目　　录

第一章　概率论基础 …… 1
§1　样本空间与随机事件 …… 1
(一) 样本空间 …… 1
(二) 随机事件 …… 1
(三) 事件间的关系与运算 …… 2
§2　事件的概率 …… 3
(一) 概率的古典定义 …… 4
(二) 概率的统计定义 …… 5
(三) 概率的公理化定义 …… 6
(四) 概率的运算性质 …… 7
(五) 条件概率 …… 7
(六) 事件的独立性 …… 9
(七) 应用举例 …… 9
§3　随机变量及其分布 …… 14
(一) 随机变量 …… 14
(二) 随机变量的概率分布 …… 15
§4　多维随机变量及其分布 …… 20
(一) 二维随机变量及其分布 …… 20
(二) 条件分布 …… 24
(三) 随机变量的独立性 …… 26
(四) 随机变量函数的概率分布 …… 28
§5　随机变量的数字特征 …… 32
(一) 数学期望 …… 32
(二) 方差 …… 35
第二章　可靠性的基本概念 …… 39
§1　可靠性问题的提出与可靠性的定义 …… 39
§2　常用可靠性指标 …… 40
(一) 可靠度 …… 40
(二) 失效率 $\lambda(t)$ …… 41
(三) 平均寿命与方差 …… 44
(四) 平均失效率 …… 46
(五) 可靠寿命 …… 47
§3　常用寿命分布及其可靠性指标计算 …… 47
(一) 离散型寿命分布及其可靠性指标计算 …… 47
(二) 连续型寿命分布及其可靠性指标计算 …… 52
第三章　寿命试验结果的统计分析 …… 76
§1　数理统计的基本概念 …… 76

(一) 母体与子样 …… 76
(二) 大数定律 …… 77
(三) 截尾寿命试验及其子样 …… 80
§2 统计量的分布 …… 81
(一) 常用的抽样分布 …… 81
(二) 顺序统计量及其分布 …… 85
(三) 各种截尾子样的联合分布 …… 89
§3 参数估计 …… 90
(一) 点估计 …… 90
(二) 参数点估计的好坏标准 …… 93
(三) 母体参数的区间估计 …… 97
§4 正态母体的假设检验 …… 100
(一) 假设检验的基本概念 …… 100
(二) 正态母体参数的假设检验 …… 101
§5 一元线性回归分析 …… 104
(一) 一元线性回归数学模型 …… 105
(二) 估计参数β_0与β …… 106
(三) b_0与b的统计性质 …… 107
(四) 回归方程的显著性检验 …… 111
(五) 利用回归方程进行预报与控制 …… 114
第四章 指数分布与威布尔分布的参数估计与检验 …… 118
§1 引言 …… 118
§2 指数分布的寿命试验及其抽样分布 …… 118
(一) 指数分布寿命试验分类 …… 118
(二) 抽样分布 …… 110
§3 指数分布中的点估计 …… 121
(一) 最大似然估计法 …… 121
(二) 按失效时间估计未知参数 …… 123
§4 指数分布的区间估计 …… 126
(一) 有关统计量及其分布 …… 126
(二) 区间估计 …… 128
(三) 单侧置信限 …… 133
§5 指数分布参数μ的假设检验 …… 135
§6 威布尔分布的参数估计 …… 135
(一) 高斯—马尔可夫定理 …… 135
(二) 威布尔分布中参数的点估计 …… 136
(三) 威布尔分布中参数的假设检验 …… 140
第五章 贝叶斯估计与检验 …… 142
§1 统计判决的基本概念 …… 142
(一) 统计判决问题的基本条件 …… 142
(二) 判决函数及风险函数 …… 144
(三) 最优化准则 (Minimax准则) …… 144
§2 贝叶斯估计 …… 147

