

高等学校教学用書



理論物理学

亚·索·康帕涅茨著

人民教育出版社

533
524
63

高等学校教学用書



理 論 物 理 學

亞·索·康帕涅茨著
文 华 譯

人民教育出版社

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社 (Гостехиздат) 出版亚·索·康帕涅茨 (А. . Константин) 所著“理论物理学”(Теоретическая физика)一书的第二版 (1957年改编增订本) 翻出。原书经苏联高等教育体审定为师范学院及高等工业学校的教学参考书。

全书共分力学、电动力学、量子力学及统计物理学四篇，可供学过普通物理及高等数学课程的读者们使用。

理 论 物 理 学

亚·索·康帕涅茨

戈 韶 譯

人民教育出版社出版

高等学校教材图书編輯部

北京市書局出版業許可證出字第21号

京 华 印 节 局 印 刷

新华书店科技发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

统一书号 13010·748 开本 850×1168 1/2 印张 20 1/2

字数 551,000 印数 22,001—27,000 定价 (6) 1.90

1960年4月第1版 1961年9月北京第3次印刷

第一版原序摘录

本書指望讀者已經具备高等学校非专业課程範圍以內的普通物理學知識及數學分析知識。本書主要是為工程物理學家們編寫的，但是，它也可供在物理學鄰近領域中工作的專家們使用，即可供化學家們、物理化學家們、生物物理學家們、地球物理學家們、天文學家們使用。

正象一般的自然科學一樣，物理學首先也是建築在實驗的基礎上、而且是定量實驗的基礎上的。但是，在它們彼此之間建立起嚴格的邏輯聯繫以前，任何實驗的總和都還不能形成理論。理論不但提供將已有的實驗資料加以系統化的可能，而且也提供預見新事實的可能；這種新事實可以用實驗加以驗証。

所有的物理定律都是以定量關係的形式表示出來的。為了建立定量規律性之間的相互聯繫，理論物理學將求助於數學。只有通曉大量數學的人，才可能全面地領會建築在數學基礎上的理論物理學方法。儘管如此，一個對微積分有所理解、並具有矢量代數知識的讀者，是完全可以學懂理論物理學的基本思想及主要結果的。這些最低限度的數學知識，也就是了解本書所必需的。

同時，本書不但應該告訴讀者理論物理學是什麼，而且還應該教給他們理論物理學的基本方法。為此目的，就必需尽可能保持敘述的嚴格性。一個讀者是很容易同意在他看來顯然是不可避免的一些結論的。為了促進學習者的理解，理論的一系列應用都放在习題中去了；在习題中，思維過程講述得不象正文那樣詳盡。

在編寫這樣一本分量比較不大的書時，理論物理學中的若干重要分支只能占到很小的篇幅，而另一些分支則完全沒有包括進去。首先，書中完全沒有包括連續媒質的力學。但是，要想講述這一學科，即使講

授到象本書中其他部分那样的詳尽程度，最少也需要把書的篇幅增加一倍。連續媒質力学的少數結果，已經作為熱力学的演示包括在习題中了。同时，連續媒質的力学及電動力学，并不象微观电动力学、量子論及統計物理学一样和物理学中原則性的、認識論性的問題联系得那么密切。因此，宏观电动力学也就占了較小的篇幅：材料的选择是要告訴讀者如何从微观电动力学过渡到似穩場的理論及过渡到光在媒質中的傳播定律。这时我們假設，讀者已經在物理学課程及电工学課程中学到了这些問題。

大体說來，本書是为了那些对物理学中的基元过程有兴趣的讀者編写的。这样一种想法，也就規定了材料的选择；在一切非百科全書性的人門書籍中，选择材料总难免是有点主观的。

在編寫中，I. A. 朗道及 E. M. 萊弗席茲的卓越著作“理論物理学教程”一書，使我获益非淺。这一巨著，可以推荐給所有愿意获得深入的理論物理学知識的人們。

我愿向 Л. В. 澤里多維奇、В. Г. 列維奇、Е. А. 佛因別爾格、В. И. 科岡及 В. И. 高爾丹斯基这些曾經給予重要指教的朋友們表示深切的感謝。

