

TONGSU SHUXUE MINGZHU YICONG



## 通俗数学名著译丛

ERSHISHIJI SHUXUE DE  
WUDA ZHIDAO LILUN

〔美〕约翰·L·卡斯蒂 著

叶其孝 刘宝光 译

上海教育出版社

20 世纪数学的  
五大指导理论

00127043

01-0

37

# 20 世纪数学的 五大指导理论

—— 以及它们为什么至关重要

[美]约翰·L·卡斯蒂著 叶其孝 刘宝光译 · 上海教育出版社



John L. Casti

## Five Golden Rules

Great Theories of 20th-Century Mathematics

—and Why They Matter

John Wiley & Sons, Inc.

© John L. Casti 1996

根据约翰·威利公司 1996 年第 1 版译出，

本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

### 图书在版编目 (CIP) 数据

20 世纪数学的五大指导理论：以及它们为什么至关重要 / (美) 卡斯蒂著；叶其孝，刘宝光译．—上海：上海教育出版社，2000.11

(通俗数学名著译丛 / 史树中，李文林主编)

ISBN 7-5320-7092-1

I. 2... II. ①卡... ②叶... ③刘... III. 数学理论—普及读物 IV. 01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 42469 号

通俗数学名著译丛

### 20 世纪数学的五大指导理论

——以及它们为什么至关重要

[美] 约翰·L·卡斯蒂 著

叶其孝 刘宝光 译

上海世纪出版集团 出版发行  
上海教育出版社

(上海永福路 123 号 邮政编码: 200031)

各地新华书店经销 上海江扬印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 8.25 插页 4 字数 192,000

2000 年 12 月第 1 版 2000 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—7,100 本

ISBN 7-5320-7092-1/G·7248 定价: (软精) 16.40 元

迎接 2000 數學年

陳省身 1997

## 译丛序言

数学,这门古老而又常新的科学,正阔步迈向 21 世纪.

回顾即将过去的世纪,数学科学的巨大发展,比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时,数学作为一种文化,已成为人类文明进步的标志.因此,对于当今社会每一个有文化的人士而言,不论他从事何种职业,都需要学习数学,了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要,在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面,20 世纪数学思想的深刻变革,已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法,门外汉往往只好望而却步.这样,提高数学的可接受度,就成为一种当务之急.尤其是当世纪转折之际,世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作,国际数学联盟(IMU)还专门将 2000 年定为“世界数学年”,其主要宗旨就是“使数学及其对世界的意义被社会所了解,特别是被普通公众所了解”.

一般说来,一个国家数学普及的程度与该国的数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步,数学普及工作在我国也受到重视.早在 60 年代,华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读

FR02/1P

物,激发了一代青少年学习数学的兴趣,影响绵延至今.改革开放以来,我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说,我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要下世纪初率先赶超世界先进水平,数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在海外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;……等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气,有关选题逐年减少,品种数量不断下降.在这样的情况下,上海教育出版社以迎接 2000 世界数学年为契机,按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类

通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》出版成功.

让我们举手迎接 2000 世界数学年,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

1997 年 8 月



## 序 言

支撑任何需要智力努力的领域的生命线是不断地有稳定数量的重要、未解决(但原则上是能解决的)的问题的注入.例如,射影几何一度是数学中一个繁荣而富有成果的领域,但如今就像渡渡鸟<sup>①</sup>那样灭绝了,理由很简单:一百多年前问题的泉源就已枯竭了.另一方面,对当今风行一时的混沌来说,直到洛伦兹(Lorenz),斯梅尔(Smale),费根鲍姆(Feigenbaum),约克(Yorke),梅(May),吕斯勒(Rössler)和其他人晚近的工作鼓舞着当今混沌学家、他们的学生、追随者所倾泻出的大量的问题之前,除了少数几个数学上很神秘、有远见的冒险家和行家外,大家对混沌一无所知.这些例子清楚地说明了乔治·波利亚(George Pólya)的众所周知的名言:“数学就是问题解决的艺术.”然而和其他专业的科学家不同的是,数学家有一个专门名词来表达他们对某个问题的解决——那就是定理.