(一) 问题的提出和基本概念 ……147
(二) 点估计 ……148
(三) 区间估计 ……152
§3 广义极大似然估计与广义贝叶斯解……153
(一) 广义极大似然估计 ……153
(二) 广义贝叶斯解 ……154
§4 Minimax解 ……154
§5 假设检验 ……156
(一) 设未知参数θ的后验分布为h(θ|x), θ∈Θ ……156
(二) 后验风险最少原则 ……157
§6 确定先验分布的常用方法 ……158
(一) 经验贝叶斯方法 ……158
(二) 共轭先验分布族 ……159
第六章 母体分布的估计与检验……162
§1 用概率纸估计母体的分布及分布中的未知参数 ……162
(一) 用正态概率纸估计分布及未知参数 ……162
(二) 用对数正态概率纸估计分布及未知参数 ……164
(三) 用威布尔概率纸估计参数 ……165
(四) 用单对数坐标纸检验指数分布并估计未知参数 ……170
§2 母体分布的假设检验 ……175
(一) χ^2检验法 ……175
(二) 柯尔莫哥洛夫检验法 ……178
(三) 正态分布的特殊检验法 ……180
(四) 指数分布的检验法 ……181
第七章 随机过程……183
§1 随机过程概念 ……183
§2 马尔可夫过程 ……184
(一) 马尔可夫链 ……185
(二) 马尔可夫过程 ……193
(三) 泊松过程 ……198
(四) 马尔可夫过程应用举例 ……200
(五) 求首次故障的平均时间 ……206
(六) 更新过程 ……209
第八章 恒定应力加速寿命试验……218
§1 寿命试验及其分类 ……218
(一) 可靠性试验 ……218
(二) 加速寿命试验的三种方式 ……219
§2 恒定应力加速寿命试验应考虑的主要问题 ……219
(一) 恒定应力加速寿命试验的基本思想 ……219
(二) 恒定应力加速寿命试验中考虑的主要问题 ……220
§3 恒定应力加速寿命试验分布参数的估计 ……221
(一) 常用的加速寿命方程 ……221
(二) 加速系数 ……222

（三）对数正态分布加速寿命试验分布参数的估计……223
（四）威布尔分布加速寿命试验的分布参数估计……228
第九章 可修复元件的可靠性统计分析……231
§1 可修复元件的特点……231
（一）可修复元件的历程图……231
（二）可修复元件的特点……231
（三）问题……232
§2 时齐泊松过程模型……232
（一）什么是时齐泊松过程……233
（二）泊松过程的性质……233
（三）时齐泊松过程模型的判别法……235
§3 更新过程模型……237
（一）定义……237
（二）性质……238
（三）更新过程模型判别法……239
§4 非时齐泊松过程模型……242
（一）定义……242
（二）有关定理……243
（三）性质……244
（四）两类简单而且常用的非时齐泊松过程……244
§5 大型可修复设备可靠性指标的现场统计方法……246
（一）基本概念……246
（二）数学模型……247
（三）收集原始数据……248
（四）统计分析方法小结表……250
（五）实例……251
第十章 系统的基本概念……259
§1 引言……259
（一）什么叫系统……259
（二）系统的可靠性由什么决定……259
（三）如何探讨系统可靠性……259
§2 系统的可靠性指标……259
（一）系统的首次失效时间τ和可靠度……260
（二）首次运行和首次停运时间τ_1，T_1的联合分布……260
（三）利用率（*Availability*）……261
（四）$(0, t]$时间内系统失效次数的分布……261
§3 几个简单的典型系统结构模型……262
（一）逻辑框图……262
（二）串联系统……264
（三）并联系统……264
（四）k/n (G) 系统……264
（五）串并联系统和并串联系统……265

第十一章　不可修系统的可靠性分析 ……266
§1　简单典型系统 ……266
(一) n个元件的串联系统……266
(二) n个元件的并联系统……268
(三) k/n (G) 系统 ……271
(四) 冷贮备系统 ……272
(五) 热贮备系统 ……278
(六) 混联系统 ……279
§2　复杂系统 ……282
(一) 基本假设和概念 ……282
(二) 图论的有关知识 ……283
(三) 用最小路和最小割集求$R_s(t)$ 和$Q_s(t)$ ……287
(四) 求最小路的联络矩阵法 ……289
(五) 求混合网络全体最小路的探索法 ……296
(六) 一种化最小路和为不交和的算法 ……300
(七) 求最小割集的方法 ……312
(八) 改善系统可靠度的一种考虑 ……317
第十二章　故障树分析法 ……322
§1　基本概念 ……322
(一) 什么叫故障树和故障树分析法 ……323
(二) 进行故障树分析的步骤 ……324
§2　故障树的评定 ……325
(一) 故障树的定性评定 ……326
(二) 故障树的定量分析 ……331
§3　深入探讨的问题……334
(一) 故障树的最小路集 ……334
(二) 方框图法和故障树法的等价性 ……335
(三) 结构函数 ……337
(四) 故障树法的优缺点 ……344
第十三章　可修系统的可靠性分析……346
§1　可修系统的主要可靠性指标 ……346
(一) 系统的瞬时可用率 $A(t)$ ……347
(二) 系统的固有可用率 A ……348
(三) 系统的可靠度$R(t)$ ……348
(四) 系统的平均首次故障时间 ……349
(五) 系统的平均工作时间、平均停运时间和平均循环周期 ……351
§2　简单典型可修系统……352
(一) 单元件系统 ……352
(二) 串联系统 ……354
(三) 并联系统 ……360
§3　复杂系统 ……370
(一) 复杂系统可靠性分析概述 ……370

