

1. 在棱长为 7 的正方体内有 342 个点，你能将一个棱长为 1 的正方体放入大正方体中使得小正方体内部不含任何选出的点吗？

2. 设 n 为一个不被 2,5 整除的自然数，求证必有一个 n 的倍数全部由数字 1 组成.

3. 某城中的道路每三条交于一个路口. 求证：从任一路口 A_1 出发，沿着 A_1 处的某条路走到 A_2，在 A_2 处向右拐到达下一个路口 A_3，在 A_3 处向左拐，继续下去，其中交替地向左向右，则你必会回到 A_1.

4. 在 3 厘米 × 4 厘米的矩形中有 6 个点. 证明：存在两个点，它们之间的距离不大于 $\sqrt{5}$ 厘米.

5. 给出一个集合，该集合由十个互不相同的两位十进制正整数组成. 证明：这个集合必有两个无共同元素的子集，两子集中各数之和相等.

6. 证明：在任意一个九边形中，必存在两条对角线，它们之间的夹角小于 $7°$.

7. $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是分布在空间中的点，它们中的任一点与 P 的距离小于它与其余所有点 P_i 的距离. 求证：$n < 15$.

8. 集合 M 由 1985 个不等的正整数组成，其中每个正整数的素因子均不大于 26. 证明：M 至少含有一个由 4 个不同的数组成的子集，这 4 个数之积为某整数的 4 次幂.

9. 证明，如果直径为 5 的圆内有十个点，则其中必有两个点，它们的距离小于 2.

10. 一个体育代表团共有 997 名运动员，他们着装运动服上的号码数两两不相同，但都小于 1992. 证明：至少有一名运动员的号码数恰等于另外两名运动员的号码数之和.

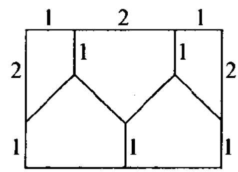
解 答

1. **解** 可以.将大正方体分为 $7^3=343$ 个单位正方体.由于大正方体内仅有342个点,故至少有一个小正方体内部是空的.

2. **证明** 考虑 n 个整数 $1,11,\cdots,11\cdots1$ 被 n 除的余数,共有 n 个可能的余数 $0,1,\cdots,n-1$.若余数0出现,则问题解决;否则,其中必有两数被 n 除余数相同,则它们的差 $11\cdots100\cdots0$ 被 n 整除.由于 n 不被2,5整除,故我们可去掉末尾的0,使剩下的数都由1组成且可被 n 整除.

3. **证明** 注意到此人某两段路的行程即可决定此人前前后后所有的行程.由于道路是有限的,故必有两次此人在相同的方向上走过某相邻两段路,从而此人所走过的路线是纯循环的,必有某次会回到 A_1.

4. **证明** 如图所示,把矩形分成5个区域.根据抽屉原理,必有两个点在同一区域(包括边界),因而它们的距离不超过 $\sqrt{5}$ cm.



(第4题)

5. **证明** 给出的集合 M 共有 $2^{10}-1=1023$ 个非空子集.每个子集中的数的和 $\leqslant 10\times99=990$,根据抽屉原理其中必有两个子集所包含的数的和相等.若两个子集有公共元,将公共元划去,产生的两个子集,所含数的和相等.

6. **证明** 任意一个九边形都有 $\frac{9\cdot6}{2}=27$ 条对角线.过平面上的任意一点 O 作与这些对角线分别平行的27条直线,这些直线分割以 O 为顶点的周角 $360°$ 为54个角.显然,这些角中最小的一个不大于 $\frac{360°}{54}<7°$.因为在角的两边作平行移动时,角的大小保持不变,故与最小的一个角的两条边平行的对角线之间的夹角小于 $7°$,命题获证.

