〔美〕G. 盖莫夫 著

从一到无穷大

——科学中的事实和臆测

1	2	3	4	5
11	12	13	14	15
21	22	23	24	25
31	32	33	34	35
41	42	43	44	45
51	52	53	54	55
61	62	63	64	65

科学出版社

从一到无穷大

科学中的事实和臆测

〔美〕G. 盖莫夫 著

暴永宁 译

科学出版社

内 容 简 介

本书以生动的语言介绍了二十世纪以来科学中的一些重大的进展。书中先漫谈一些基本的数学知识，然后用一些有趣的比喻，阐述了爱因斯坦的相对论和四维时空结构，并讨论了人类在认识微观世界(如基本粒子、基因等)和宏观世界(如太阳系、星系等)方面的成就。

本书可供广大具有中等文化水平的读者阅读。

George Gamow

ONE, TWO, THREE, ···INFINITY

The Viking Press, 1964

从一到无穷大

科学中的事实和臆测

〔美〕G. 盖莫夫 著

暴永宁 译

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

北京新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1978年11月第一版　开本：787×1092　1/32

1978年11月第一次印刷　印张：9 3/4

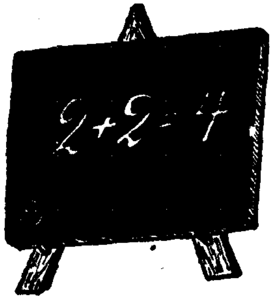
字数：223,000

统一书号：13031·841

本社书号：1198·13—18

定价：0.68元

目　　录



第一部分

做做数字游戏

第一章 大 数

1. 你能数到多少？

有这么一个故事，说的是两个贵族决定做计数游戏——谁说出的数字大谁赢。

“好，”一个贵族说，“你先说吧！”

另一个绞尽脑汁想了好几分钟，最后说出了他所想到的最大数字：“三”。

现在轮到第一个动脑筋了。苦思冥想了一刻钟以后，他表示弃权说：“你赢啦！”

这两个贵族的智力当然是不很发达的。再说，这很可能只是一个挖苦人的故事而已。然而，如果上述对话是发生在原始部族中，这个故事大概就完全可信了。有不少探险家证实，在某些原始部族里，不存在比三大的数词。如果问他们当中的一个人有几个儿子，或杀死过多少敌人，那么，要是这个数字大于三，他就会回答说：“许多个。”因此，就计数这项技术来说，这些部族的勇士们可要败在我们幼儿园里的娃娃们的手下了，因为这些娃娃们竟有一直数到十的本领呢！

现在，我们都习惯地认为，我们想把某个数字写成多大，就能写得多大——战争经费以分为单位来表示啦，天体间的距离用英寸*来表示啦，等等——只要在某个数字的后面接上一串零就是了。你可以一直这样写下去，直到手腕发酸为止。这样，尽管目前已知的宇宙[1]中所有原子的数目已经很大，等于 300,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000，但是，你还可以写出比这更大的数目来。

上面这个数可以改写得短一些，即写成

$$3 \times 10^{74},$$

在这里，10 的右上角的小号数字 74 表示应该写出多少个零。换句话说，这个数字意味着 3 要用 10 乘上 74 次。

但是在古代，人们并不知道这种简单的“算术简示法”。这种方法是距今不到两千年的某个佚名的印度数学家发明的。在这个伟大发明——这确实是一项伟大的发明，尽管我们一般意识不到这一点——出现之前，人们对每个数位上的数字，是用专门的符号反复书写一定次数的办法来表示的。例如，数字 8732 在古埃及人写来是这样的：

