高等学校试用教材

工 程 数 学

线性代数

（第 二 版）

上海交通大学线性代数编写组编

高等教育出版社

本书第二版是由上海交通大学线性代数编写组的同志，参照1980年高等学校工科数学教材编审委员会审订的《工程数学教学大纲》有关线性代数部分教学大纲修订而成的。本书修订稿仍由栾汝书教授任主审，经工科数学教材编审委员会于1981年5月召开的工作会议上审阅了全稿，并定为高等学校试用教材出版。

本书第二版作了较大的修改和补充，内容比较适当，层次也较清楚，超过大纲部分用小号字排印，因而课时掌握上有一定的伸缩性。全书内容为行列式及其性质、向量空间、线性变换与矩阵、矩阵的秩和线性方程组、内积与正交变换、二次型等，书末还附有习题答案，便于教学，可作为高等工业院校教材，也可作为工程技术人员自学用书。

责任编辑　丁鹤龄

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日，上级同意恢复“高等教育出版社”;本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校试用教材

工程数学——线性代数

（第二版）

上海交通大学线性代数编写组编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 5.5　字数 128,000

1978年10月第1版

1982年9月第2版　　1983年7月第8次印刷

印数　607,001—636,000

书号 13010·0207　　定价 0.52元

第二版前言

线性代数主要是讨论有限维向量空间和线性变换的数学理论，它的理论和方法在技术科学中业已得到了广泛的应用. 本书是我们根据1980年高等学校工科数学教材编审委员会审订的《工程数学教学大纲》对第一版作了修改和补充而成的. 我们选定了向量空间、线性变换及矩阵、线性方程组理论、二次型等作为本教材的基本内容；大致是：

1. 第二章讨论了向量空间的基本概念和定理，并且我们将用这些理论来讨论线性方程组的理论. 所以在处理上我们仍旧把向量空间放在前面.

2. 第三章主要是讲述线性变换，从而讨论矩阵的运算. 这样处理较为紧凑，有助于同学理解矩阵运算的意义.

3. 第四章我们采用了向量空间和矩阵的理论来讨论线性方程组相容性的判定问题和解的结构.

4. 由于内积和正交变换的重要性，我们专辟一章讲述.

5. 在第六章中我们讲述二次型，增添了合同变换、实对称矩阵的特征值和特征向量的性质，以及正定型在极值方面的应用.

本书中所涉及的定理大部分给出了证明，且增添了相应的习题，它有助于读者对内容的了解. 由于全书的学时数约为30至40学时，带有一定的伸缩性，所以本书一部分内容采用小字排印，可在教学时酌情增删.

本书第一版由孙增光，刘景德，杨绮玉等同志编写；参加本书修订的为孙增光、沈黛云、杨绮玉、陈大新等同志. 限于编者水平，本书难免有疏漏之处. 希望读者批评指正.

上海交通大学应用数学系“线性代数”编写组

1981.10.

目　录

第一章　行列式及其性质

在线性代数和后继课程里，以及工程技术上有很多问题都需要用到“行列式”这个数学工具. 本章在复习二阶、三阶行列式的基础上把行列式的概念推广到高阶行列式中去.

§1. 二阶与三阶行列式

在高中数学中，已由解线性方程组问题引出了二阶与三阶行列式. 它们的展开式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \tag{2}$$

其中元素a_{ij}的两个下标 i 与 j 分别表示a_{ij}所在的行与列的序数.

利用二阶与三阶行列式，可以把二元与三元线性方程组的解表达为简洁的形式.

设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{3}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{又设 } D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

其中 D_1 与 D_2 分别是在D中把第一列与第二列元素换成(3)式中

的常数项得到的．则当 $D\neq0$ 时，方程组(3)有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D},\qquad y=\frac{D_2}{D}. \tag{4}$$

同样，设方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases} \tag{5}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\ \text{又设}\ D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix},$$

其中 D_1,D_2,D_3 分别是在 D 中把第一列，第二列，第三列元素换成(5)式中的常数项得到的，则当 $D\neq0$ 时，方程组(5)有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D},\qquad y=\frac{D_2}{D},\qquad z=\frac{D_3}{D} \tag{6}$$

这就是解二元与三元方程组(3)与(5)的克莱姆(Cramer)法则．

如果把行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

的行列互换而不改变各行、各列的顺序，得到的行列式

$$D'=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}$$

叫做行列式 D 的转置行列式．

利用三阶行列式的展开式，容易得出下面八个性质.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

性质 2 交换行列式的任意两行或两列，行列式仅改变符号.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

性质 3 把一个行列式的某行(列)的所有元素乘上某数 k，等于用 k 乘行列式.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 4 行列式中有两行(列)的对应元素相等，则行列式等于零.