7. **证明** 若存在 $i\neq j$ 使 $\angle P_iPP_j\leqslant60°$,则 P_iP_j 不会比 PP_i 与 PP_j 都大,矛盾.故对一切 $i\neq j$,$\angle P_iPP_j>60°$.以 P 为球心作一个单位球,则对每个 i,单位球上满足 $\angle P_iPQ\leqslant30°$ 的点 Q 组成球冠,且这 n 个球冠两两不会相交.又每个这样的球冠表面积为

$$2\pi rh=2\pi(1-\cos30°)=\pi(2-\sqrt{3}),$$

从而,有

$$n\pi(2-\sqrt{3})\leqslant4\pi.$$

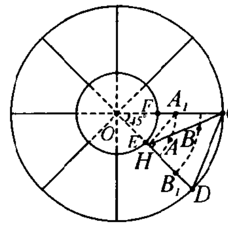
由此可得 $n<15$.

8. **证明** 小于 26 的素数为 2,3,5,7,11,13,17,19,23 共 9 个,依题设,M 中每一数具有标准形式:$2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}\cdots23^{\alpha_9}\cdots$,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_9$ 为非负整数.注意到 α_i 按奇偶来分只有两种可能,所以 9 个指数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_9$ 的奇分配共 $2^9=512$ 种,根据抽屉原理,从 M 中可以找到一对数,它们的指数的奇偶性相同,不仅如此,将找到的数取出后,还可以继续在 M 中选出这样的数对,直至选出 737 对,每一对这样的数的乘积的形式为$(2^{\beta_1}3^{\beta_2}\cdots23^{\beta_9})^2$,其中 $\beta_i(1\leqslant i\leqslant9)$为非负整数.同样,根据抽屉原理,上述 737 个乘积中必有两数的指数中的 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_9$ 与 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_9'$的奇偶性相同,这两个数的积为

$$(ab)(cd)=(2^{r_1}3^{r_2}\cdots23^{r_9})^4,$$

其中 r_i 为非负整数,所以 a,b,c,d 的积为某整数的 4 次方.

9. **证明** 在所给的以 O 为圆心的圆中作一个直径为 2 的同心圆.如果这个圆内有两个给定点,则这两点间的距离小于 2,从而命题成立.否则在两个圆周之间的环形区域中至少有 9 个点,将这环域用过点 O 的射线分成 8 个相等的环状扇形(图中相邻射线间的夹角为 45°),则一定有两个给定的点 A 与 B 落在同一环状扇形 $CDEF$ 上.在半径 OC 与 OD 上各取点 A_1 与 B_1,使得 $OA_1=OA$, $OB_1=OB$.由于 $\angle AOB<\angle A_1OB_1$,根据余弦定理,有 $AB\leqslant A_1B_1$.易知



(第 9 题)

$$A_1B_1\leqslant\max\{A_1D,A_1E\}.$$

事实上,点 B_1 在直线 DE 上,并且介于 A_1 在 OD 上的投影 H 和点 D(或点 E,不妨设为 D)之间,因此斜线 A_1D 在 OD 上的投影不小于斜线 A_1B_1 的投影 HB_1,从而有 $A_1B_1\leqslant A_1D$.同理可得 $DA_1\leqslant\max\{DF,DC\}$, $EA_1\leqslant\max\{EF,EC\}$.由

$$EF^2<CD^2=OC^2+OD^2-2OC\cdot OD\cos45^\circ$$

$$=2\cdot\frac{25}{4}-\frac{25\sqrt{2}}{4}<\frac{25}{2}-\frac{25\cdot1.4}{4}=3.75<4.$$

$$EC^2=FD^2=OF^2+OD^2-2OF\cdot OD\cos45^\circ$$

$$=1+\frac{25}{4}-\frac{5\sqrt{2}}{2}<7.25-\frac{5\cdot1.4}{2}=3.75<4.$$

可得到 $AB\leqslant A_1B_1\leqslant\max\{DF,DC,EF,EC\}<2$.