* 本书中经常使用英制长度单位，如英里、英尺、英寸等，它们与公制的换算关系如下：

1 英里 = 1.609 公里，
1 英尺 = 30.48 厘米，
1 英寸 = 2.54 厘米。

读者们对这种单位要多加以注意，另外，英制单位的进位也较复杂(如 1 英尺 = 12 英寸)，因此也须加以注意。——译者

1）这是指目前用最大的望远镜所能探测到的那部分宇宙。

而在凯撒（Julius Caesar）* 的衙门里，他的办事员会把这个数字写成

MMMMMMMMDCCXXXII

这后一种表示法你一定比较熟悉，因为这种罗马数字直到现在还有些用场——表示书籍的卷数或章数啦，各种表格的栏次啦，等等。不过，古代的计数很难得超过几千，因此，也就没有发明比一千更高的数位表示符号。一个古罗马人，无论他在数学上是何等训练有素，如果让他写一下"一百万"，他也一定会不知所措。他所能用的最好的办法，只不过是接连不断地写上一千个 M，这可要花费几个钟点的艰苦劳动啊（图 1）。

在古代人的心目中，那些很大的数目字，如天上星星的颗数、海里游鱼的条数、岸边砂子的粒数等等，都是"不计其数"，

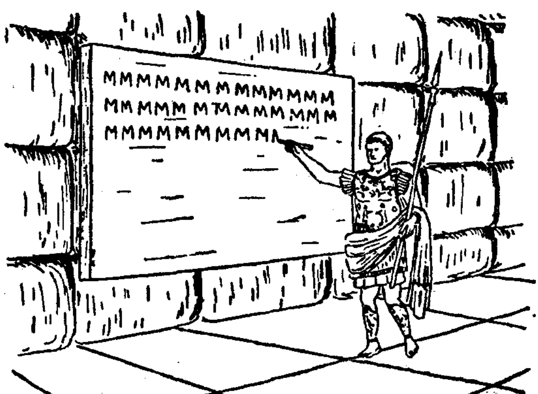


图 1 凯撒时代的一个古罗马人试图用罗马数字来写"一百万"，墙上挂的那块板恐怕连"十万"也写不下

* 凯撒（公元前 100—44 年）是古罗马统治者。——译者

就象“5”这个数字对原始部族来说也是“不计其数”，只能说成“许多”一样。

阿基米德（Archimedes），公元前三世纪大名鼎鼎的大科学家，曾经开动他那出色的大脑，想出了书写巨大数字的方法。在他的论文《计砂法》中这样写着：

> 有人认为，无论是在叙拉古*，还是在整个西西里岛，或者在世界所有有人烟和无人迹之处，砂子的数目是无穷的。也有人认为，这个数目不是无穷的，然而想要表达出比地球上砂粒数目还要大的数字是做不到的。很明显，持有这种观点的人会更加肯定地说，如果把地球想象成一个大砂堆，并在所有的海洋和洞穴里装满砂子，一直装到与最高的山峰相平，那么，这样堆起来的砂子的总数是无法表示出来的。但是，我要告诉大家，用我的方法，不但能表示出占地球那么大地方的砂子的数目，甚至还能表示出占据整个宇宙空间的砂子的总数。

阿基米德在这篇著名的论文中所提出的方法，同现代科学中表达大数目字的方法相类似。他从当时古希腊算术中最大的数“万”开始，然后引进一个新数“万万”（亿）作为第二阶单位，然后是“亿亿”（第三阶单位）、“亿亿亿”（第四阶单位），等等。

写个大数字，看来似乎不足挂齿，没有必要专门用几页的篇幅来谈论。但在阿基米德那个时代，能够找到写出大数字的办法，确实是一项伟大的发现，使数学向前迈出了一大步。

为了计算填满整个宇宙空间所需的砂子总数，阿基米德首先得知道宇宙的大小。按照当时的天文学观点，宇宙是一个嵌有星星的水晶球。阿基米德的同时代人，著名的天文学

---

* 叙拉古是古代的城市国家，位于意大利西西里岛东南部。——译者

家，萨摩斯*的阿里斯塔克斯 (Aristarchus)** 求得从地球到天球面的距离为10,000,000,000斯塔迪姆，即约为1,000,000,000英里[1]。

阿基米德把天球和砂粒的大小相比，进行了一系列足以把小学生吓出梦魇症来的运算，最后他得出结论说:

