名校好题

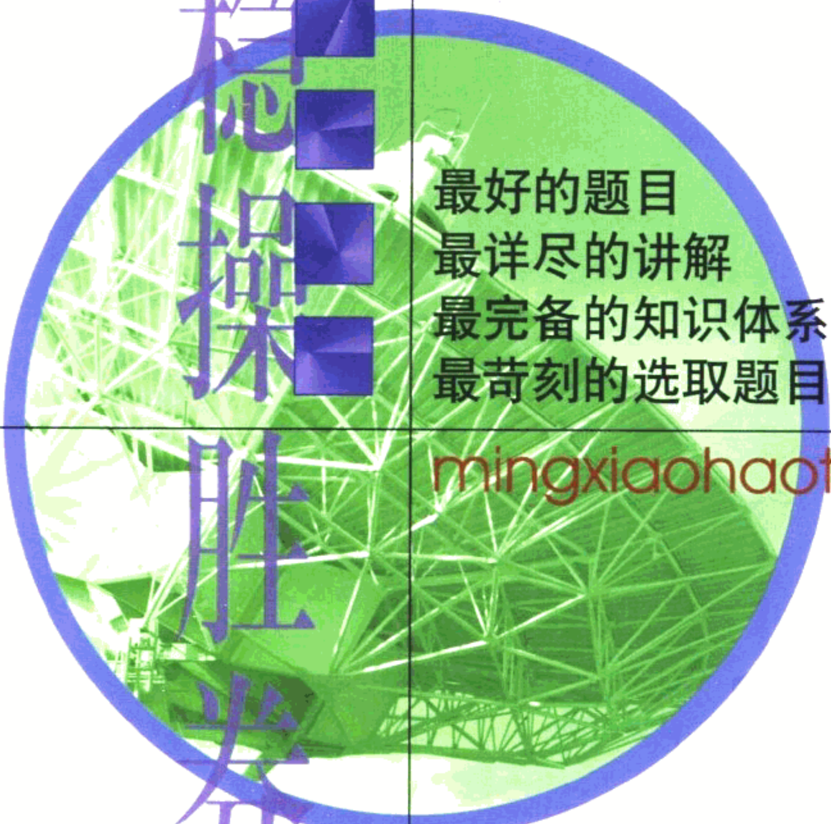
名校名师 绝妙好题 专题专练 打造高分

高中
数学分册
代数

稳操胜券

最好的题目
最详尽的讲解
最完备的知识体系
最苛刻的选取题目的标准

mingxiaohaoti



开明出版社
press

名校好题

高中数学分册

代数

主编　刘学勇

mingxiaohaoti

开明出版社

本册主编　刘学勇
编　　者　肖德美　陈　静　徐法章
冯启安　马　玮

总 策 划　焦向英
策划执行　马小涵　林水平
责任编辑　马小涵

名 校 好 题

高中数学分册——代数

刘学勇　主编

*

开明出版社出版发行
（北京海淀区西三环北路19号外研社大厦　邮编100089）
保定市印刷厂印刷
新华书店北京发行所经销
开本：787×1092　1/16　印张：7.75
2002年2月北京第1版　2002年2月第1次印刷
ISBN 7-80133-591-0/G·517　定价：8.50元

出 版 缘 起

［素质教育≠不考试］

素质教育作为培养跨世纪人才的教育思想与模式已成为我国教育界的共识，然而推行素质教育决不是要摒弃考试。迄今为止，在全世界的教育领域内，考试仍不失为一种最有效的教育质量评价和人才选拔的工具。正如英国著名数学家G. H. 哈代所说："了解一个人的惟一方法是考试，无论是数学、文学，还是哲学……无一例外。"我们真正要扭转的是普通教育"片面追求升学率"的应试教育现状，反对一切为了应付考试的"题海战术"，还学生以自主学习的动力。

［高分≠题海战术］

中、高考的试题改革，已从考察学生掌握知识的情况，转移到考察学生掌握学习方法，综合运用各种知识的能力。淹没在题海中会毁掉学生，死记硬背拿不了高分。素质教育归根结底要教给学生点金术，在培养学生的思维能力上下扎扎实实的功夫。实践证明，决不能只一味地让学生一道道题做下去，关键要教给他们解题的思路、方法、步骤，提高他们举一反三、触类旁通的能力。

