高一数学

特级教师教学优化设计

南京师范大学出版社

与人教版新教材同步

系列丛书

特级教师教学优化设计

高一数学

（与试验本新教材同步）

《特级教师教学优化设计》
编委会组织编著

南京师范大学出版社

系列丛书

特级教师教学优化设计

高一数学

（与试验本新教材同步）

《特级教师教学优化设计》
编委会组织编著

南京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

特级教师教学优化设计：高一数学 / 金立建，尤小平主编．—2 版（修订本）．— 南京：南京师范大学出版社，2000.6

ISBN 7－81047－520－7 / G·311

Ⅰ．特...　Ⅱ．①金...　②尤...　Ⅲ．数学课－教学法－高中　Ⅳ．G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 36727 号

书　　名	特级教师教学优化设计：高一数学
主　　编	金立建　尤小平
责任编辑	韦　娟
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电　　话	(025)3598077(传真) 3598412(发行部) 3598297(邮购部)
E－mail	nnunipra@publicl.ptt.js.cn
印　　刷	常熟高专印刷厂
开　　本	787×1092　1/16
印　　张	9.75
字　　数	249 千
版　　次	2001 年 6 月第 2 版　2001 年11月第 2 次印刷
书　　号	ISBN 7－81047－520－7/G·311
定　　价	10.00 元

《特级教师教学优化设计》丛书编委会

（高中部分）

（高一数学）

主　　编　金立建　尤小平

编写人员　尤小平　丁　萍

出版说明

实施素质教育是当前教育改革的热门话题.在学科教学中,如何减轻学生的负担,提高教与学的质量,增强学生的全面素质,又是实施素质教育的关键.为了给学生提供一套能够体现当前教改精神、切实提高学习质量的读物,让学生用最少的时间获得最大的学习收益,我们在大量调查和深入开展研讨的基础上,组织一批特级教师主持编写了这套《特级教师教学优化设计》系列丛书.

随着教改的不断深入,随着高考3+X方案的逐步落实,教育观念、教学内容、教学方法、测评手段都会有较大的改变.本套系列丛书的编写,力图充分吸收当前教改的成果,贯彻现代教育思想,充分注意教学过程中教师的主导作用与学生的主体作用,尤其突出对学生的学法指导.本书对学科知识的辅导,既注意围绕各科的教学大纲,对课本中的知识要点、重点、难点进行系统的梳理和讲解,并安排相应的练习;又注意适应当前教改的要求,注意向3+X的考试内容靠拢,突出知识学习的迁移和综合."学习指导"、"讲解设计"、"练习设计"是本系列丛书的基本栏目."学习指导"梳理本课的知识要点或介绍学习方法,"讲解设计"对本课中的知识重点、难点进行阐释,"练习设计"根据本课的知识点安排相应的练习.练习又按"识记与理解"、"巩固与掌握"、"拓展与迁移"三个层级进行设计.在语文中,还设计了"写作与欣赏",题目强调典型性和少而精.

数、理、化以课时为编写单位是本系列丛书的又一大特色.一般的同类书都以单元为编写单位,虽与教材同步,但与课时不同步,操作上的缺陷是显而易见的.本系列丛书吸收了许多特级教师多年教学的研究、实验成果,以课时为单位进行编写,并且每课时安排为一页两面,课时与课时之间不转页,这必将会给使用者带来很大的方便.

为了保证编校质量,本系列丛书设立了责任验题人制度.除加强正常的三审三校外,所有的题目都请专人责任验题,以确保题目以及解题过程和答案的准确性.

作为师范大学出版社,我们力图编出一套有自己特色、有较高水平和实用价值的读物.我们衷心希望本系列丛书能像我社先前开发的《向45分钟要效益》丛书一样,得到广大读者的青睐,也衷心希望读者在使用过程中提出批评意见,以便我们进一步修订,使其日臻完善,成为名牌产品.

再版前言

依据新颁布的中学各科教学大纲，与试验本新教材同步，配合素质教育的要求，结合当前教学改革的实际需要，我们编写了这套《特级教师教学优化设计》丛书.

高一数学的编写，力求做到体现和反映以下“优化”的特色：

教学进度与课时安排优化 将高一数学的教学内容按实际教学的需要拆分为66课时，习题课和阶段小结课也合理安排穿插其中，对重要章节及各章节内的重难点内容，进行了合理的分散处理.这样的进度及课时安排可作为教学实施的参考.

知识内容与教法学法优化 每课时的知识内容突出重点，对概念与规律的介绍简洁明了，知识体系的梳理纲目清晰，注意前后承接过渡与迁移，覆盖相关的知识点.根据认知规律进行讲解设计，例题讲解循序渐进，先分析引导、详细解答，后提示思路与方法，放手让读者自行分析问题与解决问题.这些例题既可直接用于课堂教学的讲解举例，也可作为学生预习的主要内容.

练习内容与题量梯度优化 练习设计的内容注意到知识与能力的并重和同步提高，与社会生产、生活相结合的题较多，逐步向学科之外延伸.题型全面，新题较多，加大了主观题的份量.题量适中，难度梯度合理，有利于分类教学.每一课的“讲解设计”分为两个层次，“练习设计”分为三个层次，教学使用时有了较大的选择余地，因而普适性大大提高.

栏目设置与编排方式优化 全书栏目设置精当，一目了然.每课时的讲解与练习占两页，便于进度的把握与对教学效果的实时反馈；书后的参考答案可供测评时灵活使用；大开本的设计符合当前教学用书的潮流与使用习惯.