数学就是关于定理的学问:怎样发现定理;怎样证明定理;怎样推广定理;怎样运用定理;怎样理解定理.《五大指导理论》企图通过展示本世纪数学家的艺术的五个最精致的成就来告诉一般的读者有关数学的知识.本书总的计划是考察数学中已经解决的几个最大的问题,这些问题是怎样解决的,最重要的是为什么其解决是至关重要的——不仅仅对数学家是至关重要的.

---

① 译注: 鸽形目, 孤鸽科鸟类, 原产毛里求斯, 1681 年已经灭绝.



因此,《五大指导理论》的目标是通过例子启发、娱乐和教育而不  
[ix] 是通过教条来达到上述目的.

S·乌拉姆(Stanislaw Ulam)一度估计过每年数学家要发表20多万条定理.这些定理的绝大部分无人问津,只有极小部分定理为相当数量的数学家所理解和信服.鉴于数学在我们这个星球上已经有了几个世纪的实践这一事实,要从即使是本世纪<sup>①</sup>发表的迄今已有数百万条的定理中挑出一些“最伟大”的定理,初一看这似乎是前景渺茫的.但是只要加上不多几个条件,或“过滤器”,这项工作马上就大大减少,从而能把伟大的定理从冒充伟大的定理中分离出来.就本书中强调的五个受人珍视的数学珍宝而言,以下就是我采用的准则:

- 意义重大: 该定理是否突破了数学发展中的一个重大的僵局或障碍? 或者该定理是否导致数学研究中新领域的确定? 例子: 莫尔斯(Morse)定理,它激发了奇性理论的发展.
- 优美性及其影响所及的范围: 该定理是否像一首诗或像一幅图画是优美的同样意义下具有内在的“优美性”? 该定理是否紧凑地综述了大量的知识? 该定理是否使人进一步了解数学内部相当多领域中的各种问题? 例子: 布劳威尔(Brouwer)不动点定理,该定理使我们能对各种框架下在很一般的数学条件下证明方程解的存在性.
- 应用: 该定理是否找到了数学之外的重要应用? 该定理是否确保存在的数学结构为更全面地了解自然和(或)人类世界提供了基础? 例子: 极小极大定理,它为经济学及其他领域中关于决策者的行动是“合理的”的意义是什么这样一些问题的许多数学研究工作奠定了基石.
- 证明方法: 定理的证明是否需要利用新的逻辑技巧或推

---

① 译注: 指20世纪.

理模式？能否使用这些方法使其他重要问题取得进展？  
例子：停机定理，其证明集中注意力于利用算法的思想来建立数学真理的想法。

- 哲学含意：该定理是否告诉我们以前不知道的关于人类的某些重要事情？该定理的结论是否加上了重要的限 [x] 制，或者反过来讲，是否为我们就我们可能知道的关于宇宙以及我们自己的更深刻的洞察开创新的机遇？例子：哥德尔(Gödel)的不完全性定理，该定理就人类阐明现实世界真理的能力加上了限制。

为有资格进入我们这种荣誉的名单，一条定理必须就这些范畴的大多数，即使不是全部的话，取得高分。无须太多想象就能看出，利用这些过滤器很快就可以把乌拉姆估计的数百万条定理削减到可以操作的规模。

但是伟大的定理不是孤立存在的；他们导致重大的理论。如前面指出过的，一条定理的意义的部分就在于或是在创造这些理论或是以某种方式养育、繁荣这些理论中作出的贡献。为此，我们这里注目的至少要像对待 20 世纪伟大的理论一样地对待伟大的定理自身。