正是基于以上对教育教学的深入思考，我们组织教学一线的诸位专家，精心编写了这套《名校好题》丛书系列，以帮助广大学生以最短的时间、最好的效果，高效率掌握知识提高能力，在科学方法的指导下，聪明地考出好成绩。

致读者

mingxiao

《名校好题》"好"在这里

［第一，书中所选均是"一可当十"的名题好题。］

入选《名校好题》的题目出自以下范围：

① 1991～2001年北京、上海高升学率、高教学质量地区以及重点学校的质量检测题、期中期末测试题、高考模拟题；

② 1991～2001年湖北、湖南、江苏、浙江、东北等各省高升学率、高教学质量的市、区以及重点学校的质量检测题、期中期末测试题、高考模拟题；

③ 近年的全国高考试题、全国春季高考试题、上海高考试题；

④ 近年全国各类学科竞赛中难度适合的精彩名题；

⑤《名校好题》编委会为广大考生度身定制的综合性精华好题。

这些题目均“出身名门”，且又经过了编者严格的层层筛选，其具体选题标准为：例题要求有代表性，利于全面剖析知识点，涵盖该知识点的各种考查角度；习题要求题型新颖有特色，力求将知识点可以考查到的重点、难点全部给以反映；题目综合性要强，以培养学生融会贯通的能力，迎合目前高考综合考试的大趋势。

[第二，编写体系完善科学，使诸多好题“物尽其用”，“好”副其实。]

《名校好题》基于小学到中学各个学科的知识体系，按照知识专题编写而成。高中按专题将每科细分为两到三册；初中和小学则一科一册，在册内划分专题。这样既适于配合学习巩固新知，又适于临考复习，学生也可以挑选自己的薄弱学科专题进行强化训练，适用范围相当广泛。

本丛书以中、高考要求为导向，以基础知识为依托，以好题为载体，以创新思维为核心，以能力运用为宗旨，全方位引导学生对同一个问题，从不同角度进行剖析，使学生学会辨析概念、综合概括并解决实际问题，最终形成流畅变通的思维方式。

书中每科知识点依中、高考要求的难度层次，给出一至三道例题，在对例题的分析解答中，提供了“进入→攻击→解答→回顾→扩展”这一整套科学的思考方式，提出两种以上解题思路和方法，充分发掘所选好题的内在精华，达到启发学生思路，培养创造性思维能力的目的。更为实用的是，本丛书要求读者亲自参与每个题目的练习，并且在练习后的“提示·分析·解答”中至少给出一种详细的全过程解答，将学生解题过程中的疑惑转化为经验，并最终形成科学的思维习惯。

一流的编写队伍

本丛书的编写者们，都是在教学一线，具有五年以上带升学班级经验的特高级教师，他们来自：北京四中、北大附中、人大附中、北京五中、黄冈中学、荆州中学等。这些老师们在选取题目、构造题目、解读题目等方面煞费苦心，使本书的编写质量不同一般。

作为立足于教育领域，积极策划出版教学辅导书的我们，殷切期望读者与我们多交流，多提宝贵意见和建议，使我们的图书质量更高，使我们的服务质量更高。

由于编写时间有限编写者们水平有限，不妥之处，请读者不吝赐教。

编 者

2001年10月

本书导读

例题1 （2001年上海高考试卷）

将0.1摩尔铝投入含有0.2摩尔NaOH溶液中，加热完全反应后，试解答下列问题：

(1)在标准状况下生成H_2多少升？

进入

审题过程：讲解如何审题，如何把握题给条件对问题求解的意义。

攻击

具体解题思路：至少清晰详细地表述三种不同的思路，为明确表达，有的采用框图等直观的形式。

解答(试试看)