我们期望由江苏一线特、高级教师编写的这本高一数学的教学优化设计能为高中数学教学提供有益的参考.

编　者

2000年6月

目　录

01　集合的概念

【概念与规律】

1.集合是数学中最原始的概念之一，我们不能用其他更基本的概念来给它下定义，所以，也把它叫做不定义的概念或原始概念. 我们只能作描述性的说明.

2.集合中的元素具有三个特性：

(1)确定性.任何一个对象都能被确切地判断是集合中的元素或不是集合中的元素.

(2)互异性.同一集合中不应重复出现同一元素.

(3)无序性.用列举法表示的集合中的元素与顺序无关.但在表示某些无限集时，书写时应显示其规律并用省略号代表其余的元素.

3.集合的两种表示法：列举法和描述法.

列举法是把给定集合中的元素不重不漏、不计次序地一一列出，放在集合符号“{　　}”内；描述法表示集合的形式都是$\{x|P\}$，竖线前面的 x 是此集合的代表元素，竖线后的 P 指出元素 x 所具有的公共属性.两种表示法各有优点，选用哪种方法，要视具体问题而定.

4.空集是一个特殊的集合，它不含任何元素.同时要注意，不要把空集$\varnothing$与数0，集合$\{0\}$相混淆，数0不是集合，集合$\{0\}$是含有一个元素0的集合.

【讲解设计】·重点与难点

例1　设$A=\{x|x^2+(b+2)x+b+1=0,b\in\mathbf{R}\}$，求 A 中所有元素的和.

解　$\because\Delta=(b+2)^2-4(b+1)=b^2\geqslant0$，方程有实数解，当 $b=0$ 时，方程有两个等根 $x_1=x_2=-1$，此时方程的解集 $A=\{-1\}$，$\therefore S=-1$；当 $b\neq0$ 时，由韦达定理 $x_1+x_2=-(b+2)$，此时 A 中所有元素的和 $S=-(b+2)$.$\therefore A$ 中所有元素的和 $S=\begin{cases}-(b+2), & b\neq0,\\ -1, & b=0.\end{cases}$

点评　①此题要注意 $\Delta=0$ 时，方程有两个等根 $x_1=x_2=-1$，根据集合中元素的“互异性”，此时方程的解集 $A=\{-1\}$，$\therefore S=-1$ 而不是 $S=x_1+x_2=-2$.

②在用集合来表示方程的解集时，要注意到集合中元素的互异性，如方程$(x-1)^2(x+2)=0$的解集，不能表达成$\{1,1,-2\}$，而应该写成$\{1_{(2)},-2\}$，其中元素1的右下角括号内的2表明1是方程的一个二重根，但在解集中只算作一个元素.

例2　下列表述是否正确，说明理由.

(1)$\mathbf{Z}=\{$全体整数$\}$；

(2)$\mathbf{R}=\{$实数集$\}=\{\mathbf{R}\}$；

(3)$\{(x,y)|x=1,y=2\}$；

(4)$\{(1,2)\}=\{1,2\}$.

解　(1)集合符号“{　　}”已包含有“所有的意思”，因而应写成 $\mathbf{Z}=\{$整数$\}$.

(2)“{　　}”就是集合的符号，因而大括号内的文字描述，不应再用“全体”、“所有”、“全部”或“集”等词语，本题的正确写法是：$\mathbf{R}=\{$实数$\}$，而$\{\mathbf{R}\}$表示以实数集为元素的集合，它与 $\mathbf{R}$ 的关系是 $\mathbf{R}\in\{\mathbf{R}\}$，用$\{\mathbf{R}\}$表示实数集显然是不对的.

(3)由于集合的代表元素为有序实数对(x,y)，因而该集合表示直角坐标平面上的点集，这里 $x=1$ 和 $y=2$ 之间用“,”号连接，说明它们之间是并列关系，很易使人误解为该集合表示直线 $x=1$ 或直线 $y=2$.正确的写法是$\{(x,y)|x=1,$且$y=2\}$，或$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}\right\}$.

(4)$\{(1,2)\}$表示直角坐标平面中的一点$(1,2)$，而$\{1,2\}$是数1,2的集合，它们是不可能相等的.

【讲解设计】·思路与方法

例3　求集合$\{1,x,x^2-x\}$中 x 所应满足的条件.

提示　利用集合中元素的互异性.

例4　用列举法表示集合$\{x|(x+1)(x-\frac{2}{3})(x^2-2)(x^2+1)=0,x\in\mathbf{Q}\}$.

提示　在有理数范围内求解方程.

例5　已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$ 只有一个元素，试求 a 的值，并求出这个元素.

提示　为使方程只有一个根，需 $a=0$ 或 $a\neq0$ 时，$\Delta=4-4a=0$.

【练习设计】·识记与理解

1.不等式 $3-5x>1$ 的解集是________.

2.用符号 $\in$，$\notin$ 填空：

$\sin30^\circ$____ $\mathbf{Q}$，　$\cos30^\circ$____ $\mathbf{Q}$，

$\sin45^\circ$____ $\mathbf{R}^+$，$\tan45^\circ$____ $\mathbf{N}^*$.

3.由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合，最多含有(　).