10. **证明** 设这 997 名运动员的号的数依小到大排列是 $x_1<x_2<x_3<\cdots<$

x_{997},其中每个数都小于 1992. 再作差 $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \cdots, x_{997} - x_1$ 共有 996 个数,它们也都小于 1992,总计共有 1993 个小于 1992 个数. 根据抽屉原理,其中必有两数相等,但 $x_i \neq x_j(i \neq j)$,且 $x_i - x_1 \neq x_j - x_1$,故只能是某个号码 x_n 与 $x_k - x_1$ 相等.

当 $n \neq 1$ 时,即 $x_k = x_1 + x_n$,表明恰有一运动员号码 x_k 等于另两运动员号的 x_1 与 x_n 之和.

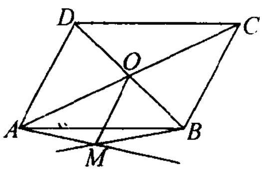
当 $n = 1$ 时,即 $x_k - x_1 = x_1$. 这时删去 $x_k - x_1$,其余 1992 个数,其值都小于 1992,根据抽屉原理它们之中仍至少有两个相等,并且只能是某个号码 x_q 与 $x_p - x_1(p \neq k)$相等. 即 $x_p = x_1 + x_q$. 这时,可证 $q \neq 1$. 否则,$x_p = x_1 + x_1$,推出 $x_p = x_k$ 矛盾. 因此,具有运动员号码 x_p 恰等于另两个运动员运动服号的 x_1 与 x_q 之和.

综上所述,命题获证.

测试题二

1. 设 P 是正方形 $ABCD$ 内一动点，P 到 A、B、C 三点的距离之和的最小值是 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$，试求此正方形的边长.

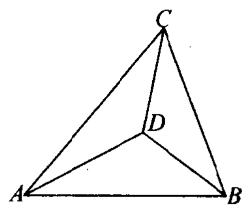
2. 如图，在 $\square ABCD$ 中，$AB > AD$，$AC:BD = k$，射线 AM、AD 关于直线 AC 对称，射线 BM、BC 关于直线 BD 对称，M 为 AM 和 BM 的交点，求 $AM:BM$.



（第 2 题）

3. 如图，设 D 为锐角 $\triangle ABC$ 内一点，$\frac{1}{2}\angle ADB = \angle ACB = \alpha$，且 $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. 求证：

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$



（第 3 题）

4. P 点为正方形 $ABCD$ 内部且满足以下条件的点：

(i) $PA < PB < PC$；

(ii) PA、PB、PC 的长成等差数列；

(iii) PB、PD、PC 的长成等比数列.

证明：这样的 P 点是惟一存在的.

5. $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，P 为 $\overset{\frown}{ACB}$ 上动点，X、Y 分别在射线 AP、BP 上，且 $AX = AC$，$BY = BC$，证明：XY 过一定点.

6. 平面上给定 $\triangle ABC$，$AB = \sqrt{7}$，$BC = \sqrt{13}$，$CA = \sqrt{19}$，分别以 A、B、C 为圆心作圆且半径依次为 $\frac{2}{3}$、$\frac{1}{3}$、1. 试证：在这三个圆上各存在一点 A'、B'、C' 使得 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

7. 试问：是否存在这样的平行四边形 $ABCD$ 具有如下两个性质：

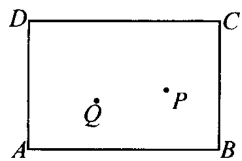
(i) 两条对角线 AC 与 BD 的长是互素的正整数；

(ii)若分别以 AC、BD 为对称轴分别作出$\triangle ACD$ 和$\triangle BCD$ 的对称图形$\triangle ACD'$ 和$\triangle BDC'$，则线段 BD' 和 AC' 的长也是互素的正整数.说明理由.

8. (1)把$\triangle ABC$ 绕着外接圆圆心 O 旋转小于 180°的某一角度得到$\triangle A_1B_1C_1$，对应边 AB、A_1B_1 交于 C_2、BC、B_1C_1 交于 A_2、CA、C_1A_1 交于 B_2. 证明：$\triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle ABC$.

