大学文科数学教程

下 册

姚孟臣　徐信之

清 华 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书是作者在多年为北京大学等院校文科专业讲授高等数学课的基础上编写而成，是一本针对文科各专业通用性较强的教材 全书分上、下两册 下册五章，除包括常微分方程、级数、矩阵、初等概率论以及数理统计初步等基本内容之外，还增加了多元回归和数量化方法等内容以适应社会科学进行定量化研究的需要，并附有一个用 FORTRAN-77 语言编制的数量化 I 的程序 书中有适量的习题，书后附有答案

该书选材得当，通俗易懂，采用"模块"结构，便于不同专业灵活选用，是一本较新颖的文科高等数学教程 可作为大学文科及大专的教材，也可作为社会科学工作者的数学参考书

大学文科数学教程
下册
姚孟臣 徐信之
★
清华大学出版社出版
北京 清华园
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
★
开本：850×1168 1/32 印张：10 1/16 字数：260 千字
1987 年 11 月第 1 版 1987 年 11 月第 1 次印刷
印数：00001～20000
统一书号：15235 · 319 定价：1 65 元

目　　录

第六章　常微分方程与无穷级数……………………………… 1

§1　常微分方程的一般概念……………………………… 1

§2　初等解法……………………………… 3

§3　二阶线性微分方程……………………………… 12

§4　无穷级数……………………………… 24

§5　幂级数……………………………… 43

§6　函数的幂级数展开式……………………………… 50

第七章　矩阵……………………………… 58

§1　矩阵及其代数运算……………………………… 58

§2　矩阵的转置……………………………… 63

§3　方阵的行列式……………………………… 72

§4　逆矩阵及矩阵的初等变换……………………………… 82

§5　矩阵的分块运算……………………………… 92

§6　几个微商公式……………………………… 100

第八章　初等概率论……………………………… 103

§1　随机现象·随机试验·随机事件……………………………… 103

§2　随机事件的概率……………………………… 111

§3　条件概率·事件·试验的独立性……………………………… 123

§4　随机变量及其分布……………………………… 134

§5　随机变量的数字特征……………………………… 152

§6　二维正态分布简介……………………………… 165

§7　大数定律与中心极限定理简介……………………………… 174

第九章　数理统计初步……………………………… 180

§1　基本概念……………………………… 180

§2　点估计……………………………… 185

§ 3 区间估计……………………………………………… 190
§ 4 一元正态总体参数的假设检验……………………… 199
第十章 回归分析与数量化方法简介 ……………………… 213
§ 1 一元回归分析………………………………………… 213
§ 2 多元线性回归分析…………………………………… 234
§ 3 数量化方法简介……………………………………… 252
附录Ⅰ 组合分析的几个定理 ……………………………… 273
附录Ⅱ 数量化Ⅰ的程序 …………………………………… 277
习题答案……………………………………………………… 305

第六章　常微分方程与无穷级数

§1　常微分方程的一般概念

我们在研究自然现象和社会现象的某一客观规律时，往往需要找出变量之间的函数关系．实际上由于客观世界的复杂性，在很多情况下，直接找到某些函数关系是不太容易的；但是有时可以建立函数的导数或微分的关系式，通过这种关系式我们便可得到所要求的函数．

例如，为了求自由落体的路程与时间之间的函数关系，我们列出落体的速度与时间成正比的方程：

设落体的运动规律为 $S=S(t)$，则

$$\frac{dS}{dt}=gt\,(\text{比例常数 } g>0),$$

即

$$dS=gt\,dt;$$

两边积分

$$S=\int gt\,dt=\frac{1}{2}gt^2+C.$$

根据自由落体运动当 $t=0$ 时，$S=0$，可以得到 $C=0$．从而得到了自由落体的路程与时间的函数为

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$

一般来说，含有未知函数的导数的方程称为**微分方程**．例如在方程 $dS/dt=gt$ 中，含有未知函数 $S(t)$ 的导数，因而它是一个微分方程．未知函数是一元的微分方程称为**常微分方程**，一般可表示为 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$ 的形式．方程中未知函数及其

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

导数都是一次幂的叫做**线性方程**，否则叫做**非线性方程**. 方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的**阶数**. 例如 $y''+y=x$ 是二阶的线性方程， $y'+y'''=3$ 是三阶线性方程，而 $y'\cdot y=x$ 和 $y'=x^2+y^2$ 都是一阶非线性方程.