A.2个元素　　B.3个元素

C.4个元素　　D.5个元素

4.在以下五个命题中：

(1)所有的小正数组成一个集合；

(2)$1,\frac{3}{2},\frac{6}{4},\left|-\frac{1}{2}\right|,0.5$，这些数组成的集合有五个元素；

(3)集合 $\{1,3,5,7\}$ 与集合 $\{1,3,7,5\}$ 表示同一个集合；

(4)集合 $\{y\mid y=x^2-1\}$ 与集合 $\{(x,y)\mid y=x^2-1\}$ 是同一个集合.

其中正确的命题有(　).

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

5.方程组 $\begin{cases}x-y+1=0,\\2x+y-4=0\end{cases}$ 的解集可表示为(1)$(1,2)$；(2)$\{(1,2)\}$；(3)$\{x,y\mid x=1,y=2\}$；(4)$\begin{cases}x=1,\\y=2;\end{cases}(5)\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}\right\}$. 其中表示正确的个数有(　).

A.5　　B.4　　C.3　　D.2

6.下列集合中，哪些是有限集，哪些是无限集？

$A=\{x\mid x^2-1=0\}$；

$B=\{(x,y)\mid y=x^2-1\}$；

$C=\{y\mid y=x^2-1\}$；

$D=\{x\mid x^2-1<0\}$.

7.用列举法表示下列集合：

$A=\{x\mid |x|\leqslant1,x\in\mathbf{Z}\}$；

$B=\{(x,y)\mid x+y=4,x\in\mathbf{N}^*,y\in\mathbf{N}^*\}$.

【练习设计】·巩固与掌握

8.被3除余1的正整数集合是________，被3除余2的整数集合是________.

9.集合 $A=\left\{x\middle|x=\frac{a^2-2a+1}{a-1},a\in\mathbf{Z},a\neq1\right\}$，若 $x\in A$，则(1)$x\in\mathbf{N}^*$；(2)$x\in\mathbf{Z}$；(3)$x\in\mathbf{Q}$；(4)$x\in\mathbf{R}$. 其中正确的有(　).

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

10.与命题"若 $a\in M$，则 $b\notin M$"等价的命题是(　).

A.若 $a\notin M$，则 $b\in M$

B.$a\in M$，或 $b\notin M$

C.若 $b\notin M$，则 $a\in M$

D.若 $b\in M$，则 $a\notin M$

11.用描述法表示下列集合：

(1)$\{$正偶数$\}$；

(2)$\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots\right\}$.

12.已知集合 $A=\{$小于6的自然数$\}$，$B=\{$小于10的质数$\}$，$C=\{$24和36的正公约数$\}$，用列举法表示：

(1)$\{y\mid y\in A,且\ y\in C\}$；

(2)$\{y\mid y\in B,且\ y\notin C\}$.

【练习设计】·拓展与迁移

13.已知 $A=\left\{x\middle|\frac{6}{3-x}\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{Z}\right\}$，试用列举法表示集合 A.

14.(1)设 x,y,z 都是非零实数，试用列举法将 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xyz}{|xyz|}$ 可能取的值组成的集合表示出来；

(2)用描述法表示不超过30的非负偶数的集合；

(3)用描述法写出直角坐标平面内坐标轴上的点的坐标所组成的集合.

02 子集 全集 补集

【概念与规律】

1. 子集:对于两个集合 A、B,如果 A 的任何一个元素都属于 B,称 A 包含于 B 或 B 包含 A,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,这时也称 A 是 B 的子集.规定空集是任何集合的子集.

2. 相等集合:若两个集合含有相同的元素(注意元素的无序性),称 A、B 两集合相等,记为 $A=B$.

3. 真子集:若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$(即 B 中至少有一个元素不属于 A),那么,称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$.显然空集是任何非空集合的真子集.

4. 补集(余集):设 $A\subseteq S$,那么由属于 S 但不属于 A 的所有元素组成的集合叫做 S 中子集 A 的补集(余集),记作 $\complement_S A$.由定义知,$\complement_S A=\{x\mid x\in S,且\ x\notin A\}$.

【讲解设计】·重点与难点

例1 判定下列集合之间的包含关系或相等关系:

(1)$A=\{x\mid x=2m-1,m\in\mathbf{Z}\}$,
$B=\{x\mid x=4n\pm1,n\in\mathbf{Z}\}$;

(2)$A=\{x\mid x=2m,m\in\mathbf{Z}\}$,
$B=\{x\mid x=4n\pm2,n\in\mathbf{Z}\}$;

(3)$A=\{x\mid x=-a^2-4,a\in\mathbf{R}\}$,
$B=\{y\mid y=-b^2-3,b\in\mathbf{R}\}$;

(4)$A=\{x\mid \sqrt{x+1}=x-1\}$,
$B=\{x\mid x+1=(x-1)^2\}$;

(5)$A=\{(x,y)\mid x+y>0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,
$B=\{(x,y)\mid x>0,y>0,x,y\in\mathbf{R}\}$.

解 (1)$\because A=\{奇数\}$,$4n\pm1(n\in\mathbf{Z})$必是奇数,$\therefore B\subseteq A$.

又$\because$当 m 为偶数时,设 $m=2n(n\in\mathbf{Z})$,则 $2m-1=4n-1$;当 m 为奇数时,设 $m=2n+1(n\in\mathbf{Z})$,则 $2m-1=4n+1$.

由此可见,不论 m 是何整数,$2m-1\in B$.

故 $A\subseteq B$.

综上所述,$A=B$.

(2)易知 $B\subseteq A$,$\because 0\in A$,但 $0\notin B$,$\therefore B\subsetneqq A$.