解答(试试看)：具体给出解答的步骤；或者由读者根据“攻击”的步骤自己尝试写出解答，多为较简单的或者攻击中讲解详细的内容。

推广

题目的延伸：方法的推演通用，知识横向的联系等，有的采用框图等直观的形式。

回顾

对此例题进行总结，包括方法、知识背景等。

例题

每题至少三种解题思路，详细清晰地剖析，涵盖本知识块儿的易考内容，揭示尽可能多的解题方法。

练习

题目已注明出处，多为高升学率的地区、学校的单元练习、模拟自测、升学考试，如江浙、湖北、上海、北京等地区，题型多为问答和计算，题后留有空白，并留有一栏草稿，方便做答并检查。

提示·分析·解答

习题的答案根据代表性和启发性给出提示或至少一种思路，部分题目在解法后给出了举一反三栏目，目的是由此题推展开，促进读者对知识的理解，一通百通，达到熟练解题，熟练运用各种解题思路和方法的目的。

CONTENTS

目录

第一章

函数的概念与性质

例题 1

定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)=2^x+\frac{1}{5}$，求 $f(\log_2 20)$ 的值.

进入

利用 $f(x)$ 的奇偶性及 $f(1+x)=f(1-x)$

可得 $$f(1+x)=f(1-x)=-f(x-1).$$

$\therefore$ $$f(x)=-f(x-2)=+f(x-4).$$

攻击

由题设说明 $f(x)$ 是周期函数，因此可将 $f(\log_2 20)$ 化为 $f(t)$，$t\in(-1,0)$ 来求.

解答

$\because$ $f(x)$ 是 R 上的奇函数

$\therefore$ $f(-x)=-f(x)$，　$\therefore$ $f(1-x)=-f(x-1)$

又 $f(1+x)=f(1-x)$，　$\therefore$ $f(1+x)=-f(x-1)$

令 $1+x=t$，则 $x=t-1$

$\therefore$ $$f(t)=-f(t-2)\quad 即\ f(x)=-f(x-2)$$

$\therefore$ $$f(x)=-f(x-2)=f(x-4)$$

又 $\log_2 2^4<\log_2 20<\log_2 2^5$　即　$4<\log_2 20<5$

$\therefore$ $$-1<4-\log_2 20<0$$

而 $f(\log_2 20)=f(\log_2 20-4)=-f(4-\log_2 20)$

$\therefore$ $$f(\log_2 20)=-[2^{(4-\log_2 20)}+5]=-\frac{29}{5}$$

推广

本题的解题关键是利用题设推导出 $f(x)$ 是周期函数. 对于函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=$

$f(a-x)$且$f(x)=f(b-x)(a\neq b)$或者满足$f(x)=-f(a-x)$且$f(x)=-f(b-x)(a\neq b)$或者满足$f(x)=f(a-x)$且$f(x)=-f(b-x)$都能推导出$f(x)$是周期函数.

回顾

本题的解答在于应用函数的奇偶性——即图像的对称性探讨函数的周期性,再利用函数的周期性解决问题.函数的周期性反映了函数的对应法则的重复性,因而可以求某些特殊函数值,也可以求函数的解析式.

例题 2

已知函数$f(x-2)=ax^2-(a-3)x+(a-2)(a\in Z^-)$,$f(x)$的图像过点$(m-2,0)(m\in R)$,设$g(x)=f[f(x)]$,$F(x)=p\cdot g(x)-16f(x)$,问是否存在实数$p(p>0)$,使$F(x)$在区间$(-\infty,f(2)]$上是增函数且在区间$(f(2),0)$上是减函数.

进入

利用$f(x)$的图像过点$(m-2,0)$可得到一个关于m、a的等式:$am^2-(a-3)m+(a-2)=0$,又$a\in Z^-$,可将a确定,进而求出$f(x-2)$、$f(x)$,再进一步确定$f[f(x)]$,$F(x)$.

攻击

[思路一] 利用$F(x)$在区间$(-\infty,f(2)]$上是增函数且在区间$(f(2),0)$上是减函数,根据函数的单调性定义,求出p.

[思路二] 在单调性的定义中,利用恒成立的思想,确定p.

[思路三] 由题意,是要寻求p,使$F(x)$在$(-\infty,f(2)]$上递增且在$(f(2),0)$上递减的充分条件,$f(2)$是个分界点,利用它求出p,再进一步验证.