浏览一下本书目录后读者可能会问，为什么本书中所考虑的定理都这么古老？五大指导理论中最新的是单纯形方法，这也要追溯到 1947 年，而最早的布劳威尔不动点定理发表于 1910 年。如果这是我们追求的现代数学，即 20 世纪的数学，为什么 20 世纪后半世纪的研究工作一点没有呢？当考虑到通常的舆论认为本世纪后半半个世纪中做出的有意义的数学研究工作要比前几个世纪的数学研究的总和还要多时，这就更加令人费解了。

这是一个相当合情合理的问题，所以值得给予一个仔细考虑过的回答。回答基本上在于以下的事实，即我们实际上追求的是伟大的理论，而不是伟大的定理。而数学中伟大的理论就像伟大的诗篇、伟大的绘画或伟大的文学一样，需要时间使之成熟以



及被人确认为是“伟大的”。这使我回想起当英国首相参观法拉第<sup>①</sup>的实验室时法拉第的一个旁注。当法拉第叙述他在电学中的最新发现时,这位尊敬的绅士问道:“这有什么好呢?”法拉第回答说:“新生婴儿有什么好的,你必须等他(她)发育成长。”对于伟大的定理,情况也是这样。一般说一条伟大的定理至少要有 [xi] 一代或两代人的时间才能“发育成长”,即被人们确认为是随后生长出来的一种伟大理论的种子。所以,我们所看到的当今的伟大理论几乎可以肯定其源起的日子是在二次大战前的时期。我也毫不怀疑从现在起十年后写的一本与本书类似的书中将注目于 60 或 70 年代的定理,他们现在正处在形成更伟大的理论的开始阶段。我还要指出有时候一种伟大理论的产生还需要技术的进步。例如,我十分怀疑如果没有过去几十年里发生的计算技术的重大进展,本书中论及的两个伟大的理论——最优化理论和计算的理论——会出现在像本书那样的任何一本著作中。

当我第一次想到有关本书的想法时,我就关于报告 20 世纪最伟大的定理和理论的一本书中应包括什么的问题询问了许多朋友和数学家他们会怎么做。某一天我想发表他们的一系列意见,可惜的是有点太长了,发表在这里不太自如。但是当我做出最后选择时,有人就问我为什么本书是如此的“不纯粹(数学)”;为什么所有的理论(除与拓扑学有关的可能是例外)都是某些人委婉地(或贬意地!)称之为“应用数学”(顺便说一句,我回避这个术语)的领域。为什么丝毫没有称之为“纯粹”数学的东西?有两方面理由:(a)我们都是由我们的口味和背景所控制制约的人,数学上,我的专业偏向于应用的方向,还有(b)我希望本书集中注意于为什么普通人(即,非学术界人士)应该关心作为他们

---

① 译注: Michael Faraday, 1791.9.22 ~ 1867.8.25, 英国物理学家、化学家和物理化学家。发现电磁感应现象、电解定律和光与磁的基本关系,创立现代电磁场的基本观念。出身于铁工家庭。



日常生活中一种因素的数学,这样一个目标再次把材料偏向于应用方面.我肯定期望其倾向与我不同的人写一本类似的书,该书可能是讨论诸如阿蒂雅—辛格(Atiyah-Singer)指标定理(偏微分方程),有限单群分类定理(群论)以及哈恩—巴拿赫(Hahn-Banach)定理(泛函分析)等伟大的现代结果(和理论).但我不认为我会是写这样一本书的作者.

因为我声称本书是为那些希望了解数学以及数学为什么至关重要的人写的,我至少是在含蓄地讲这是一本为非数学家写的书.这一事实就需要某种“解构”(deconstruction).让我一开始就来说一下,就我的个人之见,完全不用数学来写一本有关数学的书是一种回避现实的手法,即有损于有才智的读者也给数学本身帮了倒忙.写一本这样的关于数学的“儿童交谈”的书,需要 [xii] 或者只讨论像几何和分形分析那样的画图的题目,或讨论常常是不失趣味性的包含数的性质,简单概率论或初等逻辑的智力游戏——实际的数学的细节在其内容中发挥作用.所以我选择了一条不同的、不那么具有报刊特点而且也是更为危险的路线.本书采用的路线是爱因斯坦很久以前口述的,当时他说道:“一种理论应该尽可能简单,但是不能更简单了.”所以允许我试着把这个有点令人困惑的笔记翻译成针对本书读者的一种陈述.