(2)四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，把它绕着外接圆的圆心旋转小于 180°的某一角度得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$. 证明：对应边所在直线 AB 与 A_1B_1、BC 与 B_1C_1、CD 与 C_1D_1、DA 与 D_1A_1 的四个交点是平行四边形的顶点.

9. 已知$\triangle A_1A_2A_3$ 不是等边三角形，M_i 是边 $A_{i+1}A_{i+2}$($i=1,2,3$, $A_4=A_1A_5=A_2$)的中点，T_i 为$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆与 A_iA_{i+1} 边的切点，S_i 是 T_i 关于$\angle A_i$ 的平分线的对称点，求证：M_1S_1、M_2S_2、M_3S_3 三线共点.



(第 10 题)

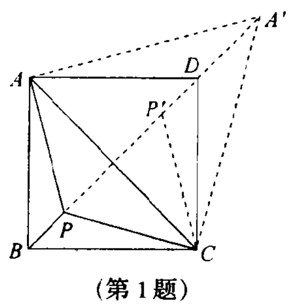
10. 如图，设 $ABCD$ 是一矩形台球桌，P、Q 是两上球. 现把 P 球击出，依次碰撞 BC、CD、DA、AB 后，再击中 Q 球，求 P 球所经路线.

解　答

1. **解**　如图，将$\triangle APC$ 旋转 60°至$\triangle A'P'C$，则$\triangle AA'C$、$\triangle PP'C$ 都是正三角形，$PC=PP'$，A'为定点，$AP=A'P'$. 因此，

$$PA+PB+PC=A'P'+P'P+PB \geqslant A'B. \quad ①$$

又当$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$时，$B$、$P$、$P'$、$A'$共线，①式取等号. 此时，$A$、$C$ 关于 BA' 对称，易知 $A'B=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，即为 P 到 A、B、C 的最小距离之和为 $A'B=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，故 $BC=2$，即为所求.



(第 1 题)

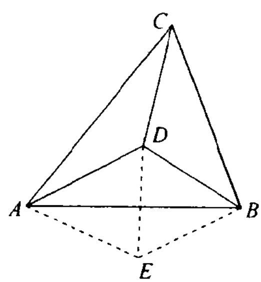
2 **解** 记$\angle DAO=\alpha$，$\angle CBO=\beta$，则$\angle ADO=\beta$，$\angle AOB=\alpha+\beta$，

$\angle AMB=2\pi-\angle MAO-\angle MBO-\angle AOB=2\pi-2\alpha-2\beta$.

注意到点 O 到 AD、AM、BC、BM 距离相等，可知 OM 平分$\angle AMB$，所以$\angle AMO=\frac{1}{2}\angle AMB=\pi-\alpha-\beta=\angle AOD$.

同理
$$\angle BMO=\angle BOC.$$
于是$\triangle AOD\backsim\triangle AOM$，$\triangle BOC\backsim\triangle BOM$，有
$$\frac{AM}{AO}=\frac{AO}{AD},\frac{BM}{BO}=\frac{BO}{BC}.$$
故
$$\frac{AM}{BM}=\frac{AO^2}{BO^2}=k^2.$$
即为所求.

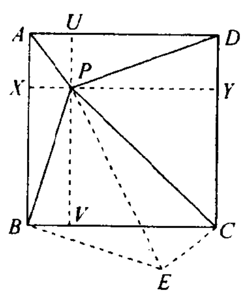
3. **证明** 如图，将 BD 绕点 D 顺时针旋转 α 角至 ED. 连接 EA、EB. 依题设，有
$$\angle ADE=\angle ADB-\alpha=\angle ACB,$$
$$\frac{AD}{DE}=\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB},$$
所以，$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$. 有$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$. 又
$$\begin{aligned}\angle BAE&=\angle DAE-\angle DAB\\&=\angle CAB-\angle DAB\\&=\angle CAD.\end{aligned}$$



（第 3 题）

从而，有$\triangle BAE\backsim\triangle CAD$. 因此，$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}$. 进而有
$$\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}=\frac{BE}{CD}\cdot\frac{CD}{BD}=\frac{BE}{BD}=2\sin\frac{\alpha}{2}.$$
命题获证.