如果把某一函数代入一个微分方程以后，使得该方程成为恒等式，那么这个函数称为此方程的一个**解**. 不含有任意常数的解称为**特解**. 含有任意常数的个数与方程的阶数相同的解称为**通解**. 由方程的通解确定特解的条件称为**初始条件**.（有时也称为**定解条件**）. 带有初始条件的微分方程求解问题称为**初值问题**. 例如 $S=\frac{1}{2}gt^2+C$ 是方程 $\frac{dS}{dt}=gt$ 的通解. $S=\frac{1}{2}gt^2$ 是方程的特解，$S|_{t=0}=0$ 是初始条件.

一般来说，微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 的一个解对应于平面上的一条曲线，称其为该方程的**积分曲线**；通解对应于平面上的无穷多条积分曲线，称其为该方程的**积分曲线族**. 在常微分方程的通解中，对其中的任意常数取一个确定的数值，相应地在平面上可以画出一条积分曲线. 让任意常数取所有可能的数值，就得到了微分方程的积分曲线族.

习　题　6-1

讨论下列方程的阶数，指出是否为线性方程. 在4，5两题中验证已知函数是方程的解.

1. $x^2y'+y+1=0$.

2. $\frac{d^3S}{dt^3}-2\cos t\frac{d^2S}{dt^2}+\sin S=0$.

3. $y''+y\cdot y'=0$.

4. $y=xy'+\frac{2}{3}(y')^{\frac{3}{2}}$，已知函数：$y=Cx+\frac{2}{3}(C)^{\frac{3}{2}}$（$C$ 是任意常数）.

*5. $\sin^2y\,dx+(x\sin 2y+2y)dy=0$，已知函数 $x\sin^2y+y^2=$

C(C 是任意常数).

§2 初 等 解 法

“求解”是微分方程的一个中心问题. 所谓微分方程的初等解法就是利用初等函数的积分求解微分方程的方法. 它类似于不定积分法在微积分运算中的作用. 因此我们掌握这些解法有重要的实际意义.

2.1 分离变量法

1. 变量可分离的方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=P(x)\cdot Q(y) \tag{1}$$

的方程,称为变量可分离的方程.

若 $Q(y)=0$,即 $\frac{dy}{dx}=0$, 则 $y=C$ 为方程的通解.

若 $Q(y)\neq 0$, 则方程 (1) 可化成下面的形式

$$\frac{dy}{Q(y)}=P(x)dx.$$

两边积分

$$\int\frac{dy}{Q(y)}=\int P(x)dx,$$

令

$$G(y)=\int\frac{dy}{Q(y)},\ H(x)=\int P(x)dx,$$

从而

$$G(y)=H(x)+C$$

为方程的通解. 这种解方程的方法称为分离变量法.

例 1 求微分方程 $yxdx+(x^2+1)dy=0$ 的通解.

解 方程可分离变量为

$$\frac{xdx}{x^2+1} = -\frac{dy}{y} \quad (y \neq 0),$$

两边积分得到

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) = -\ln|y| + C_1,$$

即

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{e^{C_1}}{y}.$$

又由于 $y=0$ 也是解，所以原方程的通解为

$$y = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}} \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

例 2 求方程 $x + y \cdot y' = 0$ 满足 $y|_{x=3} = 4$ 的特解.

解 方程可分离变量为

$$xdx = -ydy,$$

两边积分得到

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}y^2 + C_1,$$

所以原方程的通解为

$$x^2 + y^2 = C \qquad (C \text{ 为任意常数}).$$

将初始条件 $y|_{x=3} = 4$ 代入 $x^2 + y^2 = C$ 中得到 $C = 25$，故方程的特解为

$$x^2 + y^2 = 25.$$

在例 2 中，由关系式 $x^2 + y^2 = C$ 决定的隐函数 $(y = \varphi(x))$ 是方程 $x + y \cdot y' = 0$ 的通解. 这种决定方程的解的关系式 $x^2 + y^2 = C(\Phi(x, y) = 0)$ 称为方程的隐式解. 在一般的情形下，我们不区分解和隐式解，而把它们统称为方程的解.