解答

[方法一] $\because$ $f(x)$的图像过点$(m-2,0)$

$\therefore$
$$f(m-2)=0$$

$\therefore\ am^2-(a-3)m+(a-2)=0\quad (m\in R)$

故 $\Delta=(a-3)^2-4a(a-2)=-3a^2+2a+9\geqslant 0$

$\therefore\ \dfrac{1-2\sqrt{7}}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{1+2\sqrt{7}}{3}$

又 $a\in Z^-$

$\therefore\qquad a=-1$

$\therefore\qquad f(x-2)=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$

$\therefore\qquad f(x)=-x^2+1$

$\therefore\qquad g(x)=f[f(x)]=-(-x^2+1)^2+1=-x^4+2x^2$

$$\begin{aligned}F(x)=pg(x)-16f(x)&=-px^4+2px^2-16(-x^2+1)\\&=-px^4+(2p+16)x^2-16\end{aligned}$$

故 $f(2)=-3$.

由 $F(x)$在$(-\infty,f(2)]$即$(-\infty,-3]$上是增函数

$\therefore$ 设 $x_1<x_2\leqslant -3$,则

$$\begin{aligned}F(x_1)-F(x_2)&=-px^4+(2p+16)x_1^2+px_2^4-(2p+16)x_2^2\\&=p(x_2^2-x_1^2)(x_2^2+x_1^2)+(2p+16)(x_1^2-x_2^2)\\&=(x_1^2-x_2^2)[2p+16-p(x_1^2+x_2^2)]<0\qquad *\end{aligned}$$

$\because\ x_1^2>x_2^2\qquad \therefore\ x_1^2>9,x_2^2>9$

$\therefore\ -p(x_1^2+x_2^2)<-18p$

故只需 $16-16p\leqslant 0$ 时,* 成立 ①

由 $F(x)$在$(-3,0)$上是减函数

$\therefore$ 设 $-3<x_1<x_2<0$,则

$$F(x_1)-F(x_2)=(x_1^2-x_2^2)[2p+16-p(x_1^2+x_2^2)]>0$$

$\therefore\ 2p+16-p(x_1^2+x_2^2)>0$

又 $x_1^2<9,x_2^2<9\quad \therefore\ -p(x_1^2+x_2^2)>-18p$

只需 $\qquad -16p+16\geqslant 0$ ②

由①、②可知 $p=1$ 时,$y=F(x)$在 $(-\infty,f(2)]$上是增函数且在$(f(2),0)$上是减函数.

[方法二] (以上同方法一).

由 $F(x)$在$(-\infty,f(2)]$上是增函数,则

$$x_1<x_2\leqslant -3$$

$F(x_1)-F(x_2)=(x_1^2-x_2^2)[2p+16-p(x_1^2+x_2^2)]<0$ 恒成立.

又 $x_1^2>x_2^2$

$\therefore\ p>\dfrac{16}{x_1^2+x_2^2-2}$ 恒成立

$\therefore\ p\geqslant 1$

类似地，由 $F(x)$在$(f(2),0)$上是减函数．则 $-3<x_1<x_2<0$.

$$F(x_1)-F(x_2)=(x_1^2-x_2^2)[2p+16-p(x_1^2+x_2^2)]>0 \quad 恒成立.$$

又 $x_1^2>x_2^2$

$\therefore\ p<\dfrac{16}{x_1^2+x_2^2-16}$　恒成立

$\therefore\ p\leqslant 1$

故 $p=1$.

[方法三]　令 $x^2=t$，则 $F(x)=-pt^2+(2p+16)t-16$.

由题意 $x=f(2)=-3$ 是分界点，则 $t=9$

令$\dfrac{2p+16}{2p}=9$　　　　则 $p=1$

当 $p=1$ 时，$F(x)=-x^4+18x^2-16$

设　　$x_1<x_2\leqslant -3$

$$\begin{aligned}F(x_1)-F(x_2)&=-x_1^4+18x_1^2+x_2^4-18x_2^2\\&=(x_1^2-x_2^2)[18-(x_1^2+x_2^2)]\end{aligned}$$

$\because\ x_1<x_2\leqslant -3\quad \therefore\ x_1^2>x_2^2\quad x_1^2+x_2^2>18$

$\therefore$　　$F(x_1)-F(x_2)<0$

$\therefore$　　$F(x_1)<F(x_2)$

$\therefore\ F(x)$在$(-\infty,-3]$上是增函数.