就本书提供的材料而言,读者要有一点我喜欢称之为精致的数学基础.这并不意味着读者实际上懂得任何数学技巧或方法,本书中很少要用到技术数学的方法(实际上,没有),但是要用到许多数学的概念、思想和多步推理.此外,我并不相信由S·W·霍金<sup>①</sup>的著作编辑很好记述下来的以下说法,即一书中

---

① 译注: Stephen W. Hawking, 1942.1.8~, 英国理论物理学家. 他有关爆炸黑洞的发现有助于把相对论和量子力学联系起来. 他患有严重的肌萎缩性脊髓侧索硬化症, 行动困难, 而竟能在物理上作出突出贡献, 因此倍受尊重. 1974年当选为皇家学会最年轻的会员.

每个方程将使其销售量减半. 我的理想的读者大概也不会相信这种说法. 零星的方程以及偶尔有一个希腊字符甚至一、二个图也会间或地出现在书中. 但是关心数学家达到的成就以及为什么这些成就是重要的读者丝毫不会被这种做法所吓倒. 他或她将把这些小小的障碍猛踢到旁边去, 就好像这些障碍比恼人的蚊子麻烦不了多少. 所以本书是为任何不惧怕面对实际数学思想——迎面而上的人的. 差不多任何一个学过高中代数或几何而且至少还对数学思想保留一点热情的人就属于这一范畴——即使很早前学过的课程细节已从记忆中消失也没有关系. 要关心的正是这些思想和正视这些思想的愿望, 而不是技术细节.

那么对具有相当数学基础的读者又怎样呢? 如果对本书的草稿的各种建议可以作为判断的依据的话, 那么即使是许多专业的数学家也将从本书中找到他们感兴趣的材料. 当然他们找不到人们期望从数学教科书或研究专著中才有的严格而详细的证明. 本书不是为“想要成为”数学家的人用的教科书(虽然本书曾作为文学院“为诗人用的数学”类型的大学生课程的教材用得很好). 本书肯定不是一本专著. 本书纯粹是阐明性的. 对于本书中只有广泛概要的内容想要作深入细节了解的读者来说, 我对每个主题穿插安排了具有各种数学难度又有更多细节的文献目录.

对于诸如本书那样的要把许多资料集中起来的工作来说, 来自各方的信息及鼓励始终是非常宝贵的. 所以还是让我履行参与写作任何一本书的各项工作中最令人高兴的事, 即, 向把他们的宝贵时间慷慨奉献给本书的朋友们和同事们表示我的敬意, 以此来结束这已经是过长的序言吧. I·斯图尔特(Ian Stewart), P·戴维斯(Phil Davis), D·沙瑞(Don Saari), M·舒比克(Martin Shubik), A·杰克逊(Atlee Jackson)和 G·柴丁(Greg Chaitin)对本书的内容和风格都提供了想法和博学的忠告. 基于

[xiii]

---

同样的理由,我想对我过去的老师、朋友和现在的同事 T·基纳 (Tom Kyner) 单独表示我特别的敬意. 他仔细阅读了原始手稿的每一行并提出了建议,使得最后的定稿得以改进,并把我从几个十足的技术失着及其他无知和不恰当处解救出来. 对于 T<sub>E</sub>X 排版顾问,要感谢 M·伏利斯 (Michael Vulis) 和 B·洪 (Berthold Horn). 在本书设计中,专业图书中心 (Professional Book Center) 的 J·博伦丁 (Jennifer Ballentine) 提出了很好的想法及建议.