2. 一阶线性方程

形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

的方程为一阶线性方程，当 $Q(x) \neq 0$ 时叫做线性非齐次方程；当

$Q(x) \equiv 0$ 时叫做线性齐次方程.

1° 一阶线性齐次方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{2}$$

对 (2) 式分离变量后得到

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx.$$

对上式两边积分

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + C_1,$$

即

$$|y| = e^{C_1} \cdot e^{-\int P(x)dx},$$

亦即

$$y = \pm e^{C_1} \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

又因为 $y = 0$ 也是解，所以一阶齐次方程的通解为

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (C \text{ 为任意常数}). \tag{3}$$

例 3 求方程 $\frac{dy}{dx} + y = 0$ 的通解.

解 此处 $P(x) = 1$ 代入上面的公式 (3) 即得通解

$$y = Ce^{-\int 1dx} = Ce^{-x} \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

2° 一阶线性非齐次方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (Q(x) \neq 0) \tag{4}$$

显然 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ 不可能是非齐次方程(4)的通解. 考虑用 $C(x)$ 代替 C 有可能是方程的解. 这种将常数变为待定函数的方法通常称为常数变易法,这种方法不但适用于一阶线性方程,而且也适用于高阶线性方程和线性方程组.因此有必要仔细地讨论它.

设非齐次方程 (4) 的解为

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

对上式两边关于 x 求微商，有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}\cdot e^{-\int P(x)dx}+C(x)e^{-\int P(x)dx}\cdot[-P(x)]$$

$$=e^{-\int P(x)dx}\left[\frac{dC(x)}{dx}-C(x)P(x)\right].$$

代入方程(4)有

$$e^{-\int P(x)dx}\left[\frac{dC(x)}{dx}-C(x)P(x)\right]+P(x)\cdot C(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x),$$

即

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}=Q(x).$$

整理后得

$$dC(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

两边积分得到

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C.$$

将 $C(x)$ 代入 y 中

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]. \tag{5}$$

例 4 求方程 $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$ 的通解.

解 此题是 $P(x)=1$, $Q(x)=e^{-x}$ 的非齐次方程. 代入公式(5)有

$$y=e^{-\int dx}\left[\int e^{-x}e^{\int dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-x}\left[\int e^{-x}e^{x}dx+C\right]=e^{-x}(x+C).$$

方程的通解为

$$y=e^{-x}(x+C).$$

不难看出常数变易法的实质是通过

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

把方程(4)变形后，再用分离变量法求解.

2.2 初等变换法

在实际问题中，我们遇到的微分方程是各种各样的. 其中有一些方程能够通过未知函数或自变量的初等变换化成前面所讲过的方程(例如变量可分离的方程或一阶线性方程). 怎样作变换呢? 一般情况下没有常规可寻，只能对具体问题作具体分析. 下面介绍两种常用的变换.

1. 齐次方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6}$$

的方程称为齐次方程. 如方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y} \text{ 与 } \frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2\sin\frac{y}{x}}{xy}$$

分别可以化成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \text{ 与 } \frac{dy}{dx}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\sin\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}}$$

的形式，因而它们都是齐次方程.

对于这类方程，我们可以令 $y/x=u$，即 $y=ux$. 再对 x 求导数，有

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}.$$

将上式代回方程(6)中，得到

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u),$$

分离变量即得

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

对上面的方程求出通解后，再将 $u=y/x$ 代回即得方程(6)的通解.

例 5 求方程 $\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$ 的解.