性质 5 如果行列式的某行(列)的各元素是二项之和，那么这个行列式等于两个行列式的和.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的任一行(列)的元素乘以同一个数后，加到另一行(列)的对应元素上去，行列式不变.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

在三阶行列式中，划去 a_{ij} 所在的行和列的元素，余下的元素构成的一个二阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 我们把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}. 例如在三阶行列式(2)中元素 a_{23} 的代数余子式是

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

性质 7　行列式 D 中任一行(列)中各元素与其代数余子式的乘积之和等于该行列式. 即

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{ik}=D,\ i=1,2,3; \quad (7)$$

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{kj}A_{kj}=D.\ j=1,2,3. \quad (8)$$

(7)式与(8)式分别叫做行列式 D 按第 i 行的展开式及按第 j 列的展开式.

性质 8　在行列式 D 中，任一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{jk}=0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,3; (9)$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{ki}A_{kj}=0, i\neq j, i,j=1,2,3. (10)$$

(7)式与(9)式及(8)式与(10)式可分别合并为

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}0, & i\neq j; \\ D, & i=j.\end{cases}\quad i,j=1,2,3;$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}0, & i\neq j;\\ D, & i=j.\end{cases}\quad i,j=1,2,3.$$

§2. 高阶行列式

一、n 阶行列式的定义

学习了二阶与三阶行列式，很自然会问，能否把行列式推广到四阶、五阶以至更一般的 n 阶呢？为了能从三阶行列式类推出 n 阶行列式的定义，我们来观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\qquad(11)$$

中每一项构成的规律.

首先注意其中每一项为三个元素的乘积 $a_{1j}a_{2k}a_{3l}$，并带有一定的符号. 这三个元素的第一个下标分别为 1, 2, 3，这说明了在行列式的每一行中各取一个元素相乘. 由于数的乘法满足交换律，所以这里元素按行的自然顺序(从小至大的顺序)排列是人为的，这样，我们只须将注意力集中在第二个下标 j, k, l 的变化上. 下面我们写出各项中第二个下标的排列

$$(123),\quad (312),\quad (231);\qquad(12)$$

$$(321),\quad (132),\quad (213).\qquad(13)$$

它们恰好是 1, 2, 3 的所有全排列. 这说明从三个行中所取的元素是取自各个不同的列，也就是说，各项的乘积是由每一行，每一列各取一个且仅取一个元素相乘得到的. 对于 1, 2, 3 的每一个全排列 j, k, l. 对应有一乘积 $a_{1j}a_{2k}a_{3l}$. 1, 2, 3 一共有六个全排列，所以三阶行列式一共有六项. 如(11)式的右边.

其次分析各项所带的符号. 由于各项的第一个下标都按自然顺序排列，所以各项所带符号只与第二个下标的排列有关. 为了说明其中的关系,下面引进逆序数的概念.

定义 1 **如在** $1,2,\cdots,n$ **的一个全排列(称为** n **级排列)**$(s_1s_2\cdots s_n)$**中,有** $i<j$ **时** $s_i>s_j$**,这时** s_i,s_j **违反了自然顺序,就说它们构成了一个逆序. 排列**$(s_1s_2\cdots s_n)$**中逆序的总数称为该排列的逆序数.**

易知排列$(s_1s_2\cdots s_n)$的逆序数$=$(s_1后面比 s_1 小的数字的个数)$+$(s_2 后面比 s_2 小的数字的个数)$+\cdots\cdots$ $+$(s_{n-1}后面比 s_{n-1}小的数字的个数).