(3)$\because -a^2-4\leqslant-4,-b^2-3\leqslant-3$,

$\therefore A=\{x\mid x\leqslant-4\},B=\{y\mid y\leqslant-3\}$.

$\therefore A\subsetneqq B$.

(4)由 $\sqrt{x+1}=x-1$,得 $x+1=(x-1)^2$,

即 $x^2-3x=0$,解得 $x_1=3,x_2=0$.

经检验 $x_1=3$ 是 $\sqrt{x+1}=x-1$ 的解,而 $x_2=0$ 是增根.

$\therefore A=\{3\}$.

由 $(x+1)=(x-1)^2$,得 $x_1=3,x_2=0$,

$\therefore B=\{0,3\}$.

$\therefore A\subsetneqq B$.

(5)$\because$若 $x>0,y>0$,则必有 $x+y>0$,

$\therefore B\subseteq A$.

又$\because$若 $x=-1,y=2$ 时,$x+y>0$,

$\therefore(-1,2)\in B$.

又$\because x=-1<0$,$\therefore(-1,2)\notin B$,

$\therefore B\subsetneqq A$.

点评 ①如果要证明 $A=B$,只要证明 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 同时成立即可.

②已知 $A\subseteq B$,说明 $A\subsetneqq B$,并不需要将属于 B 而不属于 A 的所有元素无一遗漏地全部列出.

③注意集合表示的意义,它与表示集合时所采用字母的名称无关.

例2 设全集 $U=\{2,4,1-a\}$,$A=\{2,a^2-a+2\}$,$\complement_U A=\{-1\}$,求 a 的值.

解 $\because \complement_U A=\{-1\}$,

$\therefore A\cup(\complement_U A)=\{2,-1,a^2-a+2\}$.

$\therefore\begin{cases}-1=1-a,\\ a^2-a+2=4.\end{cases}$

解之得 $a=2$.

【讲解设计】·思路与方法

例3 设集合 $A=\{1,3,a\}$,$B=\{1,a^2-a+1\}$,$A\supseteq B$,求 a 的值.

提示 $\because A\supseteq B$，$\therefore a^2-a+1$ 有两种可能取值：$a^2-a+1=3$，或 $a^2-a+1=a$.

例 4 设两个集合 $S=\{x\mid x=12m+8n,m,n\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x\mid x=20p+16q,p,q\in\mathbf{Z}\}$，试证明 $S=P$.

提示 ①要证明 $S\subseteq P$ 和 $S\supseteq P$.

②若 $x\in S$，则 $x=20(3m+2n)+16(-3m-2n)\in P$，$\therefore S\subseteq P$. 同理可得 $P\subseteq S$.

【练习设计】·识记与理解

1. 下列六个关系式：(1)$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$；(2)$\{a,b\}=\{b,a\}$；(3)$\{0\}\supsetneqq\varnothing$；(4)$0\in\{0\}$；(5)$\varnothing\in\{0\}$；(6)$\varnothing=\{0\}$. 其中正确的个数是( ).

A. 6　B. 5　C. 4　D. 小于 4

2. 下列四个命题：(1)空集没有子集；(2)空集是任何集合的真子集；(3)空集 $\varnothing=\{\varnothing\}$；(4)任何一个集合必有两个或两个以上的子集. 其中正确的有( ).

A. 0 个　B. 1 个　C. 2 个　D. 3 个

3. 用适当的符号($\in,\notin,=,\subsetneqq,\supsetneqq$)填空：

(1)3.14 ______ $\mathbf{Q}$；

(2)$\{3.14\}$ ______ $\mathbf{Q}$；

(3)$\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$ ______ $\{x\mid x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$；

(4)$\{(x,y)\mid x+y=7,x,y\in\mathbf{N}\}$ ______ $\{(x,y)\mid x+y=7,x,y\in\mathbf{Z}\}$；

(5)$\{x\mid \frac{x-3}{x-2}\leqslant 0\}$ ______ $\{x\mid x^2-5x+6\leqslant 0\}$.

4. (1)满足 $\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d\}$ 的集合 A 有__________；

(2)满足 $\{1,2,3\}\subsetneqq B\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 B 有______.

5. 设 $M=\{$菱形$\}$，$T=\{$平行四边形$\}$，$P=\{$正方形$\}$，指出 M,T,P 之间的关系.

6. 若 $U=\{x\mid x=\frac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}^*\}$，$A=\{x\mid x=\frac{1}{2^{2n}},n\in\mathbf{N}^*\}$，则 $\complement_U A=$ __________.

【练习设计】·巩固与掌握

7. 集合 $\{4,5,6\}$ 的子集的个数有( ).

A. 6　B. 7　C. 8　D. 9

8. 已知非空集合 P 满足：(1)$P\subseteq\{1,2,3,4,5\}$；(2)若 $a\in P$，则 $6-a\in P$. 符合上述要求的集合 P 的个数是( ).

A. 4　B. 5　C. 7　D. 31

9. 若集合 $A=\{x\mid -3<x<5\}$ 与 $B=\{x\mid x<a\}$ 满足 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是________.

10. 设集合 $A=\{0,1\}$，集合 $B=\{x\mid x\subseteq A\}$，则 A 与 B 的关系是______.

11. 已知 $A=\{x\mid x=n,n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x=\frac{n}{2},n\in\mathbf{N}\}$，$C=\{x\mid x=n+\frac{1}{2},n\in\mathbf{N}\}$，$D=\{x\mid x=n\pm\frac{1}{2},n\in\mathbf{Z}\}$，则 A ______ B，B ______ C，B ______ D，C ______ D.