> 很明显，在阿里斯塔克斯所确定的天球内所能装填的砂子粒数，不会超过一千万个第八阶单位[2]。

这里要注意，阿基米德心目中的宇宙的半径要比现代科学家们所观察到的小得多。十亿英里，这只不过刚刚超过从太阳到土星的距离。以后我们将看到，在望远镜里，宇宙的边缘是在5,000,000,000,000,000,000,000英里的地方，要填满这样一个已被观测到的宇宙，所需要的砂子数超过

10^{100}粒(即1的后面有100个零)。

这个数字显然比前面提到的宇宙间的原子总数 3×10^{74} 大多了，这是因为宇宙间并非塞满了原子。实际上，在一立方米的空间内，平均才只有一个原子。

要想得到大数目字，并不一定要把整个宇宙倒满砂子，或进行诸如此类的剧烈活动。事实上，在很多乍一看来似乎很简单的问题中，也常会遇到极大的数字，尽管你原先决不会想到，其中会出现大于几千的数字。

---

* 萨摩斯是希腊的一个岛。——译者

** 阿里斯塔克斯是公元前三世纪的希腊天文学家。——译者

1) 斯塔迪姆是古希腊的长度单位。1斯塔迪姆为606英尺6英寸，或188米。

2) 用我们现在的数学表示法，这个数字是:

$$\underbrace{(10,000,000)}_{\text{一千万}}\times\underbrace{(100,000,000)}_{\text{第二阶}}\times\underbrace{(100,000,000)}_{\text{第三阶}}\times\underbrace{(100,000,000)}_{\text{第四阶}}\times\underbrace{(100,000,000)}_{\text{第五阶}}\times\underbrace{(100,000,000)}_{\text{第六阶}}\times\underbrace{(100,000,000)}_{\text{第七阶}}\times\underbrace{(100,000,000)}_{\text{第八阶}}$$

也可以简写成

10^{63}(即在1的后面有63个零)。

有一个人曾经在大数目字上吃了亏，那就是印度的舍罕王（Shirham）。根据古老的传说，舍罕王打算重赏象棋* 的发明人和进贡者、宰相西萨·班·达依尔（Sissa Ben Dahir）。这位聪明大臣的胃口看来并不大，他跪在国王面前说："陛下，请您在这张棋盘的第一个小格内，赏给我一粒麦子；在第二个小格内给两粒，第三格内给四粒，照这样下去，每一小格内都比前一小格加一倍。陛下啊，把这样摆满棋盘上所有 64 格的麦粒，都赏给您的仆人罢！"

"爱卿，你所求的并不多啊。"国王说道，心里为自已对这样一件奇妙的发明所许下的慷慨赏诺不致破费太多而暗喜。"你当然会如愿以偿的。"说着，他令人把一袋麦子拿到宝座前。

计数麦粒的工作开始了。第一格内放一粒，第二格内放两粒，第三格内放四粒，……还没到第二十格，袋子已经空了。

图 2　机敏的数学家西萨·班宰相正在向印度的舍罕王请求赏赐

* 这里的象棋指的是国际象棋。整个棋盘是由 64 个小方格组成的正方形。双方的棋子（每方 16 个，包括王一枚，王后一枚、仕两枚、马两枚、车两枚、卒八枚）在格内移动，以消灭对方的王为胜。棋盘的形状可参见插图 2。——译者

一袋又一袋的麦子被扛到国王面前来。但是，麦粒数一格接一格地增长得那样迅速，很快就可以看出，即便拿来全印度的粮食，国王也兑现不了他对西萨·班许下的诺言了，因为这需要有18,446,744,073,709,551,615颗麦粒[1)]呀！

这个数字不象宇宙间的原子总数那样大，不过也已经够可观了。1蒲式尔* 小麦约有5,000,000颗，照这个数，那就得给西萨·班拿来四万亿蒲式尔才行。这位宰相所要求的，竟是全世界在两千年内所生产的全部小麦！