例如在排列(34152)中,3 后面有两个数比 3 小,4 后面也有两个数比 4 小,5 后面有一个数比 5 小,故

$$(34152)\text{的逆序数}=2+2+1=5.$$

如果一个排列的逆序数是偶数,就称该排列为偶排列,否则称为奇排列. 读者容易验证(12)式中的排列都是偶排列，(13)式中的排列都是奇排列. 于是不难看出(11)式中各项所带的符号是由第二个下标排列(jkl)的奇偶性决定的. 当(jkl)是偶排列时项带正号；(jkl)是奇排列时项带负号. 如用 J 表示排列(jkl)的逆序数,则各项所带的符号为$(-1)^J$.

于是三阶行列式的定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum(-1)^J a_{1j}a_{2k}a_{3l} \tag{14}$$

其中 J 为排列 (jkl) 的逆序数，"Σ"是对所有三级排列(jkl)求和.

读者不难验证二阶行列式的定义也可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^J a_{1j} a_{2k} \tag{15}$$

其中 J 为排列(jk)的逆序数，“Σ”是对所有二级排列(jk)求和. 由于二级排列只有一个偶排列(12)和一个奇排列(21)，故二级行列式只有两项，一项带正号，一项带负号.

至此，我们不难把行列式的概念推广到 n 阶.

定义 2　设有 n^2 个数，排列成 n 行 n 列如下

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{16}$$

其中 a_{ij} 是第 i 行第 j 列的数(称为元素). 今在每一行中取出一个数，并且要求取出的 n 个数都在不同的列上. 把所取元素的行数按自然顺序排列，相应的列数设为 $j_1j_2\cdots j_n$. 作出这 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，然后按第二个下标排列$(j_1j_2\cdots j_n)$的奇偶性，将乘积乘以 $+1$ 或 -1. 如$(j_1j_2\cdots j_n)$是偶排列则乘以 $+1$，否则乘以 -1. 如把$(j_1j_2\cdots j_n)$的逆序数记作 J，则各乘积所带的符号为$(-1)^J$，然后对所有 n 级排列$(j_1j_2\cdots j_n)$求和，这个和数称为与(16)式中数表相应的 n 阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{17}$$

其中“Σ”是对所有 n 级排列求和.

行列式(17)也可简记为$|a_{ij}|$. 显然(14)式与(15)式是(17)式中 n 等于 2 与 3 的特例.

为了证明行列式的性质，先讲两个定理.

定理 1　一排列中的任两个数调换，它的逆序数变更奇偶性.

证　先考虑调换相邻两数的情况. 设排列为 $PabQ$，P 表 a 前的 p 个数，Q 表 b 后的 q 个数. 调换相邻两数 a、b 为 $PbaQ$，P、Q 中各数的位置不变. 经过调换，显然在该排列中除了 a、b 两数的顺序改变外，其他任意两数的顺序并没有变. 若 a、b 原为自然顺序，经调换后，a、b 两数将构成逆序. 因此排列的逆序数增加 1. 反之，若 a、b 原构成逆序，经调换后，则成为自然顺序，于是排列的逆序数就减少 1. 故调换 a、b 改变 $PabQ$ 逆序数的奇偶性.

再考虑调换排列中任意两数的情况. 设排列为 $PaQbR$，Q 表 a、b 两数间的 q 个数，R 表 b 后的 r 个数. 今用下面的方法调换 a、b. 先把 $PaQbR$ 调换成 $PQabR$，要作 q 次相邻两数的调换；再把 $PQabR$ 调换成 $PbQaR$，要作$q+1$ 次相邻两数的调换，一共调换了 $2q+1$ 次，所以 a、b 换位改变了逆序数的奇偶性. ■

我们知道，在二阶行列式中，有一项带正号，一项带负号；在三阶行列式中则有三项带正号，三项带负号. 一般地，在 n 阶行列式 $(n>1)$ 中也恰有$\frac{n!}{2}$项带正号，$\frac{n!}{2}$项带负号. 按行列式的定义，只需证明在 $n!$ 个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，有一半是偶排列，一半是奇排列. 这可利用定理 1 证得.

