考研数学题库精编系列丛书

考研者→备战应考的良师益友
大学生→训练提高的最佳选择

线性代数题库精编

全春权
孙月静 主编

经济类

精讲指要
题型例析
元练习题萃
自我检测试题

NEUPRESS
东北大学出版社

考研数学题库精编系列丛书

线性代数题库精编

（经济类）

全春权　孙月静　主编

东北大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数题库精编，经济类/全春权，孙月静主编．—沈阳：东北大学出版社，2000.3

（考研数学题库精编系列丛书）

ISBN 7-81054-479-9

Ⅰ.线…　Ⅱ.①全…②孙…　Ⅲ.线性代数-研究生-入学考试-解题　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 02560 号

©东北大学出版社出版

（沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　邮政编码 110006）

电话：（024）23890881　　传真：（024）23892538

沈阳市政二公司印刷厂印刷　　东北大学出版社发行

开本：850mm×1168mm　1/32　　字数：374 千字　　印张：14.375

2000 年 3 月第 1 版　　2000 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑：刘淑芳　王兆元　郭爱民　　责任校对：米　戎

封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

定价：21.00 元

前 言

以《全国硕士研究生入学考试数学（经济类）考试大纲》为依据，我们为准备报考硕士研究生的朋友们编写了这本《线性代数题库精编（经济类）》，以满足广大考生的要求。

编者对考试大纲所要求的内容作了精讲，并对考研题中常见题型进行例题分析。这样既可以帮助考生对考试大纲规定的内容，特别是对重点和难点的内容有一个系统而明晰的了解，也可以帮助考生了解解题的规律，掌握解题的方法与技巧，提高解题能力。本书每章后均附有测试题A，B，题目的内容基本覆盖了大纲的要求，并附有详解。通过演练这些题，无疑可以提高考生解题应试能力。

本书由东北财经大学数量经济系全春权、孙月静同志主编。

本书的读者对象主要是准备参加全国硕士研究生入学考试的青年朋友。本书可作为各类考研辅导班的培训教材，同时也是财经类高等学校大学生学习线性代数课程的最佳辅导书。

由于水平所限，书中疏误之处，恳请读者指正。

编 者

2000 年元月

于大连

目　　录

第一章 行列式

内容精讲指要

一、n 级排列

(一) 主要定义

定义 1 由自然数 1，2，…，n 组成的一个全排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称做一个 n 级排列. 简称排列. 排列共有 $n!$ 个.

在一个排列中，较大的元素排在较小的元素之前，则称两个元素构成一个逆序.

定义 2 一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中逆序的总数称为这个排列的逆序数. 记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列.

定义 3 在排列中对调两个元素，其余元素不动的变换称为排列的对换.

(二) 主要结论

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

定理 2 所有 n 级排列中奇、偶排列的个数各占 $\frac{1}{2}n!$ 个.

【例 1】 选择 i，j，k 使排列 $21i36jk97$ 为偶排列.

【解】 因为排列是 9 级排列，所以可供 i，j，k 选择的元素

只有 4，5，8；不妨令

$$i=4,\ j=5,\ k=8$$

则 $\tau(214365897)=5$(奇数). 由对换改变排列的奇偶性知，当

$$i=5,\ j=4,\ k=8;$$
$$i=8,\ j=5,\ k=4;$$
$$i=4,\ j=8,\ k=5$$

时该排列为偶排列.

【例 2】 设 n 级排列 $n(n-1)\cdots21$，判断它的奇偶性.

【解】 因为 $\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$

$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

所以当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ ($k\in \boldsymbol{N}$)时，该排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ ($k\in \boldsymbol{N}$)时，该排列为奇排列.

二、n 阶行列式的概念

(一) n 阶行列式的定义

定义 4 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示所有可能的取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和，各项符号是：当这一项中 n 个元素的行标按自然数顺序排列时，若对应的列标构成的排列为偶排列，则取正号；若是奇数，则取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

(和是对全体 1，2，…，n 的 n 级排列取)
称为 n 阶行列式，并称等式的右端为 n 阶行列式的展开式.

n 阶行列式的展开式，又可表示为

(1)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n \\ j_1j_2\cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \cdot a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

(二) 一些特殊行列式及其值

1. 对角行列式

对角线之外的元素全为零的行列式，称为对角行列式. 其形式及其值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

2. 三角行列式

对角线以下(上)的元素全为零的行列式，称为三角行列式．其形式及其值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & * & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & * & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii};$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & * & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ & & * & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

【例 3】 设 $a_{1i}a_{32}a_{54}a_{2j}a_{45}$为 5 阶行列式的一项，取负号，试确定 i，j．

【解】 因为项 $a_{1i}a_{32}a_{54}a_{2j}a_{45}$的行标构成的排列逆序数为 $\tau(13524)=3$(奇数)，所以由题意，该项的列标构成的排列的逆序数应为偶数．不妨令 $i=1$，$j=3$，则 $\tau(12435)=1$．由此，$\tau(13524)+\tau(12435)=4$(偶数)．对换改变排列的奇偶性知，应取 $i=3$，$j=1$．