亞·索·康帕涅茨

第二版原序

在本書第二版中，我力求敘述得更加系統和更加謹嚴，而不減小書的可接受性。为此，第三編就需要特別的加工；在該編中，增加了講到量子力学普遍原理的特別的一節（§ 30）。輻射現象現在是只借助于電磁場的量子理論來加以研究的，因為，由對應原理求得的結果，顯得是沒有充分根據的。

書中包括了吉布斯統計學。為此目的，第四編似乎就分成了兩個部分： §§ 39-44 及 §§ 45-52；前一部分只講述了用組合法所得的結果；後一部分則提出了吉布斯方法的概念，並在這種概念的基礎上講述了熱力学。在現代的理論物理學教本中，唯象地來建立熱力学已經是過時的了。

為了不至於过多地增加本書的篇幅，不得不省略了 β 蠕變的理論、本征值的變分性質以及第一版中曾經敘述過的若干其他問題。

我非常感謝 A. Φ. 尼基法羅夫及 B. B. 烏丘羅夫；他們曾經指出了本書第一版中一系列不够严格的地方。

亞·索·康帕涅茨

目 录

| | |
|----------------------------|-----|
| 第一版原序摘录 | v |
| 第二版原序 | vii |
| 第一編 力学 | 1 |
| § 1. 广义坐标 | 1 |
| § 2. 拉格朗日方程 | 3 |
| § 3. 建立拉格朗日方程的例子 | 15 |
| § 4. 守恒定律 | 23 |
| § 5. 转力场中的运动 | 36 |
| § 6. 粒子的碰撞 | 44 |
| § 7. 微幅振动 | 55 |
| § 8. 转动参照系 惯性力 | 66 |
| § 9. 刚体动力学 | 73 |
| § 10. 力学的普遍原理 | 82 |
| 第二編 电动力学 | 94 |
| § 11. 矢量分析 | 94 |
| § 12. 电磁场·麦克斯韦方程 | 108 |
| § 13. 电磁场的作用量 | 123 |
| § 14. 点电荷的静电学·缓变场 | 131 |
| § 15. 点电荷的静磁学 | 144 |
| § 16. 物质性媒質的电动力学 | 153 |
| § 17. 平面电磁波 | 174 |
| § 18. 信号的传递·准平面波 | 186 |
| § 19. 电磁波的辐射 | 195 |
| § 20. 相对論 | 206 |
| § 21. 相对論力学 | 230 |
| 第三編 量子力学 | 251 |
| § 22. 经典力学的缺陷·力学和几何光学之間的类似 | 251 |
| § 23. 电子衍射 | 260 |
| § 24. 波动方程 | 268 |
| § 25. 量子力学的若干問題 | 277 |
| § 26. 量子力学中的谐振子·线性谐振子 | 293 |

| | |
|-----------------------------|-----|
| § 27. 由磁场的量子化 | 299 |
| § 28. 混經典近似 | 309 |
| § 29. 量子力学中的算符 | 322 |
| § 30. 狄拉克方程的展开 | 333 |
| § 31. 轴力场中的运动 | 346 |
| § 32. 电子的自旋 | 359 |
| § 33. 多电子原子·門捷列夫周期律 | 369 |
| § 34. 辐射的量子理論 | 390 |
| § 35. 恒定外场中的原子 | 407 |
| § 36. 色散的量子理論 | 419 |
| § 37. 散射的量子理論 | 427 |
| § 38. 电子的相对論波动方程 | 437 |
| 第四編 統計物理学 | 455 |
| § 39. 理想气体分子的平衡分布 | 455 |
| § 40. 玻耳茲曼統計學(分子的平动·外場中的气体) | 473 |
| § 41. 玻耳茲曼統計學(分子的振动和轉動) | 495 |
| § 42. 統計學对于电磁場及結晶体的应用 | 506 |
| § 43. 玻色分布 | 525 |
| § 44. 费密分布 | 529 |
| § 45. 吉布斯統計學 | 553 |
| § 46. 热力学量 | 568 |
| § 47. 玻耳茲曼統計學中理想气体的热力学性質 | 593 |
| § 48. 起伏 | 605 |
| § 49. 相平衡 | 617 |
| § 50. 稀溶液 | 629 |
| § 51. 化学平衡 | 639 |
| § 52. 表面現象 | 645 |
| 附录 | 649 |
| 参考文献 | 652 |