事实上，在所有 n 级排列中，将最前面两个数字调换位置. 如果$i_1i_2\cdots i_n$ 为偶排列，则调换后即为奇排列. 而且对于不同的偶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $i'_1i'_2\cdots i'_n$ 在最前面的两数调换后，得到的奇排列 $i_2i_1i_3\cdots i_n$ 与 $i'_2i'_1i'_3\cdots i'_n$ 也不相同，因此奇排列的个数应不小于偶排列的个数. 同理，偶排列的个数也不小于奇排列的个数，所以两者个数相等.

由于数的乘法是可交换的，所以行列式各项中 n 个元素的顺序也可以任意交换. 例如在 4 阶行列式中，乘积 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 也可写成 $a_{31}a_{23}a_{44}a_{12}$. 一般地，乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可交换因子顺序成为 $a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}$，其中 $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ 与 $\alpha\beta\cdots\lambda$ 都是 n 级排列.

定理 2　n 阶行列式的项可以写成

$$(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda},$$

其中 S 与 T 分别为 n 级排列 $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ 与 $\alpha\beta\cdots\lambda$ 的逆序数.

证 该项任意二元素互换，两个下标也同时调换，由定理 1 知排列 $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ 与 $\alpha\beta\cdots\lambda$ 的逆序数将同时改变奇偶性，于是 $S+T$ 的奇偶性仍旧不变。如果将行的排列顺序 $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ 调换为按自然顺序 $12\cdots n$ 的排列（它的逆序数为 0），而列的排列 $\alpha\beta\cdots\lambda$ 随之变换为 $j_1j_2\cdots j_n$（它的逆序数为 J），则有

$$(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}=(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \quad \blacksquare$$

例如乘积 $a_{31}a_{23}a_{44}a_{12}$ 是 4 阶行列式中的一项，排列 3241 的逆序数 $S=4$，排列 1342 的逆序数 $T=2$，$S+T=6$ 所以该项带正号.

如果将行列式中各项的第二个下标按自然顺序排列，则相应的第一个下标排列记作 $i_1i_2\cdots i_n$，于是由定理 2，行列式又可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^I a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}, \tag{18}$$

其中 I 为排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数，“Σ”为对所有第一个下标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 求和.

例 1 计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式，在展开式中应有 $4!=24$ 项，但在每一项中的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中只要有一个元素等于 0，乘积就为 0，所以只要计算展开式中不明显为 0 的项. 由于第 4 行除了 a_{44} 外都为 0，故只须考虑 $j_4=4$ 的项. 第三行中除了 a_{33}, a_{34} 外都是 0，现已取 $j_4=4$，所以必须取 $j_3=3$. 同理只能取 $j_2=2, j_1=1$.

就是说行列式中不为0的乘积只可能是$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，而排列1234的逆序数为0，所以这一项所带的符号是正的，因此该行列式等于$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

在行列式中，从左上角到右下角的直线叫做主对角线. 例1的行列式中，主对角线以下的元素均为0(即当$i>j$时，$a_{ij}=0$)，这种行列式叫做上三角形行列式. 它等于主对角线上各元素的乘积.

同样，主对角线以上的元素均为0(即当$i<j$时，$a_{ij}=0$)的行列式叫做下三角形行列式. 同理可证它也等于主对角线上各元素的乘积. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

作为三角形行列式的特殊情况，有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = d_1d_2d_3d_4,$$

在这个行列式中，除了主对角线上的元素外，其他元素均为0，这种行列式叫做对角形行列式.

同理，读者可以证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

但是我们知道

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = -a_{12}a_{21}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31},$$

一般地，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

证明与例 1 相同，读者可以自己证明.

二、n 阶行列式的性质与计算

三阶行列式的 8 个性质对 n 阶行列式也是正确的. 下面仅就性质 1，2，7，8 给出证明，其余性质读者可以自己证明.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

转置后为

$$D' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b_{ij}=a_{ji}$, $i, j=1, 2, \cdots, n$.

将 D 与 D' 分别按(17)式与(18)式展开. D 中任一项设为

$$(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

在 D' 中有相应项为

$$(-1)^J b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn}.$$

由于 $b_{ij}=a_{ji}$，所以 $b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn}=a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 它们所带的符号又相同，因此对于 D 中任一项，在 D' 中必有一项与之相等. 又 D 与 D' 的项数也相同（都是 $n!$ 项），故 $D=D'$.