12. 下列各组集合是否相等：

(1)$A=\{0\}$，$B=\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$；

(2)$A=\{x\mid x=a+1,a$ 为偶数$\}$，

$B=\{2y\mid y=b+\frac{1}{2},b\in\mathbf{Z}\}$；

(3)$A=\{n$ 条边都相等的多边形$\}$，

$B=\{n$ 个内角都相等的多边形$\}$.

【练习设计】·拓展与迁移

13. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-8=0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+a^2-12=0\}$，求满足 $B\subseteq A$ 的 a 的值组成的集合.

14. 设 $A=\{x\mid x=2m+3n,m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}\}$，求证 $A=\mathbf{Z}$.

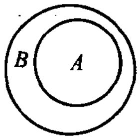
03　交集

【概念与规律】

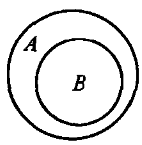
1.书上除了用文字给出交集的定义外,还给出了交集定义的数学表达式:$A\cap B=\{x\mid x\in A$,且 $x\in B\}$,即 $A\cap B$ 是所有 A、B 中的公共元素组成的集合,因此 $A\cap B$ 中的元素既有集合 A 的属性,又有集合 B 的属性.

2.交集有如下性质:(1)$A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$;(2)$A\cap B=B\cap A$;(3)$A\cap B\subseteq A$,$A\cap B\subseteq B$;(4)$A\cap B=A$,则 $A\subseteq B$,反之也成立;(5)若 $x\in A\cap B$,则 $x\in A$ 且 $x\in B$.

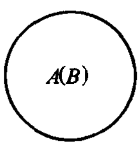
3.两集合 A、B 的交集用文氏图表示有以下几种情况.



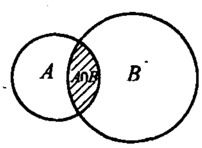
(Ⅰ)若 $A\subsetneqq B$,
则 $A\cap B=A$.



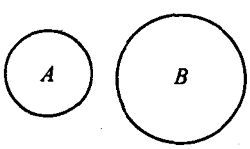
(Ⅱ)若 $B\subsetneqq A$,
则 $A\cap B=B$.



(Ⅲ)若 $A=B$,
则 $A\cap B=A=B$.



(Ⅳ)若 A 与 B 相交
(有公共元素,但互不包含),
则 $\varnothing\subsetneqq A\cap B\subsetneqq A$,
$\varnothing\subsetneqq A\cap B\subsetneqq B$.



(Ⅴ)若 A 与 B 分离(无公共元素),
则 $A\cap B=\varnothing$.

【讲解设计】·重点与难点

例1　设 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$,$B=\{9,a-5,1-a\}$,已知 $A\cap B=\{9\}$,求实数 a 的值.

解　$\because A\cap B=\{9\}$,$\therefore 9\in A$.

若 $2a-1=9$,则 $a=5$,此时 $A=\{-4,9,25\}$,$B=\{9,0,-4\}$,$A\cap B=\{9,-4\}$,与已知矛盾,应舍去.

若 $a^2=9$,则 $a=\pm3$.

当 $a=3$ 时,$A=\{-4,5,9\}$,$B=\{-2,-2,9\}$,B 中有两个元素都是 -2,与集合中元素的互异性矛盾,应舍去.

当 $a=-3$ 时,$A=\{-4,-7,9\}$,$B=\{9,-8,4\}$,符合题意.

综上所述,$a=-3$.

点评　当集合的元素用字母或含有字母的式子表示时,对所求得的结论一定要检验,凡与已知条件或元素与集合关系的两个基本特征——确定性、互异性相矛盾的结果应舍去.

例2　已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$,集合 $B=\{x\mid x^2+2x-8>0\}$,集合 $C=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}$,若 $C\supseteq A\cap B$,试确定实数 a 的取值范围.

解　易知 $A=\{x\mid -2<x<3\}$,$B=\{x\mid x<-4$ 或 $x>2\}$,$A\cap B=\{x\mid 2<x<3\}$.

$\because C=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}=\{x\mid (x-a)\cdot(x-3a)<0\}$,

$\therefore$ 当 $a>0$ 时,$C=\{x\mid a<x<3a\}$;

当 $a<0$ 时,$C=\{x\mid 3a<x<a\}$;

当 $a=0$ 时,$C=\varnothing$,此时 $C\supseteq A\cap B$ 是不可能的.

(1)当 $a>0$ 时,如图 03-1.

$$C\supseteq A\cap B\Leftrightarrow\begin{cases}a\leqslant 2,\\3a\geqslant 3.\end{cases}\Leftrightarrow 1\leqslant a\leqslant 2.$$

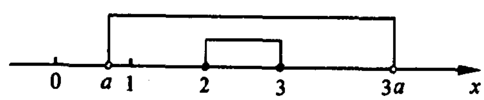


图 03-1

(2)当 $a<0$ 时,C 是负半轴上的一个区间,而 $A\cap B$ 是正半轴上的一个区间,因此,$C\supseteq A\cap B$是不可能的.

综上所述,$1\leqslant a\leqslant 2$.