第一編 力學

§ 1. 广义坐标

參照系 为了描述一个力学系统的运动，必需给出和时间有关的它的空間位置。显然，只有談論任意点的相对位置才是有意义的。例如，飞行着的飞机的位置，是相对于和地球相联的坐标系来确定的；加速器中带电粒子的运动，是相对于加速器来确定的；等等。相对于它来确定运动的系统叫做參照系。

時間的確定 正如以后(§ 20)所要証明的，在一般情况下，時間的確定，也是和確定時間时所在的那個參照系的確定分不开的。我們在日常生活中所熟悉的那种关于普遍的、同一的時間的直觀概念，是一定程度上的近似；只有当一切物質粒子的相对速度都比光速小得多时，这种近似才是正确的。这种緩慢运动的力学叫做牛頓力学，因为 I. 牛頓第一个表述了这种力学的定律。

如果知道了力学系統中一切点在某一初时刻的位置及速度，并知道了系統中作用着的力，那么，利用牛頓定律就能够求得系統在任意时刻的位置。

力学系統的自由度 決定一个力学系統空間位置的独立參量的数目，叫做該系統的自由度數。

一質点相对于其他物体的空間位置，是由三个独立參量来确定的，例如由它的笛卡儿坐标來确定。由 N 个質点組成的系統，一般說來其位置决定于 $3N$ 个独立參量。

但是，如果質点的分布在一定程度上是固定的，自由度數也就可能比 $3N$ 少。例如，如果两个質点是由某种不变形的剛性杆联接起来的，

那么，在該二質點的六个坐标 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ 之間就加上了一个条件：

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = R_{12}^2. \quad (1.1)$$

式中 R_{12} 是二点間的已知距离。因而，笛卡儿坐标不再是独立參量了：它們之間存在着一个关系式。在六个量 x_1, \dots, z_2 中，現在只有五个是独立的了。換句話說，由距离不变的两个質點所組成的系統，具有五个自由度。如果考慮剛性地联接成一个三角形的三个質點，那么，第三个点的坐标就應該滿足两个等式：

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = R_{13}^2; \quad (1.2)$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = R_{23}^2. \quad (1.3)$$

于是，剛性三角形各頂點的九个坐标，就适合三个等式(1.1)、(1.2)及(1.3)，从而九个量中就只有六个是独立的了。因此，三角形具有六个自由度。

固体在空間的位置决定于不在同一直線上的三个点。我們剛才已經看到，这样三个点具有六个自由度。由此可見，任意一个固体，具有六个自由度。这时，只考慮固体的这样一种运动，在运动过程中固体并不发生足以影响运动的显著形变；例如陀螺的轉动。

广义坐标 用笛卡儿坐标来確定系統的位置，并不見得永远都是很方便的。我們已經看到，当存在剛性約束时，笛卡儿坐标就会适合一些附加的方程。此外，坐标系的选择是任意的，因而首先應該适当地加以确定。例如，如果力仅仅和粒子間的距离有关，那么，将这种距离直接引入动力学方程，而不是通过笛卡儿坐标来間接地引入，那就是很合理的了。

換句話說，一个力学系統可以用一些參量來描述，其数目等于系統的自由度数。这些參量有时也可以和这一質點或那一質點的笛卡儿坐标重合。例如，在带有剛性約束的二質點系中，这些參量可以这样選擇：用笛卡儿坐标确定其中一質點的位置；然后；另外一質點就必然位