这么一来，舍罕王发觉自己欠了宰相好大一笔债。要嘛是忍受西萨·班没完没了的讨债，要嘛是干脆砍掉他的脑袋。据我猜想，国王大概选择了后面这个办法。

另一个由大数目字当主角的故事也出自印度，它是和"世界末日"的问题有关的。偏爱数学的历史学家鲍尔(Ball)是这样讲述这段故事的[2)]：

> 在世界中心贝拿勒斯** 的圣庙里，安放着一个黄铜板，板上插着三根宝石针。每根针高约1腕尺(1腕尺大约合20英寸)，象韭菜叶那样粗细。梵天***在创造世

---

1) 这位聪明的宰相所要求的麦子粒数可写为

$$1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{62}+2^{63}。$$

在数学上，这类每一个数都是前一个数的固定倍数的数列叫做几何级数(在我们这个例子里，这个倍数为2)。可以证明，这种级数所有各项之和，等于固定倍数(在本例中为2)的项数次方幂(在本例中为64)减去第一项(此例中为1)所得到的差除以固定倍数与1之差。这就是

$$\frac{2^{64}-1}{2-1}=2^{64}-1,$$

直接写出结果来就是

18,446,744,073,709,551,615。

2) 引自 W.W.R.Ball, *Mathmatical Recreations and Essays*(《数学拾零》)。

* 蒲式尔是欧美的容量单位(计算谷物专用)。1蒲式尔约合35.2升。——译者

** 贝拿勒斯是佛教的圣地，位于印度北部。——译者

*** 梵天是印度教的主神。——译者

界的时候，在其中的一根针上从下到上放下了由大到小的六十四片金片。这就是所谓梵塔。不论白天黑夜，都有一个值班的僧侣按照梵天不渝的法则，把这些金片在三根针上移来移去：一次只能移一片，并且要求不管在哪一根针上，小片永远在大片的上面。当所有六十四片都从梵天创造世界时所放的那根针上移到另外一根针上时，世界就将在一声霹雳中消灭，梵塔、庙宇和众生都将同归于尽。

图 3 是按故事的情节所作的画，只是金片少画了一些。你不妨用纸板代表金片，拿长钉代替宝石针，自己搞这么一个玩具。不难发现，按上述规则移动金片的规律是：不管把哪一片移到另一根针上，移动的次数总要比移动上面一片增加一倍。第一片只需一次，下一片就按几何级数加倍。这样，当把第六十四片也移走后，总的移动次数便和西萨·班·达依尔所要求的麦粒数一样多了[1)]！

把这座梵塔全部六十四片金片都移到另一根针上，需要多长时间呢？一年有 31,558,000 秒。假如僧侣们每一秒钟移动一次，日夜不停，节假日照常干，也需要将近 58 万亿年才能完成。

把这个纯属传说的寓言和按现代科学得出的推测对比一下倒是有意思的。按照现代的宇宙进化论，恒星、太阳、行星（包括地球）是在大约三十亿年前由不定形物质形成的。我们还知道，给恒星，特别是给太阳提供能量的“原子燃料”还能维持 100—150 亿年（见“创世的年代”一章）。因此，我们太阳

1） 如果只有七片，则需要移动的次数为

$$1+2^1+2^2+2^3+\cdots\cdots=2^7-1=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2-1=127。$$