点评　①在求交集时,应首先识别集合的

元素属性及范围，并化简集合．对于数集可以借助于数轴直观，以形助数得出交集．

②讨论数轴上区间的覆盖时，要处理好端点的取舍．本题条件 $C\supseteq A\cap B$，若判断为等价于 $\begin{cases}a<2,\\3a>3,\end{cases}$ 就缩小了 a 的取值范围．

【讲解设计】·思路与方法

例3 记 A、B 分别是二次方程：$2x^2+px+q=0$ 与 $6x^2+(2-p)x+5+q=0$ 的解集，且 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，求集合 A、B．

提示 $\because A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，$\therefore \frac{1}{2}\in A$，$\frac{1}{2}\in B$．

$\therefore \begin{cases}p+2q+1=0,\\2q-p+15=0.\end{cases}$ 解得 $q=-4$，$p=7$．

例4 已知集合 $A=\{x\mid x^2+tx+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^-=\varnothing$，求实数 t 的取值范围．

提示 $\because A\cap\mathbf{R}^-=\varnothing$，$\therefore$ 有两种情形 $A=\varnothing$ 或 A 中元素是非负实数．

【练习识记】·识记与理解

1．已知集合 $M=\{x\mid -3<x<2\}$，$p=\{x<-\sqrt{2}$，或 $x>\sqrt{2}\}$，那么 $M\cap P$ 是（　）．

A．$\{x\mid -3<x<-\sqrt{2}$，或 $\sqrt{2}<x<2\}$

B．$\mathbf{R}$

C．$\{x\mid -3<x<\sqrt{2}\}$

D．$\{x\mid\sqrt{2}<x<2\}$

2．若集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=0\}$，$P=\{(x,y)\mid x-y=2\}$，则 $M\cap P$ 是（　）．

A．$(1,-1)$　B．$\{x=1\}$，或 $\{y=1\}$

C．$\{1,-1\}$　D．$\{(1,-1)\}$

3．已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B\subsetneqq A$，且 $1\in A\cap B$，$5\notin A\cap B$，则满足上述条件的集合 B 的个数是（　）．

A．7　B．8　C．15　D．16

4．填空：

(1) $\{a,b,\_\}\cap\{c,d,\_\}=\{b,c\}$；

(2) $\{a,t,\_,\_\}\cap\{d,c,e,\_,\_\}=\{a,b,e\}$．

5．已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid 2x^2-3x-2=0\}$，则 $A\cap B=$________．

6．已知集合 $A=\{x\mid -4\leqslant x<2\}$，$B=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$，$C=\{x\mid x\leqslant 0$，或 $x\geqslant\frac{5}{2}\}$，则 $A\cap B\cap C=$________．

7．已知集合 $A=\{$平行四边形$\}$，$B=\{$梯形$\}$，$C=\{$对角线相等的四边形$\}$，则 $B\cap C=$______，$A\cap C=$______．

8．设 $U=\mathbf{Z}$，$A=\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $\complement_U A=$__________．

【练习设计】·巩固与掌握

9．已知 $P=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{y\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $P\cap Q$ 等于（　）．

A．$\{(0,1),(1,2)\}$　　B．$\{0,1\}$

C．$\{1,2\}$　　D．$\{y\mid y\geqslant 1\}$

10．(1) 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid x<a\}$，且满足 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 a 的取值范围是______．

(2) 已知集合 $P=\{x\mid -1<x<3\}$，$M=\{x\mid a<x<2a,a>0\}$，且 $P\cap M=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是______．

11．已知 $A=\{x\mid x^2+px+12=0,x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+q=0,x\in\mathbf{N}\}$，全集 $U=\mathbf{N}$，$(\complement_U A)\cap B=\{2\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{4\}$，则 $p+q=$__________．

12．已知 $A=\{x\mid x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{y\mid y=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{z\mid |z|\leqslant 100,z\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B\cap C$ 中元素的个数．

【练习设计】·拓展与迁移

13．已知集合 X 是方程 $x^2+px+q=0(p^2-4q>0)$ 的解集，$A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{1,4,7,10\}$，且 $X\cap A=\varnothing$，$X\cap B=X$，试求 p、q 的值．

14．已知集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{x^2+2x-3},x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=-x^2-3x+10,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$．

04　并集

【概念与规律】

1.集合 A 与 B 的并集的数学表达式是：$A\cup B=\{x\mid x\in A$，或 $x\in B\}$，注意其中的关键字"或"字的意义."$x\in A$，或 $x\in B$"这一条件，包括下列三种情况：(1)$x\in A$，但 $x\notin B$；(2)$x\in B$，但 $x\notin A$；(3)$x\in A$，且 $x\in B$.因此，$A\cup B$ 中的元素至少具有集合 A 或集合 B 的属性之一.

2.关于并集有如下性质：(1)$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$；(2)$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$；(3)$A\cap B\subseteq A\cup B$，当且仅当 $A=B$ 时，有 $A\cap B=A\cup B$；(4)若 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$，反之也成立；(5)若 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$，或 $x\in B$.

3.区分交集和并集的关键是"且"与"或".在处理有关交集与并集问题时，常常从这两个字出发去揭示、挖掘题设条件，进而用集合语言表述.

【讲解设计】·重点与难点

例 1　设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 2x^2-ax+2=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 a 的值组成的集合.

解　化简集合 A，得 $A=\{1,2\}$.

$\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$.

$\therefore$ 集合 B 有四种可能：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$.

(1)若 $B=\varnothing$，则 $2x^2-ax+2=0$ 在实数范围内无解，$\therefore\Delta=a^2-16<0$，即 $-4<a<4$；

(2)若 $B=\{1\}$，则 $2x^2-ax+2=0$ 有重根 1，将 $x=1$ 代入得 $a=4$；

(3)若 $B=\{2\}$，将 $x=2$ 代入 $2x^2-ax+2=0$得 $a=5$，此时 $B=\{2,\frac{1}{2}\}$，不合题意；

(4)若 $B=\{1,2\}$时，将 $x=2$ 代入 $2x^2-ax+2=0$ 得 $a=5$，此时 $B=\{2,\frac{1}{2}\}$，不合题意.