于以第一質点为心的球面上。第二个質点在球面上的位置，可以用它的經緯度来确定，第一个点的三个笛卡儿坐标和第二个点的經緯度一起，就能完全确定这一系統在空間的位置。

对于剛性联接着的三个質点來說，應該用剛才叙述的方法来給定三角形一个边的位置，并給出第三个頂点繞此边轉过的角度。

决定一力学系統在空間的位置的独立參量，叫做該系統的广义坐标。我們將用符号 q_α 来代表这种坐标；式中的角碼 α 代表自由度的編号。

正象笛卡儿坐标的选择一样，广义坐标的选择在很大程度上也是任意的。應該适当地选择它們，以便尽可能方便地写出系統运动的动力学定律。

§ 2. 拉格朗日方程

在本节中，将在任意的广义坐标下，求出运动方程。在这样的形式下，該方程在理論物理中是特別便于应用的。

牛頓第二定律 力学中的运动，就是物体的相互空間位置在時間中的变化。換句話說，这种运动是用相对距离(或长度)及一段時間来描述的。同时，如上节所述，一切运动都是相对的：只能相对于某一確定参照系来确定它。

牛頓曾經按当时的科学水平，假定长度和一段時間的概念是絕對的，也就是假定，在一切参照系中，对应的量是相同的。我們以后将要証明，牛頓的这个假設带有近似的特点(参閱 § 20)。当一切粒子的相对速度都远比光速小时，牛頓的假設是正确的。在这种情况下，牛頓力学得到大量實驗事实的支持。

为了表述运动定律，引用質点的概念是十分方便的；所謂質点是这样一个物体，其位置完全决定于三个笛卡儿坐标。严格說来，这种理想化并不能适用于任何一个物体。然而，当物体的运动可以用物体上任

意點(例如物体的重心)在空間的平動來相當準確地決定，而和物体的轉動及形變无关時，這種理想化就是完全合理的。

如果將質點概念作為力學的初步對象來考慮，那麼運動定律(牛頓第二定律)就可以表述如下：

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (2.1)$$

此处 \mathbf{F} 是作用在質點上的一切力的合力(力的矢量和)； $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ 是加速度矢量，其笛卡兒分量是：

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}.$$

方程中的量 m 是表征質點的，叫做質點的質量。

力和質量 等式(2.1)是力的定義。但是，不應該把它看成單純的恒等式或符號，因為，(2.1)式確定了力學中物体間相互作用的形式，從而事實上就描述了某種自然規律。相互作用是用微分定律來反映的，這種定律只包含坐標對時間的二級導數(而不包含，譬如說，四級導數)。

此外，通常還要作出有關力的某種限制性假設。在牛頓力學中，人們承認力仅仅和等式所針對之時刻的物体相互排列有關，而和以前各時刻的物体排列无关。我們以後就將看到(參閱第二編)，只有當物体速度遠小於光速時，這一有關相互作用之特點的假設才是正確的。

在等式(2.1)中，包含了一個表征物体的量 m ——物体的質量。通過比較同一力所賦予不同物体的加速度，就可以確定質量：加速度越大，質量越小。要想量度質量，就需要把某一物体取作標準體。標準體的選擇是和長度標準、時間標準的選擇完全無關的。因此，質量的量綱(或量度單位)是一個獨立的量綱，和長度及時間的量綱沒有連系。

質量的性質要通過實驗來確定。首先可以證明，同一物質的兩個相等部分，其質量等於每一部分的質量的兩倍。例如，可以取兩個相同

的砝码来证实这一点：用一定的方式拉长了的弹簧，将赋予它们相等的加速度。如果将两个砝码结合在一起而用同一个弹簧来对它发生作用，弹簧的拉伸程度也和分别作用于每一个砝码时的一样，那么，加速度就将减小一半。由此可見，砝码的总质量两倍于单个砝码的质量，因为力只和弹簧的拉伸有关，从而是不可改变的。于是，象我們通常在总量等于各部分量的总和的情况下所說的一样，质量是一种可加量。經驗証明，对于由不同物质組成的物体，质量可加性定律也是适用的。

此外，在牛頓力学中，物体的质量是在运动时并不改变的一个恒量。

不應該忘記，质量的可加性和恒定性仅仅是由实验事实得出的一些性质，这种实验事实和十分具体的运动形态有关。例如，化学变化中最为重要的质量守恒定律，是由 M. B. 罗蒙諾索夫利用实验建立起来的，而化学变化是和物体中分子及原子的重新組合有关。