4. **证明** 如图，设 $PA=a$，$PB=b$，$PC=c$，$PD=d$，过 P 作 $XY/\!/BC$，$UV/\!/AB$，则
$$\begin{aligned}&PA^2+PC^2\\=&PU^2+PX^2+PV^2+PY^2\\=&PB^2+PD^2,\end{aligned}$$
即得
$$a^2+c^2=b^2+d^2. \quad ①$$



（第 4 题）

依题设，有

$$a+c=2b, \qquad ②$$

$$d^2=bc, \qquad ③$$

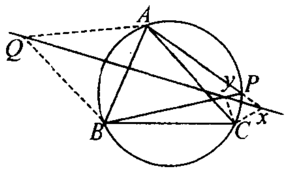
由①,②,③可得 $b=2a,c=3a,d=\sqrt{6}a$.

设正方形的边长为 l.把△ABP 绕 B 点旋转,使 AB 与 BC 重合,得△BCE,如图,连 PE.显然△PBE 为等腰直角三角形,$PE=2\sqrt{2}a$.于是 $PE^2+EC^2=PC^2$,有$\angle PEC=90°$.于是$\angle APB=\angle BEC=135°$.由余弦定理可得

$$l^2=a^2+(2a)^2+2\cdot a\cdot 2a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $a=\sqrt{\dfrac{1}{5+2\sqrt{2}}}\,l$.可见 AP、BP 为定长,点 P 惟一存在.

5. **证明** 取 C 关于 AB 的对称点 Q,连 AQ、BQ、CX、CY(如图),则 Q 点为定点且 $QB=BC=BY$,$QA=AC=AX$.于是



(第5题)

$$\begin{aligned}\angle BQY&=90°-\frac{1}{2}\angle QBY\\&=90°-\frac{1}{2}(2\angle ABC-\angle CBP)\\&=\angle ACB-[90°-\frac{1}{2}(2\angle BAC+\angle CAP)]\\&=\angle AQB-(90°-\frac{1}{2}\angle QAX)\\&=\angle AQB-\angle AQX=\angle BQX.\end{aligned}$$

这说明直线 XY 过定点 Q.命题获证.

6. **证明** 设分别以定比$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$内分 AB、AC 的点为 D_1、E_1,外分 AB、AC 的点为 D_2、E_2,分别以 D_1D_2、E_1E_2 为直径作圆,显然点 A 在这两个圆的内部,两圆相交,设 M 为一交点,则 $MA:MB:MC=1:2:3$.

记 $r_A=\frac{1}{3}$,$r_B=\frac{2}{3}$,$r_C=1$.依题设知⊙A、⊙B、⊙C 彼此不相交.将△ABC 绕点 M 旋转至点 A 到达⊙A 上.记此时位置 A'.由于

$$MA:MB:MC=r_A:r_B:r_C=1:2:3,$$

故点 A 到达 A' 时,点 B、C 也分别到达⊙B 上与⊙C 上.将点 B、C 此时位置分别记作 B'、C'.于是,有△$A'B'C'$≌△ABC.命题获证.

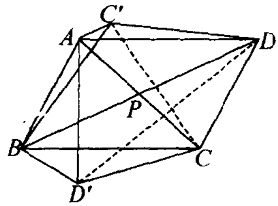
7. **解** 不存在.假若存在满足条件的平行四边形 $ABCD$(如图).设 $AC=r$,$BD=s$,$AC=p$,$BD=q$,则 $r,s,p,q\in N$,且$(r,s)=1$,$(p,q)=1$.连结 CC'、