【例 4】 试用行列式定义证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

【证明】 除去符号差异外，D 的展开式各项可表示为

$$a_{ij_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$$

因为行列式 D 的元素满足

$$a_{3j_3}=0 \quad (j_3\geqslant 3)；\ a_{4j_4}=0 \quad (j_4\geqslant 3)；\ a_{5j_5}=0 \quad (j_5\geqslant 3).$$

又 $j_1j_2\cdots j_5$ 是 1，2，3，4，5 的任意一个排列，所以 j_3，j_4，j_5 中至少有一个大于 2，由此，行列式 D 的展开式的每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 中，至少一个元素为零，故 $D=0$.

【例 5】 试证明：一个 n 阶行列式 D_n 中，如果等于零的元素的个数大于 n^2-n，则 $D_n=0$.

【证明】 因为 D_n 共有 n^2 个元素，且其中等于零的元素个数比 n^2-n 多，所以非零元素的个数比 $n^2-(n^2-n)=n$ 少. 由此，D_n 展开式的每一项中至少一个元素为零，故 $D_n=0$.

三、行列式的性质

(一) 行列式的转置及三种“变换”概念

定义 5 把行列式(D)的行列互换所得的行列式，称为原行列式的转置行列式. 记为 D' 或 D^{T}.

定义 6 互换行列式两行(列)的变换，称为行列式的行(列)换法交换. 用记号 $r_i\leftrightarrow r_j$($c_i\leftrightarrow c_j$)表示互换行列式的第 i 行(列)和第 j 行(列)的行(列)换法变换.

定义 7　用一个常数乘以行列式某一行(列)的变换，称为行列式的行(列)倍法变换．用记号 kr_i(kc_i)表示以数 k 乘以行列式的第 i 行(列)的行(列)倍法变换．

定义 8　行列式的某一行(列)乘以一个常数加到另一行(列)对应元素中去的变换，称为行列式的行(列)消法变换．用记号 r_i+kr_j(c_i+kc_j)表示行列式的第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)对应元素上的行(列)消法变换．

(二) 行列式的性质

定理 3　行列式与它的转置行列式的值相等．即 $D=D'$．

定理 4　行列式做换法变换，行列式改变符号．

定理 4 简述为"换法变换的变号性"．

定理 5　行列式做倍法变换，行列式增加倍数．亦即行列式某一行(列)公因子，可以提到行列式符号外面来．

定理 5 简述为"倍法变换的增倍性"．

定理 6　行列式做消法变换，行列式值不变．

定理 6 简述为"消法变换的不变性"．

定理 7　如果行列式中某一行(列)的所有元素都是两个元素的和，则它等于两个行列式的和，这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个元素之一，其余行(列)的元素与原行列式相同．

定理 7 简述为"单行(列)可加性"．

定理 8　如果行列式中有一行(列)元素全为零，或有两行(列)完全相同，或有两行(列)元素对应成比例，则行列式值等于零．

定理 9　范得蒙(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

$$=(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})(a_{n-1}-a_1)(a_{n-2}-a_2)\cdots$$
$$(a_{n-1}-a_{n-2})\cdots\cdots(a_2-a_1)$$

【例 6】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}$$

【解】

$$D'=\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}=-D$$

由 $D=D'$，$D'=-D$ 知 $2D=0$，所以 $D=0$.

【例 7】 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=d$$

求行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

【解】 行列式 D_1 是由 D 的第 1 行依次与第 2，3，…，n 行互换而得，根据“换法变换的变号性”，$D_1=(-1)^{n-1}d$.

【例 8】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & a+3d & a+6d \\ a\div d & a+4d & a+7d \\ a+2d & a+5d & a+8d \end{vmatrix}$$

【解】

$$D \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a & a+3d & a+6d \\ d & d & d \\ 2d & 2d & 2d \end{vmatrix} = 0$$

【例 9】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

【解】

$$D \xlongequal[i=2,\ 3,\ 4]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix} = b_1b_2b_3$$

【例 10】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

【解】 对第一列应用单列可加性得:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = D_1 + D_2$$

$$D_1 \xlongequal[i=2,\ 3]{c_i-c_1} \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_2 \xlongequal[i=2,\ 3]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ 0 & a_2-a_1 & a_2-a_1 \\ 0 & a_3-a_1 & a_3-a_1 \end{vmatrix} = 0$$

所以　$D = D_1 + D_2 = 0.$

【例 11】　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^3 & a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^3 & a_3^2 & a_3 & 1 \\ a_4^3 & a_4^2 & a_4 & 1 \end{vmatrix}$$

【解】

$$D = D' = \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1).$$

四、行列式按某一行(列)展开

(一) 代数余子式的概念

定义 9　在 n 阶行列式中，划掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，余下的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 将

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

(二) 行列式按某一行(列)展开定理

定理 10　n 阶行列式等于它的任意一行(列)的所有元素与它