也象由实验得出的一切定律一样，质量可加性定律具有一定的准确度。在相互作用象存在于原子核中的那种相互作用一样强时，质量的可加性就已經受到相当的破坏了（詳細情况請參閱 § 21）^④。

我們指出，如果我們用重力代替被拉伸的弹簧的力来作用在物体上，那么，两倍质量的物体的加速度就将等于每一个单独物体的加速度。由此我們就得出結論：重力本身是和物体的质量成正比的。因此，在真空中，当空气阻力不存在时，一切物体都将以相同的加速度下落。

惯性参照系 方程 (2.1) 中含有質点的加速度。若不指出这加速度是相对于哪一个参照系来测定的，談論加速度就毫无意义。因此，在指明加速度的原因时就发生了一定的困难。这种原因既可能是物体間的相互作用，也可能是参照系本身的特点。例如，当突然刹车时，乘客

④ 关于这問題，原著者的观点和一般流行的觀点頗有出入。這問題牽涉到哲学；有兴趣的讀者請參閱有关的哲学文献，例如辯証唯物論与自然科学，第二册（中国人民大学出版社）——譯者注。

所感受到的震動就表明車輪相对于地球的運動的不均勻性。

我們考慮沒有受到其他物体作用的某一物体集合，也就是說，考慮離其他物体充分遠的一個集合。可以假設存在這樣的參照系：在該參照系中，所考慮的集合中所有物体的一切加速度，都是仅仅由物体間的相互作用引起的。這一點在作用力适合牛頓第三定律的情況下可以得到驗証，這情況就是對於任一對質點來說，力相等而異號（這時我們假設力的傳遞是瞬時的，但是，只有當粒子速度遠小於相互作用的傳遞速度時，這一假設才是正確的）。

這樣的參照系叫做慣性參照系：對於該參照系來說，某一集合中各質點的加速度可以仅仅用各質點間的相互作用來加以說明。對於這樣的參照系來說，一個不受任何其他物体作用的自由質點將作匀速直線運動，或者象人們所說的，它將作慣性運動。如果在某一參照系中牛頓第三定律不能滿足，那麼就可斷定這一參照系並不是慣性參照系。

例如，由高塔上垂直下拋的一塊石頭，將離開引力的方向而往東偏轉。這一方是利用懸錘獨立地確定出來的。由此可見，石塊具有一個並不是由地球引力所引起的分加速度。我們由此得出結論，和地球相關的參照系是一個非慣性參照系。在這一情形中，可以用地球的自轉來說明這種非慣性現象的存在。

關於摩擦力 在日常生活中，我們經常觀察到當物体直接接觸時所引起的力的作用。在固体的滑動或擺動中，將出現摩擦力。這種力的作用，將把物体整體的宏觀運動轉化為組成該物体的原子及分子的微觀運動；這種轉化被理解為發熱。事實上，當物体滑動時，在表面層中的各原子之間，將發生極端複雜的相互作用過程。用摩擦力這一簡單名詞來描述這種相互作用，是在宏觀運動力學中十分適用的一種理想化，但這個名詞不能給出所發生的過程的全部情形。摩擦力的概念是作為一切基元相互作用的某種平均結果而出現的，當物体相互接觸時，就發生這種基元相互作用。

本編只研究基元性的定律；在本編中，我們將不考慮平均相互作用；在平均相互作用下，運動將發生在原子及分子的內在微觀自由度上。這裡將僅僅研究這樣的相互作用，它們完全可以利用基元的力學定律來反映，而不需要用到有關內在熱運動的任何統計概念。

理想的剛性約束 當物体互相接觸時，也發生那樣一種相互作用力，它們可以歸結為剛性約束這種運動學屬性。如果在一個系統中有剛性約束作用著，那麼，這種約束就會迫使各粒子在某些曲面上發生運動。例如，在 § 1 中曾經考慮一個質點在球面上的運動；在這個球面的中心上有另一個質點。

質點間的這樣的相互作用，不會使運動轉化到物体的內在微觀自由度上去。換句話說，受到剛性約束的限制的運動，可以用它的宏觀廣義坐標 q_a 來完全地加以描述。

如果約束所引起的限制將使運動改變方向，它就同樣地會引起加速度（曲線運動永遠是加速運動，因為速度是一個矢量）。在形式上可以認為這一加速度是由一個力引起的，這力稱為剛性約束的反作用力。