DD'. 依题设, AC 垂直平分 DD', P 为 BD 中点, 故 $AC /\!/ BD'$, $DD' \perp BD'$, 有 $\angle BD'D = 90°$. 同理 $\angle CC'A = 90°$. 易知 $\angle ACC' = \angle BDD'$, 故

$$\sin\angle ACC' = \sin\angle BDD'$$

即

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{BD'}{BD}.$$



(第7题)

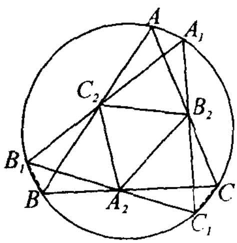
也就是 $$\frac{p}{r} = \frac{q}{s}.$$

这里惟有 $p = r$, $s = q$, 于是 $\sin\angle BDD' = 1$. 说明 $\triangle BDD'$ 中, $\angle BDD' = \angle BD'D = 90°$. 这不可能. 故不存在满足条件的平行四边形.

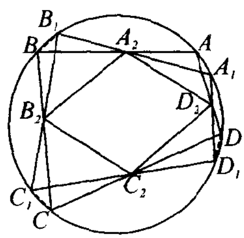
8. **证明** (1) 如图(1), 连 BB_1、CC_1. 因 $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$, $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB$, 故 A_2、C_2、B_1、B 四点共圆, A_2、B_2、C、C_1 四点共圆. 于是, 有

$$\begin{aligned}\angle B_2A_2C_2 &= \angle C_2A_2C - \angle B_2A_2C \\ &= \angle BB_1A_1 - \angle A_1C_1C = \angle A.\end{aligned}$$

同理 $\angle A_2B_2C_2 = \angle ABC$. 因此, $\triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle ABC$.



(1)



(2)

(第8题)

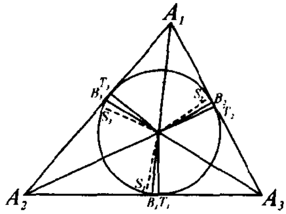
(2) 如图(2), 连 BB_1、CC_1、DD_1, 因 $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$, $\angle CDA = \angle C_1D_1A_1$, 故 A_2、B_1、B、B_2 四点共圆, B_2、C_1、C、C_2 四点共圆, C_2、D_1、D、D_2 四点共圆. 于是, 有

$$\begin{aligned}&\angle A_2B_2C_2 + \angle B_2C_2D_2 \\ &= (\angle A_2B_2C - \angle CB_2C_2) + (\angle B_2C_2D - \angle DC_2D_2) \\ &= \angle BB_1A_1 - \angle CC_1D_1 + \angle CC_1B_1 - \angle DD_1A_1 \\ &= \angle A + \angle B_1C_1D_1\end{aligned}$$

$= \angle A + \angle BCD = 180°$.

因此，$A_2B_2 /\!/ C_2D_2$．同理 $B_2C_2 /\!/ A_2D_2$．故四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是平行四边形．

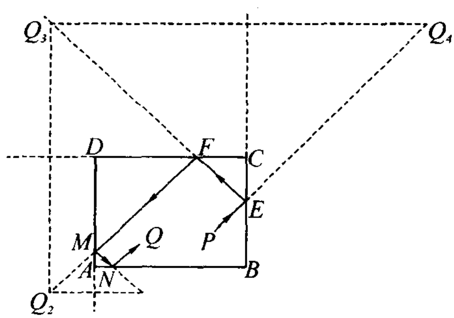
9．**证明**　如图，设 A_iB_i 是 $\angle A_i$ 的平分线，T_i 为内切圆与边 A_iA_{i+1} 的切点，S_i 是 T_i 关于 A_iB_i 的对称点（$i=1,2,3$），则 $\overset{\frown}{T_3S_1}=\overset{\frown}{T_2T_1}$，$\overset{\frown}{T_2T_1}=\overset{\frown}{T_3S_2}$，从而，有 $\overset{\frown}{T_3S_1}=\overset{\frown}{T_3S_2}$，于是 $S_1S_2 /\!/ A_1A_2 /\!/ M_1M_2$．同理 $S_2S_3 /\!/ M_2M_3$，$S_3S_1 /\!/ M_3M_1$．故 $\triangle S_1S_2S_3$ 与 $\triangle M_1M_2M_3$ 的三边分别平行．因而，$\triangle S_1S_2S_3$ 与 $\triangle M_1M_2M_3$ 全等或相似．