最后,我要赞扬本书的编辑 E·鲁斯 (Emily Loose),她一直是鼓励和目光敏锐的编辑源泉,正由于此,最终出版的本书比我能期望的要好得多. 我感谢以上所有的人,也要对不知不觉中带入最终版本的各种差错请求宽恕. 我抱歉地说,这些都只是我的责任.

约翰·L·卡斯蒂  
圣塔菲学院,新墨西哥州 [xiv]

# 目 录

|                   |    |
|-------------------|----|
| 序言                | 1  |
| 第 1 章 极小极大定理(对策论) | 1  |
| 你死我活的对策           | 1  |
| 策略的对策             | 7  |
| 两人零和对策            | 8  |
| 康科德军火库对策          | 9  |
| 让他们去猜吧            | 12 |
| 石头—剪刀—纸对策         | 13 |
| 极小极大定理            | 16 |
| 战斗机和轰炸机           | 19 |
| 计算最优混合策略          | 21 |
| 对策论——一种分类法        | 24 |
| 胆小鬼               | 27 |
| 古巴导弹危机            | 30 |
| 混合动机对策            | 32 |
| 领先者               | 33 |
| 性别之战              | 34 |
| 囚徒两难对策            | 35 |
| 合作的出现             | 38 |
| 真实世界,人为对策         | 43 |



|                    |     |
|--------------------|-----|
| 第2章 布劳威尔不动点定理(拓扑学) | 45  |
| 针和干草堆              | 45  |
| 空间的形状              | 50  |
| 拓扑学                | 54  |
| 拓扑等价               | 56  |
| 不动点游戏              | 62  |
| 解方程                | 63  |
| 美元和理智              | 64  |
| 枪和黄油               | 66  |
| 圆盘、正方形和不动点         | 69  |
| 紧性和凸性              | 71  |
| 豪猪和旋风              | 73  |
| 不动点的确定             | 75  |
| 不动点性质              | 77  |
| 登月                 | 80  |
| 职业流动               | 83  |
| 夺魁者                | 84  |
| 第3章 莫尔斯定理(奇点理论)    | 88  |
| 纸张揉皱的方法            | 88  |
| 两个柱体间流体的流动         | 95  |
| 泰勒余项               | 97  |
| 电力生成               | 101 |
| 对泰勒余项下功夫           | 102 |
| 看似相似的事物            | 104 |
| 莫尔斯定理              | 105 |
| 托姆分类定理             | 113 |
| 桥和杆                | 118 |
| 分歧、突变和平衡点          | 120 |
| 局部有多局部?            | 125 |

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 事物的形状·····           | 126 |
| 笑和哭·····             | 130 |
| 小题大作·····            | 134 |
| 第4章 停机定理(计算的理论)····· | 136 |
| 计算与计算的算法·····        | 136 |
| 鳄梨酱算法·····           | 137 |
| 欧几里得算法·····          | 138 |
| 图灵的不可思议的机器·····      | 139 |
| 不可计算·····            | 144 |
| 忙碌海狸对策·····          | 146 |
| 图灵机对策·····           | 148 |
| 根据无限性吗? ·····        | 150 |
| 图灵—丘奇论题·····         | 151 |
| 形式和内容·····           | 152 |
| 不可判定·····            | 157 |
| 制造智慧·····            | 166 |
| 限度就是可数无穷·····        | 170 |
| 停机概率·····            | 172 |
| 难耐时间·····            | 176 |
| P 和 NP ·····         | 178 |
| 计算的模型·····           | 180 |
| 第5章 单纯形法(最优化理论)····· | 183 |
| 旅行者的数学·····          | 183 |
| 线性地思考·····           | 186 |
| 单纯形法·····            | 190 |
| 对偶和食谱·····           | 195 |
| 整数规划·····            | 198 |
| 图和桥·····             | 199 |
| 所以网络就流动起来了·····      | 201 |