解 令 $y/x=u$，则原方程化成

$$u+x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}+u \quad (u\geqslant 0),$$

分离变量后得到

$$\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{dx}{x} \qquad (u\neq 0).$$

两端积分后

$$\sqrt{u}=\ln|x|+C,$$

即

$$u=(\ln|x|+C)^2.$$

又由于 $u=0$ 也是原方程的一个解. 故原方程的解为

$$y=x(\ln|x|+C)^2 \text{ 及 } \quad y=0.$$

2. 降阶法

有一些高阶方程可以通过变换转化成一阶方程，因而可以用初等积分法求解.

$1°$ $\frac{d^ny}{dx^n}=f(x)$ 型

这种类型的方程可以通过积分的办法求解如下：

$$y=\underbrace{\int dx\cdots\int f(x)dx}_{n\text{ 次}}+\frac{C_1x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{C_2x^{n-2}}{(n-2)!}$$
$$+\cdots+C_{n-1}x+C_n.$$

例 6 求方程 $y''=x+\sin x$ 的解.

解 方程的两边对 x 积分，得到

$$y'=\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1.$$

再积分得原方程的通解

$$y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2.$$

2° $y''=f(x,y')$ 型

这是不含 y 的方程. 可以令 $y'=p$, 则 $y''=p'$. 将 y', y'' 代入原式便得到一阶方程 $p'=f(x,p)$. 解得 $p=\varphi(x,C_1)$, 即

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1).$$

故原方程的通解

$$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2.$$

例 7 求方程 $y''=y'+x$ 的解.

解 设 $y'=p$, 则原方程化为一阶线性非齐次方程

$$p'-p=x,$$

其中 $P(x)=-1$, $Q(x)=x$, 代入公式 (5) 即得

$$p=e^{\int dx}\left[\int xe^{-\int dx}dx+C_1\right]=e^{x}\left[\int xe^{-x}dx+C_1\right]$$

$$=e^{x}[(-e^{-x}-e^{-x})+C_1]=C_1e^{x}-(x+1).$$

因为

$$\frac{dy}{dx}=p=C_1e^{x}-(x+1),$$

即

$$dy=[C_1e^{x}-(x+1)]dx,$$

所以原方程的通解为

$$y=C_1e^{x}-\frac{x^2}{2}-x+C_2.$$

3° $y''=f(y,y')$ 型

这是不含 x 的方程. 在这种类型的方程中可以令 $y'=p$, 考虑把变量 y 当作自变量, 有

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p.$$

这样一来原方程化成

$$\frac{dp}{dy}\cdot p=f(y\cdot p).$$

将解出的 $p=\varphi(y, C_1)$ 代入 $y'=p$ 中，便得到一个可分离变量的方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(y, C_1),$$

再继续解之即可.

例 8 求方程 $yy''+1=y'^2$ 的解.

解 令 $y'=p$，将 $y'=p$，$y''=\frac{dp}{dy}p$ 代入原方程得到

$$\frac{dp}{dy}\cdot p\cdot y+1=p^2.$$

将上式分离变量得到

$$\frac{pdp}{p^2-1}=\frac{dy}{y}.$$

对上式两边积分，有

$$\frac{1}{2}\ln(p^2-1)=\ln y+\ln C_1,$$

即

$$\sqrt{p^2-1}=C_1y.$$

从而

$$p=\pm\sqrt{1+C_1^2y^2},$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{1+C_1^2y^2}.$$

再分离变量，积分后得到原方程的通解为

$$C_1y+\sqrt{1+C_1^2y^2}=C_2e^{\pm C_1x}.$$

习　题　6-2

在题 1-20 中，求各微分方程的通解或满足初始条件的特解：

1. $x\frac{dy}{dx}=y\ln y.$

2. $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}.$

3. $xydx + (x^2 + 1)dy = 0$.

4. $\frac{dx}{y} + \frac{4dy}{x} = 0$, $y|_{x=4} = 2$.

5. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}}$.

6. $y - x\frac{dy}{dx} = 4\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$.

7. $(1 + e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x$, $y|_{x=1} = 1$.

8. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$, $y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$.

9. $x\frac{dy}{dx} - x\sin\frac{y}{x} - y = 0$.

10. $(x + y)dy = (y - x)dx$.

11. $\frac{dy}{dx} + 2y = 4x$.

12. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$.