因此，a 的取值范围是$\{a\mid -4<a\leqslant 4\}$.

点评　①本题要注意 $A\cup B=A$ 与$B\subseteq A$ 的等价性.

②例 1 要注意 $B=\varnothing$的可能性，否则会"缩小"解的范围.对于$\varnothing$的存在，初学者往往容易忽略.

例 2　已知 $U=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)\mid y=3x-2\}$，$B=\{(x,y)\mid \frac{y-4}{x-2}=3\}$，求 $A\cap B$ 及$(\complement_U A)\cup B$.

解　由$\frac{y-4}{x-2}=3$，得 $y=3x-2(x\neq 2)$.

$\therefore B\subsetneqq A$.

因此，$A\cap B=B$，且$(\complement_U A)\cup B=\{x,y\in\mathbf{R},(x,y)\neq(2,4)\}$.

【讲解设计】·思路与方法

例 3　已知 $A=\{2,5\}$，$B=\{x\mid x^2+px+q=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cup B=A$，$A\cap B=\{5\}$，求实数 p、q 的值.

提示　由 $A\cup B=A$，知 $B\subseteq A$.$\because A\cap B=\{5\}$，$\therefore 5\in B$，且 $2\notin B$，$\therefore B=\{5\}$.

例 4　已知 $A=\{x\mid x^3+3x^2+2x>0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$，且 $A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$，$A\cup B=\{x\mid x>-2\}$，求实数 a、b 的值.

提示　易知 $A=\{x\mid -2<x<-1$，或$x>0\}$.

设 $B=\{x\mid x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$，由 $A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$知 $x_2=2$，$-1\leqslant x_1\leqslant 0$.再由 $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$知 $-2<x_1\leqslant -1$，$\therefore x_1=-1$，$x_2=2$.代入方程 $x^2+ax+b=0$ 即得 $a=-1$，$b=-2$.

【练习设计】·识记与理解

1.设集合 $A=\{x\mid -5\leqslant x<1\}$，$B=\{x\mid x\leqslant 2\}$，则 $A\cup B$ 等于(　).

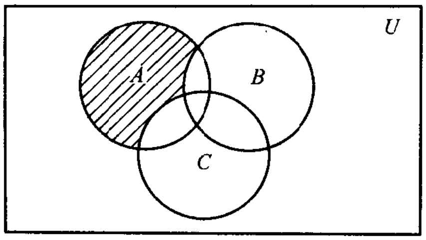
A.$\{x\mid -5\leqslant x<1\}$　B.$\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 2\}$

C.$\{x\mid x<1\}$　D.$\{x\mid x\leqslant 2\}$

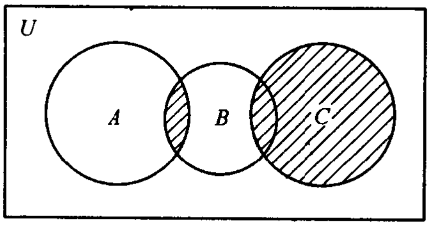
2.下列四个推理：(1)$a\in A\cup B\Rightarrow a\in A$；(2)$a\in A\cap B\Rightarrow a\in A\cup B$；(3)$A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B$；(4)$A\cup B=A\Rightarrow A\cap B=B$.其中正确的个数为(　).

A.1　B.2　C.3　D.4

3.用集合表示图 04-1 中的阴影部分.



______



______

图 04-1

4.设集合 $A=\{x\mid -4\leqslant x<2\}$, $B=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$, $C=\{x\mid x\geqslant \frac{5}{2}$, 或 $x\leqslant 2\}$, 则 $(A\cup B)\cap C=$______.

5.设集合 $M=\{x\mid a_1x^2+b_1x+c_1=0\}$, $N=\{x\mid a_2x^2+b_2x+c_2=0\}$, 则方程 $(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)=0$ 的解集是(　).

A. $M\cap N$　B. $M\cup N$　C. N　D. M

6.已知 M、N 是非空集合, 且 $M\cap N\subsetneqq M$, $M\cap N\supseteq N$, 则(　).

A. $M=N$　B. $M\subsetneqq N$　C. $N\subsetneqq M$

D. M、N 相交, 但不具有包含关系

7.已知集合 $P=\{x\mid x=n, n\in \mathbf{Z}\}$, $Q=\{x\mid x=\frac{n}{3}, n\in \mathbf{Z}\}$, $S=\{x\mid x=n-\frac{1}{3}, n\in \mathbf{Z}\}$, 则下列各式中正确的是(　).

A. $S\cup Q=P$　　B. $Q\subseteq P$

C. $P\cup S=Q$　　D. $P\subsetneqq Q$

8.求下列各题中的 $A\cup B$ 与 $A\cap B$:

(1) $A=\{x\mid -5<x<3\}$, $B=\{x\mid -1<x<4\}$;

(2) $A=\{x\mid x<5\}$, $B=\{x\mid x>2\}$;

(3) $A=\{6$ 的质因数$\}$, $B=\{x\mid x<3\}$;

(4) $A=\{x\mid (x+5)(x-3)<0\}$, $B=\{x\mid x<-2$, 或 $x\geqslant 2\}$.