当金片为六十四片时，需要移动的次数则为

$$2^{64}-1=18,446,744,073,709,511,615。$$

这就和西萨·班·达依尔所要求的麦粒数相同了。

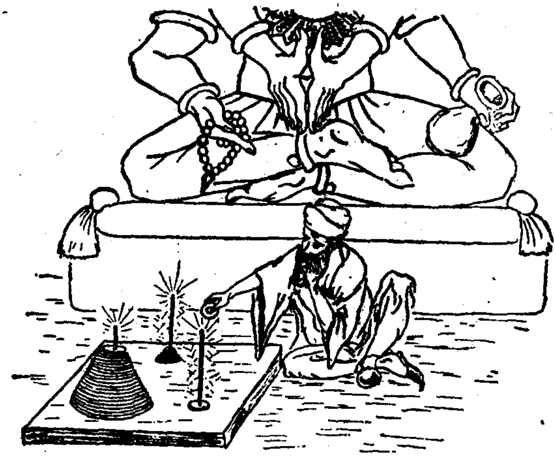


图 3　一个僧侣在大佛象前解决“世界末日”的问题。为了省事起见，这里没有画出六十四片金片来

系的整个寿命无疑要短于二百亿年，而不象这个印度传说中所宣扬的那样长！不过，传说毕竟只是传说啊！

在文学作品中所提及的最大数字，大概就是那个有名的“印刷行数问题”了。

假设有一台印刷机器可以连续印出一行行文字，并且每一行都能自动换一个字母或其他印刷符号，从而变成与其他行不同的字母组合。这样一架机器包括一组圆盘，盘与盘之间象汽车里程表那样装配，盘缘刻有全部字母和符号。这样，每一片轮盘转动一周，就会带动下一个轮盘转动一个符号。纸卷张通过滚筒自动送入盘下。这样的机器制造起来没有太大的困难，图 4 是这种机器的示意图。

现在，让我们开动这架印刷机，并检查印出的那些没完没了的东西吧。在印出的一行行字母组合当中，大多数根本没有什么意思，如：

aaaaaaaaaaa···

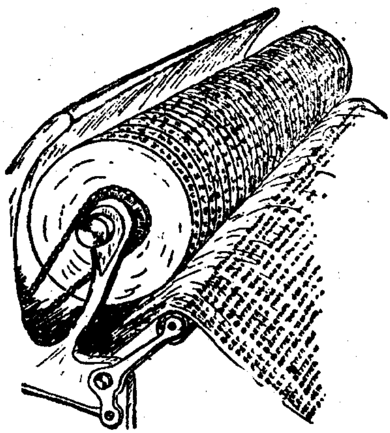


图 4　一台刚刚印出一行莎士比亚诗句的自动印刷机

或者

booboobooboobooo···

或者

zawkporpkossscilm···

但是，既然这台机器能印出所有可能的字母及符号的组合，我们就能从这堆玩艺中找出有点意思的句子。当然，其中又有许多是胡说八道，如:

horse has six legs and···(马有六条腿，并且……)

或者

I like apples cooked in terpentin···

(我喜欢吃松节油炒苹果……)。

不过，只要找下去，一定会发现莎士比亚（William Shakespare)*的每一行著作，甚至包括被他扔进废纸篓里去的句子！

实际上，这台机器会印出人类自从能够写字以来所写出

---

* 莎士比亚(1564—1616年)，文艺复兴时代的著名英国剧作家及诗人。——译者

的一切句子：每一句散文，每一行诗歌，每一篇社论，每一则广告，每一卷厚厚的学术论文，每一封书信，每一份订奶单……

不仅如此，这架机器还将印出今后各个世纪所要印出的东西。从滚筒下的纸卷中，我们可以读到三十世纪的诗章，未来的科学发现，2344 年星际交通事故的统计，还有一篇篇尚未被作家们创作出来的长、短篇小说。出版商们只要搞出这么一台机器，把它安装在地下室里，然后从印出的纸卷里寻找好句子来出版就是了——他们现在所干的不也差不多就是这样嘛！

为什么人们没有这样干呢？

来，让我们算算看，为了得到所有字母和印刷符号的组合，该印出多少行来。

英语中有二十六个字母、十个数码(0,1,2,……,9)、还有十四个常用符号(空白、句号、逗号、冒号、分号、问号、惊叹号、破折号、连字符、引号、省字号、小括号、中括号、大括号)，共五十个字符。再假设这台机器有六十五个轮盘，以对应每一印刷行的平均字数。印出的每一行中，排头的那个字符可以是五十个字符当中的任何一个，因此有五十种可能性。对这五十种可能性当中的每一种，第二个字符又有五十种可能性，因此共有 $50 \times 50 = 2,500$ 种。对于这前两个字符的每一种可能性，第三个字符仍有五十种选择。这样下去，整行进行安排的可能性的总数等于

$$\overbrace{50 \times 50 \times 50 \times \cdots\cdots \times 50}^{65\text{个}}$$

或者 50^{65}，即等于 10^{110}。

要想知道这个数字有多么巨大，你可以设想宇宙间的每个原子都变成一台独立的印刷机，这样就有 3×10^{74} 部机器同时工作。再假定所有这些机器从地球诞生以来就一直在工