（第 9 题）

因$\triangle S_1S_2S_3$ 内接于$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆，而$\triangle A_1A_2A_3$ 不是等边三角形，所以内切圆的半径小于外接圆的半径之半，而$\triangle M_1M_2M_3$ 的外接圆半径恰为$\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圆半径之半．因而，$\triangle S_1S_2S_3$ 与$\triangle M_1M_2M_3$ 的外接圆半径不等，$\triangle S_1S_2S_3 \backsim \triangle M_1M_2M_3$．可见，三对对应顶点的连线 M_1S_1、M_2S_2、M_3S_3 必交于位似中心，命题获证．

10．**解**　假设图中 Q 关于 AB 的对称点 Q_1 关于 DA 的对称点 Q_2，Q_2 关于 CD 的对称点 Q_3、Q_3 关于 BC 的对称点 Q_4，显然 M、N、Q_1 三点共线；F、M、Q_2 三点共线；E、F、Q_3 三点共线；P、E、Q_4 三点共线．因此，依次作出 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4，连 PQ_4 交 BC 于 E，连 EQ_3 交 CD 于 F，连 FQ_2 交 DA 于 M，连 MQ_1 交 AB 于 N，连 NQ，即得所求路线（如图）且可知折线 $PEFMNQ$ 的长等于 PQ_4．



（第 10 题）

测试题三

1. 根据凸函数定义，证明函数 $g(x)=\sqrt{h^2+x^2}$（h 是正常数 $x\in R$）是凸函数.

2. 已知 $n\in N, n\geqslant 3$，求证

$$\sqrt{9n+8}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}<3\sqrt{n+1}.$$

3. p 是负整数，$x>0, y>0$，求证 $\left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{1}{2}(x+y)$.

4. 已知 p、q 是两个正常数，$\lambda\in N$，证明函数 $f(x)=\frac{x^\lambda}{p-qx}$（$x\in(0,\frac{p}{q})$）是一个凸函数.

5. 设 $0\leqslant x\leqslant 1, k\in N$，求证：

$$(1+x)^k[x+(1-x)^{k+1}]\geqslant 1.$$

6. 已知 $x>0, y>0, x^2+y^2=1$，求证：

$$x^3+y^3\geqslant\sqrt{2}xy.$$

7. 若 $x_i\in R^+(1\leqslant i\leqslant n)$，$\sum\limits_{i=1}^n x_i=1$，求证：

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant\left(n+\frac{1}{n}\right)^n.$$

8. 求证：

$\sqrt{(1264-z_1-\cdots-z_n)^2+x_n^2+y_n^2}+\sqrt{z_n^2+x_{n-1}^2+y_{n-1}^2}+\cdots+\sqrt{z_2^2+x_1^2+y_1^2}+\sqrt{z_1^2+(948-x_1-\cdots-x_n)^2+(1185-y_1-\cdots-y_n)^2}\geqslant 1975$.

9. 若 $a,b,c,d\in R^+, n\geqslant 9, n\in N$，求证：

$a^n+b^n+c^n+d^n\geqslant a^{n-9}b^4c^3d^2+b^{n-9}c^4d^3a^2+c^{n-9}d^4a^3b^2+d^{n-9}a^4b^3c^2$.

10. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正数且 $a_1a_2\cdots a_n=1$，证明

$$\frac{1}{n-1+a_1}+\frac{1}{n-1+a_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+a_n}\leqslant 1.$$

解　答

1. **证明**　对于正常数 h,

$$\left(\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\right)^2-g^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{h^2+x_1^2}+\sqrt{h^2+x_2^2})^2-[h^2+(\frac{x_1+x_2}{2})^2]$$

$$=\frac{1}{4}[h^2+x_1^2+h^2+x_2^2+2\sqrt{(h^2+x_1^2)(h^2+x_2^2)}]-[h^2+\frac{1}{4}(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(h^2+x_1^2)(h^2+x_2^2)}-\frac{1}{2}(h^2+x_1x_2), \qquad ①$$

根据柯西不等式,有

$$(h^2+x_1^2)(h^2+x_2^2)\geqslant(h^2+x_1x_2)^2. \qquad ②$$

由①,②可知

$$\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\geqslant g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

故函数 $g(x)$为凸函数,

2. **证明**　因 $f(x)=-\sqrt{x}(x>0)$是凸函数,根据琴生不等式,有

$$\frac{1}{3}(-\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})>-\sqrt{\frac{1}{3}[n+(n+1)+(n+2)]},$$

即

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}<3\sqrt{n+1}.$$

又 $n\geqslant3$,有

$$\sqrt{n(n+1)}>n+\frac{2}{5},$$

$$\sqrt{(n+1)(n+2)}>n+\frac{7}{5},$$

$$\sqrt{n(n+2)}>n+\frac{7}{10},$$

故

$$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})^2$$

$$=n+(n+1)+(n+2)+2(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}$$

$+\sqrt{n(n+2)})$

$$>3n+3+2(3n+\frac{5}{2})$$

$$=9n+8,$$

即 $\sqrt{9n+8}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$.

3. **证明** 因函数 $f(x)=x^{-p}, x\in(0,+\infty)$是一个凸函数,故

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{-p}+\left(\frac{1}{y}\right)^{-p}\right]\geqslant\left[\left(\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]^{-p}.$$

又 $$(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\geqslant 4,$$

故 $$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{-p}+\left(\frac{1}{y}\right)^{-p}\right]\geqslant\left(\frac{2}{x+y}\right)^{-p},$$

即 $$\frac{1}{2}(x^p+y^p)\geqslant(\frac{x+y}{2})^p,$$

所以 $$(\frac{x^p+y^p}{2})^{\frac{1}{p}}\geqslant\frac{x+y}{2}.$$

4. **证明** 取 $0<x_1, x_2<\frac{p}{q}$,令 $p-qx_1=y_1, p-qx_2=y_2$,则 $0<y_1, y_2<p$,

且 $x_1+x_2=\frac{1}{q}(2p-y_1-y_2)$,有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x_1{}^\lambda}{p-qx_1}+\frac{x_2{}^\lambda}{p-qx_2}\right)-\frac{(\frac{x_1+x_2}{2})^\lambda}{p-\frac{q(x_1+x_2)}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(p-y_1)^\lambda}{q^\lambda y_1}+\frac{(p-y_2)^\lambda}{q^\lambda y_2}\right]-\frac{(2p-y_1-y_2)^\lambda}{2^{\lambda-1}q^\lambda(y_1+y_2)}$$

$$=\frac{1}{2q^\lambda(y_1+y_2)}\left[\frac{y_2}{y_1}(p-y_1)^\lambda+\frac{y_1}{y_2}(p-y_2)^\lambda\right.$$

$$\left.+(p-y_1)^\lambda+(p-y_2)^\lambda-4(\frac{2p-y_1-y_2}{2})^\lambda\right]$$

因 $y=x^{a\lambda}(\lambda\in N)$ $x\in(0,+\infty)$是一个凸函数,有

$$(p-y_1)^\lambda+(p-y_2)^\lambda\geqslant 2(\frac{2p-y_1-y_2}{2})^\lambda,$$

又 $$\frac{y_1}{y_2}(p-y_1)^\lambda+\frac{y_1}{y_2}(p-y_2)^2-(p-y_1)^\lambda-(p-y_2)^\lambda$$

$$=(p-y_1)^\lambda(\frac{y_2}{y_1}-1)+(p-y_2)^\lambda(\frac{y_1}{y_2}-1)$$