又设　　$-3<x_1<x_2<0$

$$F(x_1)-F(x_2)=(x_1^2-x_2^2)[18-(x_1^2+x_2^2)]$$

$\because$　　$-3<x_1<x_2<0$

$\therefore$　　$x_1^2>x_2^2,\ x_1^2+x_2^2<18$

$\therefore$　　$F(x_1)-F(x_2)>0$　即 $F(x_1)>F(x_2)$

$\therefore$　　$F(x)$在$(-3,0)$上是减函数.

故当 $p=1$ 时，$F(x)$在$(-\infty,f(2)]$上是增函数且在$(f(2),0)$上是减函数.

推广

一般地，若 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=x^2$，则复合函数 $f[g(x)]=ax^4+bx^2+c$ 的单调性为：

$a>0$ 时：

1°. $-\dfrac{b}{2a}>0$，则 $f[g(x)]$ 的单调增区间为 $\left[\sqrt{-\dfrac{b}{2a}},+\infty\right)$和$\left[-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}},0\right]$，$f[g(x)]$的单调减区间为$\left(0,\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\right)$和$\left(-\infty,-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\right)$.

2°. $-\frac{b}{2a}\leqslant 0$，则 $f[g(x)]$ 的单调增区间为 $[0,+\infty)$，$f[g(x)]$ 的单调减区间为 $(-\infty,0)$.

$a<0$ 时：

1°. $-\frac{b}{2a}>0$，则 $f[g(x)]$ 的单调增区间为 $\left[0,\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right]$ 和 $\left(-\infty,-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right]$，$f[g(x)]$ 的单调减区间为 $\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}},+\infty\right)$ 和 $\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}},0\right)$.

2°. $-\frac{b}{2a}\leqslant 0$，$f[g(x)]$ 的单调增区间为 $(-\infty,0]$，单调减区间为 $(0,+\infty)$.

回顾

本题主要考察了复合函数的有关性质.复合函数的单调性是本题的关键所在.单调性的定义是解答本题的核心，由于对定义理解的侧重点不同，于是有方法一和方法二；变换角度寻找解题的突破口，便有了方法三.

例题 3

已知函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x$，是否存在实数 m、n，使 $x\in[m,n]$ 时，恰有 $y\in[2m,2n]$?

进入

本题是有关二次函数在闭区间上的最值问题.

攻击

因为 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+9/2$，所以 $x\in[m,n]$ 时，$f(x)_{\max}=2n\leqslant 9/2$ 故 $n\leqslant 9/4$，所以 $x\in[m,n]$ 时，$y=-\frac{1}{2}x^2+3x$ 是增函数，再利用单调性求解.

解答

[方法一] $\because f(x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+9/2\leqslant 9/2$

$\therefore x\in[m,n]$ 时 $f(x)_{\max}=2n\leqslant 9/2$

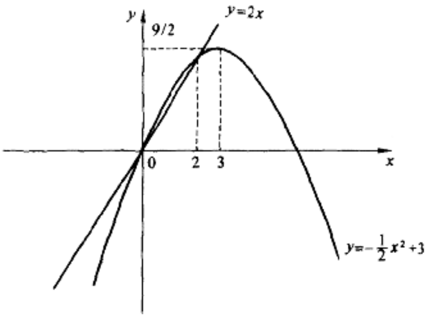
$\therefore n\leqslant 9/2<3$ 故 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上为增函数

$$\therefore \begin{cases} 2m = -\frac{1}{2}m^2 + 3m \\ 2n = -\frac{1}{2}n^2 + 3n \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m = 0 \\ n = 2 \end{cases}$$

故存在实数 $m=0, n=2$，当 $x\in[0,2]$时，恰有 $y\in[0,4]$.

[方法二] 由 $x\in[m,n]$，$y\in[2m,2n]$构造函数 $y=2x$，数形结合，转化为两个函数 $y=2x$ 与 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3$ 是否有交点来处理. 如下图：



易求得 $m=0, n=2$.