反作用力只改變質點速度的方向而不改變速度的大小。如果它竟然改變速度的大小，它就同樣地會改變質點的動能。根據能量守恒定律，這時就會發熱，這是我們早已聲明過不予考慮的。

因此，理想剛性約束的反作用力並不改變系統的動能。換句話說，它並不會對系統作功，因為對系統所作的功就等於該系統的動能的改變（如果並不發熱的話）。

一個力要是並不作功，它就應該和位移相垂直。因此，在每一給定時刻約束反作用力是和質點的速度方向相垂直的。

但是，在力學問題中，反作用力並不是作為質點位置的函數而預先給出的。這些反作用力，要在照顧到約束條件的情況下用積分方程 (2.1) 的方法來求得。因此，將力學方程表達得完全不包括約束反作用就是很合適的了。事實證明，如果變換到數目等於系統自由度數的廣

义坐标，就可以从方程中消去約束反作用。在本节中，我們完成这种变换，并得出关于系統的广义坐标的力学方程。

由直角坐标到广义坐标的变换 設系統中总共存在 $3N=n$ 个笛卡儿坐标，其中有 ν 个是独立的。我們将永远用同一个字母 x_i 来代表笛卡儿坐标，这样一个符号應該了解为所有的坐标 x, y, z 。这就意味着， i 是从 1 变到 $3N$ ，也就是从 1 变到 n 的。我們用 q_α ($1 \leq \alpha \leq \nu$) 来代表广义坐标。既然广义坐标可以完全地确定系統的位置， x_i 就是各該坐标的单值函数，即：

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_\alpha, \dots, q_\nu). \quad (2.2)$$

由此很容易得出速度的笛卡儿分量表示式。将多元函数 $x_i(\cdots q_\alpha)$ 对时间求导数，即得：

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt}.$$

在以后的推导中，我們将多次地遇到对一切广义坐标 q_α 的求和运算，而且也将遇到双重的或三重的求和运算。为了書写上的简单起見，我們引入下列的求和条件^①：

如果一个希腊字母在等式的一端出現两次，那就應該把它了解为从 1 到 ν 的求和，也就是了解为对所有广义坐标的求和(对于作为笛卡儿坐标編号的拉丁字母，应用这一法則是不恰当的)。于是，速度 $\frac{dx_i}{dt}$ 可以改写为：

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt}. \quad (2.3)$$

这里已将叠加符号省去了。

一个变量的时间常导数，通常在該变量上加一点来表示它：

① 这条件也叫做“爱因斯坦守則”(Einstein's convention) —譯者注。

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i; \quad \frac{dq_\alpha}{dt} = \dot{q}_\alpha. \quad (2.4)$$

利用这种符号,(2.3)式还可以写成如下更紧凑的形式:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha. \quad (2.5)$$

将(2.5)式再对时间微分一次,我们就得到加速度的笛卡儿分量表示式:

$$\ddot{x}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_\alpha.$$

第一项中的常导数通常写成:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta.$$

我们用 β 这个字母来代表这里的求和运算所用到的希腊角码,以免和速度表示式(2.5)中的代表求和运算的符号 α 发生混淆。于是就得到所要求的 \ddot{x}_i 的表示式:

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_\alpha, \quad (2.6)$$

右端第一项是对 α 及对 β 的双重求和式。

力的势 现在我们考虑力的分量。在很多情形下,作用在质点上的力矢量的三个分量,可以按照下式用一个标量函数 U 表示出来:

$$\mathbf{F}_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i}. \quad (2.7)$$

对于牛顿引力、静电力及弹性力,这样的函数永远是可以找到的。函数 U 叫做力的势。

显然,绝对不是普遍情况下的一切力系都可以表示成(2.7)这样一组偏导数的。因为,如果

$$\mathbf{F}_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad \mathbf{F}_k = - \frac{\partial U}{\partial x_k},$$

那么,对于一切的 i, k ,就应成立一个等式