【练习设计】·巩固与掌握

9.已知集合 $A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant 2\}$, 若 $A\cup \mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$, 则实数 a 的取值范围是______.

10.若 U 和 $\varnothing$ 分别表示全集和空集, 且 $(\complement_U P)\cup Q\subsetneqq P$, 则集合 P、Q 必须满足(　).

A. $\varnothing\subsetneqq P\subsetneqq Q$　　B. $Q\subsetneqq P\subsetneqq U$

C. $Q=\varnothing$　　D. $P=U$, 且 $Q\neq P$

11.若集合 $A=\{1,3,a\}$, $B=\{a^2,1\}$, 满足 $A\cup B=\{1,3,a\}$, 求实数 a 的值.

12.(1)已知集合 $A=\{x\mid$ 二次方程 $x^2-ax+1=0$ 有实根, $a\in \mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid$ 二次方程 $ax^2-x+1=0$ 无实根, $a\in \mathbf{R}\}$, 则 $A\cup B=$______.

(2)已知 $A=\{a\mid$ 二次方程 $x^2-ax+1=0$ 有实根, $a\in \mathbf{R}\}$, $B=\{a\mid$ 二次方程 $ax^2-x+1=0$ 无实根, $a\in \mathbf{R}\}$, 则 $A\cup B=$______.

13.已知集合 A,B,C, 证明 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

【练习设计】·拓展与迁移

14.若集合 $A=\{x\mid -2<x<1$, 或 $x>1\}$, $B=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$, 满足 $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$, $A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$, 求 a,b 的值.

15.设 $A=\{1,3,a\}$, $B=\{1,a^2\}$, 问是否存在这样的实数 a, 使得 $A\cup B=\{1,a,a^2\}$ 与 $A\cap B=\{1,a\}$ 同时成立?

16.已知全集 $U=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, 集合 $A=\{-3,a^2,a+1\}$, $B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$, 其中 $a\in \mathbf{R}$, 若 $A\cap B=\{-3\}$, 求 $\complement_U(A\cup B)$.

05　集合习题课

【概念与规律】

1. 本单元介绍了集合的概念、子集、全集、补集、交集与并集等基本概念的涵义，以及相互间的区别和联系. 重点包括两方面的内容：一是集合自身的知识；二是集合语言与集合思想的应用.

2. 学习集合时要紧紧抓住元素这个关键，遇到集合问题，首先要弄清集合里的元素是什么，注意区分 a（元素）与 $\{a\}$（单元素集）；$\{a,b\}$（双元素集）与 $\{(a,b)\}$（单元素集）. 能熟练进行集合的交、并、补运算.

【讲解设计】·重点与难点

例1　某班 50 名学生报名参加羽毛球和乒乓球两项体育活动小组，报名参加羽毛球小组的人数是全体学生人数的五分之三，报名参加乒乓球小组的人数比报名参加羽毛球小组的人数多 3 个，两组都没报名的人数是同时报名参加两组人数的三分之一多 1 人，求同时报名参加羽毛球小组和乒乓球小组的人数和两组都没报名的人数.

解　设同时报名参加两组的人数为 x，则两组都没报名的人数为 $\frac{1}{3}x+1$，根据文氏图可得（如图 05-1）

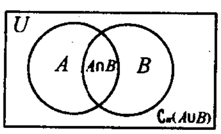


图 05-1

$(30-x)+(33-x)+x+(\frac{1}{3}x+1)=50$，

解得　$x=21$.

$\therefore \frac{1}{3}x+1=8$.

所以，同时报名参加羽毛球小组和乒乓球小组的有 21 人，两组都没报名的有 8 人.

点评　①借助于文氏图得出的结论 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$ 是具有一般性的（证明略），但要注意不能写成 $A=30, B=25, A\cap B=15$ 等，否则与集合的符号是相悖的.

②本题的结论还可推广到三个集合的情况：

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$.

例2　由实数构成的集合 A 满足条件：若 $a\in A, a\neq 1$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$. 求证

(1) 若 $2\in A$，则集合 A 中必还有另外两个元素；

(2) 集合 A 不可能是单元素集合；

(3) 集合 A 中至少有 3 个不同的元素.

证明　(1) 若 $2\in A$，则由题意 $\frac{1}{1-2}\in A$，即 $-1\in A$.

又 $\frac{1}{1-(-1)}\in A$，即 $\frac{1}{2}\in A$.

$\therefore A$ 中必有另外两个元素 -1 和 $\frac{1}{2}$.

(2) 若任一 $a\in A(a\neq 1)$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$，且 $\frac{1}{1-a}\neq a$（否则，若 $\frac{1}{1-a}=a$，即 $a^2-a+1=0$，此方程无实数解）.

$\therefore A$ 不可能是单元素集.

(3) 若 $a\in A$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$，

又 $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-a}}\in A$，即 $1-\frac{1}{a}\in A$.

由 (2) 知 $a\neq\frac{1}{1-a}$.

若 $a=1-\frac{1}{a}$ 及 $\frac{1}{1-a}=1-\frac{1}{a}$，则均有 $a^2-a+1=0$，此方程无实数解.

$\therefore a, \frac{1}{1-a}, 1-\frac{1}{a}$ 是互不相同的.

所以，集合 A 中至少有 3 个不同的元素.

【讲解设计】·思路与方法

例3　已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x\mid x^2-bx+2=0\}$，若 $B\subsetneqq A$，$C\subseteq A$，求实数 a, b 的值.