13. $\frac{dy}{dx} - y\operatorname{tg} x = \sec x$, $y|_{x=0} = 0$.

14. $x\frac{dy}{dx} - 2y = 2x$.

15. $\frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2}$.

16. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^2e^x$, $y|_{x=1} = 0$.

17. $y'' = 1 - \cos x$.

18. $y''' = xe^x$.

19. $y'' = 1 + (y')^2$.

20. $y'' - 4y' - x = 0$.

§3 二阶线性微分方程

所谓线性微分方程是指方程中的未知函数及未知函数的各阶导数都是一次幂的方程．因此 n 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

(其中 $p_i(x)(i = 1,2,\cdots,n)$，$f(x)$都是 x 的已知函数)．若 $f(x) \neq 0$，则称(1)式为线性非齐次方程．

若 $f(x) \equiv 0$，即

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \qquad (2)$$

则称(2)式为对应(1)式的线性齐次方程．特别地，当 $n = 2$ 时(1)式为二阶线性非齐次微分方程，记为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

其对应的齐次方程为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

系数 $p(x)$，$q(x)$ 恒等于常数的方程叫做二阶常系数线性微分方程．

本节首先讨论一般线性微分方程解的性质和结构，然后再讨论如何求二阶线性微分方程的解．

3.1 二阶线性微分方程解的结构

定理 1（线性齐次方程解的叠加性） 若 y_1，y_2 是二阶线性齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (3)$$

的两个解，则 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 也是方程(3)的解，其中 C_1，C_2 为任意常数(实数或复数)．

证明 因为 y_1，y_2 是方程(3)的解，所以

$$y_1'' + py_1' + qy_1 \equiv 0; \qquad y_2'' + py_2' + qy_2 \equiv 0.$$

现将 $C_1y_1 + C_2y_2$ 代入方程(3)的左边，得

$$
\begin{aligned}
(C_1y_1+C_2y_2)''+p(C_1y_1+C_2y_2)'+q(C_1y_1+C_2y_2)\\
&=C_1y_1''+C_2y_2''+p(C_1y_1'+C_2y_2')+q(C_1y_1+C_2y_2)\\
&=C_1(y_1''+py_1'+qy_1)+C_2(y_2''+py_2'+qy_2)\\
&=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0\equiv 0.
\end{aligned}
$$

这样一来我们证明了 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是方程(3)的解.

定理 1 又称为线性齐次方程解的叠加性.

在§1 中我们曾指出,通解中含有任意常数的个数必与方程的阶数相同. 那么二阶微分方程的通解中应含有两个任意常数. 在定理 1 中我们证明了二阶线性齐次方程的两个解 y_1, y_2 的线性组合 $C_1y_1+C_2y_2$ 也是这个齐次方程的解,但它不一定是通解,因为我们要求通解中的两个任意常数必须是独立的. 所谓两个任意常数是独立的,是指它们不能合并成一个任意常数. 例如,对于 $y_1=x$, $y_2=4x$ 有

$$C_1x+C_24x=(C_1+4C_2)x=Cx.$$

即这里的常数 C_1, C_2 可以合并成一个任意常数 C, 所以 C_1,C_2 不是独立的;又如当 $y_1=x$, $y_2=x^2$ 时

$$C_1x+C_2x^2$$

中的两个任意常数 C_1 与 C_2 无论如何也不能合并成一个任意常数,因此它们是相互独立的.(以下的 C_1, C_2 都是相互独立的任意常数,以后不再每次注明.)

一般地,如果方程 (3) 的两个解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是线性无关的(即$\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq k$, k 为常数),那么它们的线性组合 $C_1y_1+C_2y_2$ 就是方程(3)的通解,于是我们有

定理 2(解的结构定理) 如果 y_1, y_2 是线性齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的两个特解,并且对任意常数 k,$y_1(x)\neq ky_2(x)$. 则 y_1, y_2 的线性组合 $C_1y_1+C_2y_2$(C_1, C_2 为任意常数)是方程的通解.

通常定理 2 叫做线性齐次方程解的结构定理. 根据这个定理

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com