作，即它们已经工作了三十亿年或 10^{17} 秒。你还可以假定这些机器都以原子振动的频率进行工作，也就是说，一秒钟可以印出 10^{15} 行。那么，到目前为止，这些机器印出的总行数大约是

$$3\times10^{74}\times10^{17}\times10^{15}=3\times10^{106},$$

这只不过是上述可能性总数的三千分之一左右而已。

看来，想要在这些自动印出的东西里面挑选点什么，那确实得花费非常非常长的时间了！

2. 怎样计数无穷大的数字

上一节我们谈了一些数字，其中有不少是毫不含糊的大数。但是这些巨大的数字，例如西萨·班所要求的麦子粒数，虽然大得难以令人置信，但毕竟还是有限的，也就是说，只要有足够的时间，人们总能把它们从头到尾写出来。

然而，确实存在着一些无穷大的数，它们比我们所能写出的无论多长的数都还要大。例如，"所有整数的个数"和"一条线上所有几何点的个数"显然都是无穷大的。关于这类数字，除了说它们是无穷大之外，我们还能说什么呢？难道我们能够比较一下上面那两个无穷大的数，看看哪个"更大些"吗？

"所有整数的个数和一条线上所有几何点的个数，究竟哪个大些？"——这个问题有意义吗？乍一看，提这个问题可真是头脑发昏，但是，著名数学家康托尔（Georg Cantor）首先思考了这个问题。因此，他确实可被称为"无穷大数算术"的奠基人。

当我们要比较几个无穷大的数的大小时，就会面临这样一个问题：这些数既不能读出来，也无法写出来，该怎样比较呢？这下子，我们自己可有点象一个想要弄清自己的财物中，究竟是玻璃珠子多，还是铜币多的原始部族人了。你大概还记得，那些人只能数到三。难道他会因为数不清大数而放

弃比较珠子和铜币数目的打算？根本不会如此。如果他足够聪明，他一定会通过把珠子和铜币逐个相比的办法来得出答案。他可以把一粒珠子和一枚铜币放在一起，另一粒珠子和另一枚铜币放在一起，并且一直这样做下去。如果珠子用光了，而还剩下些铜币，他就知道，铜币多于珠子；如果铜币先用光了，珠子却还有多余，他就明白，珠子多于铜币；如果两者同时用光，他就晓得，珠子和铜币数目相等。

康托尔所提出的比较两个无穷大数的方法正好与此相同：我们可以给两组无穷大数列中的各个数一一配对。如果最后这两组都一个不剩，这两组无穷大就是相等的；如果有一组还有些没有配出去，这一组就比另一组大些，或者说强些。

这显然是合理的、并且实际上也是唯一可行的比较两个无穷大数的方法。但是，当你把这个方法付诸实用时，你还得准备再吃一惊。举例来说，所有偶数和所有奇数这两个无穷大

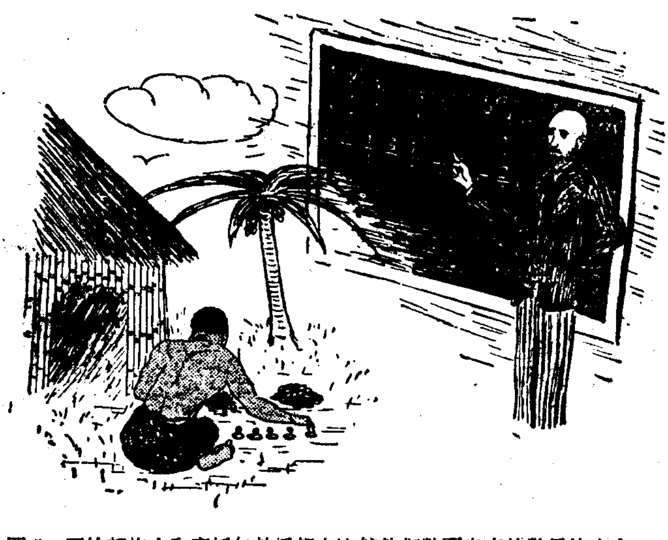


图 5　原始部族人和康托尔教授都在比较他们数不出来的数目的大小