推广

对于函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+a$ $\left(a\leqslant\frac{3}{2}\right)$，是否存在实数 m,n，当 $x\in[m,n]$时，恰有 $y\in[2m,2n]$的解答为：

1°. 当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$时，m,n 不存在

2°. 当 $-\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{3}{2}$时，$m,n$ 存在，$m=1-\sqrt{1+2a}$，$n=1+\sqrt{1+2a}$

回顾

本题主要考察一元二次函数在区间上的最值问题，但要注意选准突破点——从 $2n\leqslant\frac{9}{2}$入手，否则容易将此问题复杂化——分类讨论对称轴 $x=3$ 在或不在区间$[m,n]$上. 方法二说明我们将题目中的隐含信息挖掘出来，便找到了数形结合的基础，同时数形结合的方法也更有利于我们将此题的结论进一步延伸和推广.

◇ 练　习 ◇

草　稿

1. 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数，$g(x)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，而当 $x\in[2,3]$ 时，$g(x)=-x^2+4x+c$，(c 为常数)

① 求 $f(x)$ 的表达式.

② 对于任意 x_1、$x_2\in[0,1]$ 且 $x_1\neq x_2$，求证：

$$|f(x_2)-f(x_1)|<2|x_1-x_2|.$$

③ 对于任意 x_1、$x_2\in[0,1]$，且 $x_1\neq x_2$，求证：

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant 1.$$

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且满足

(ⅰ) $f(x_1-x_2)=\dfrac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}$；

(ⅱ) 存在正常数 a，使 $f(a)=1$；

求证：① $f(x)$ 是奇函数. ② $f(x)$ 是周期函数.

3. 设 $f(x)$ 为定义在 R 上的偶函数，当 $x\leqslant -1$ 时，$y=f(x)$ 的图像是经过点 $(-2,0)$，斜率为 1 的射线，又在 $y=f(x)$ 的图像中有一部分是顶点在 $(0,2)$，且过点 $(-1,1)$ 的一段抛物线. 试写出函数 $f(x)$ 的表达式，并作出图像.

草　稿

4. 甲、乙两地相距 s 千米(km)，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过 c 千米/小时(km/h)，已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成：可变部分与速度 v(千米/小时)的平方成正比，比例系数为 b；固定部分为 a 元.

(1) 把全程运输成本 y(元)表示为速度 v(千米/小时)的函数，并指出定义域.

(2) 为了使全程运输成本最小，汽车应以多大速度行驶?

5. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 和一次函数 $g(x)=-bx$，其中 a、b、c 满足 $a>b>c$，$a+b+c=0(a,b,c\in R)$

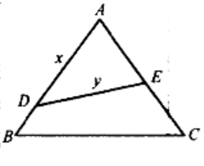
① 求证：两函数的图像交于不同的两点 A、B.

② 求线段 AB 在 x 轴上的射影 A_1B_1 的长的取值范围.

6. 如图，公园有一块边长为 $2a$ 的等边△ABC 的边角地，现修成草坪. 图中 DE 把草坪分成面积相等的两部分，D 在 AB 上，E 在 AC 上.

(1) 设 $AD=x(x\geqslant a)$，$ED=y$，求用 x 表示 y 的函数关系式.

(2) 如果 DE 是灌溉水管，为节约成本，希望它最短，DE 的位置应该在哪里? 如果 DE 是参观路线，则希望它最长，DE 的位置又应该在哪里? 请予证明.



7. 已知函数 $y=f(x)$是定义在 R 上的周期函数,周期 $T=5$,函数 $y=f(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$是奇函数,又知 $y=f(x)$在$[0,1]$上是一次函数,在$[1,4]$上是二次函数,且在 $x=2$ 时,函数取得最小值 -5,

草 稿

① 证明:$f(1)+f(4)=0$.

② 试求 $y=f(x)\quad x\in[1,4]$的解析式.

③ 试求 $y=f(x)\quad x\in[4,9]$上的解析式.

8. 已知函数 $y=f(x)$定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上,且对任意 x_1,x_2 都有 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

① 求 $f(1)$和 $f(-1)$的值.

② 求证 $f(x)$是偶函数.

③ 若 $y=f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数,解不等式 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant 0$.