(二) A_i的计算式公……373
(三) f_i的计算公式……374
(四) 实例……380
第十四章 用状态空间分析法分析系统可靠性……390
§1 图论和状态空间的有关理论和符号……390
(一) 图论……390
(二) 状态空间……400
§2 状态空间法应用举例……403
(一) 大电力系统可靠性分析的步骤……403
(二) 用状态空间法求$LoLP$……406
(三) 用状态空间法求负荷损失的期望值……412
(四) 系统第i个元件的$LoLP_i$和$E_i(DNS)$……420
(五) 实例……421
第十五章 蒙特卡洛法及其在可靠性工程中的应用……430
§1 蒙特卡洛法的基本思想及其解题步骤……430
(一) 蒙特卡洛法的基本思想……430
(二) 蒙特卡洛法的解题步骤……431
§2 在电子计算机上模拟均匀分布随机数的方法……432
(一) 均匀分布随机数ξ与分布函数为$F(x)$的随机变量η……432
(二) 伪随机数的产生……433
§3 任意随机变量的模拟……434
(一) 在 (a, b) 上服从均匀分布的随机变量……435
(二) 离散型随机变量的模拟……435
(三) 连续型随机变量的模拟……435
(四) 马尔可夫链的模拟……436
§4 蒙特卡洛法在系统可靠性中的应用举例……436
(一) 不可修系统……437
(二) 可修系统……440
附表……446

第一章　概率论基础

§1　样本空间与随机事件

（一）样本空间

在自然界，在生产实践和科学实验中可以观察到各种不同的现象。

1. *必然现象*　在一定条件下，必然出现某一结果的现象，称为必然现象。

例如，在标准大气压下，水加热到100℃必然沸腾；清晨，太阳必然从东方升起；把10伏的直流电源加到5欧姆的电阻上，必然产生2安培的电流等，都是必然现象。

2. *随机现象*　在一定条件下，可能发生种种不同结果的现象，叫随机现象。

例如，北京明年6月15日的天气可能晴，可能阴，也可能雨；某台设备在下月的某日可能完好，也可能发生故障等，都是随机现象。

概率论就是研究随机现象的规律性的一门学科。

3. *随机试验*　我们是通过随机试验来观察随机现象的。随机试验也是一种试验，它具有以下三个特点：

（1）可以在相同条件下重复进行。

（2）每次试验的可能结果不只一个。

（3）试验之前不能断定哪一个结果发生，但可以知道有哪些可能结果。

满足以上三个特点的试验称为随机试验，简称试验，并记为E。

例　E_1：　掷一枚骰子，观察出现的点数。

E_2：　同时掷两枚硬币，观察出现正、反面的情况。

E_3：　记录某段高压线在七、八两个月内落雷的次数。

E_4：　观察某一设备在一个星期内是否发生故障。

E_5：　测验某种型号灯泡的寿命。

4. *样本空间*　由一个试验的所有可能的直接结果所构成的集合，称为这个试验的样本空间，记作S。

例如，对于

E_1：　$S_1=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E_2：　$S_2=\{$（正，反），（正，正），（反，正），（反，反）$\}$

E_3：　$S_3=\{0, 1, 2, \cdots\}$

E_4：　$S_4=\{$完好，故障$\}$

E_5：　$S_5=\{t \mid t\geqslant 0\}$

（二）随机事件

在一次试验中可能发生也可能不发生的事件，称为随机事件，它是样本空间S的一个

子集。

例如，在E_1中，"出现的点数小于4"是随机事件，记作{1，2，3}；"出现偶数点"是随机事件，记作{2，4，6}。在E_2中，"出现一个正面"是随机事件，记作{（正，反），（反，正）}等。

随机事件又简称事件，记作A，B，C，…。

1．基本事件　由样本空间中的一个元素所构成的子集是最简单的随机事件，称为基本事件。

例如，在E_1中，{1}是基本事件"出现1点"；{5}是基本事件"出现5点"。在E_2中，{（正，正）}是基本事件"两枚硬币均为正面"等。

2．必然事件　在每次试验中必然发生的事件称为必然事件。记作S。

例如，在E_1中，"出现的点数不超过6"是必然事件，即{1，2，3，4，5，6}。在E_3中，"落雷次数大于等于零"是必然事件。由以上各例可知，必然事件是全体基本事件的集合，也就是样本空间本身。

3．不可能事件　在每次试验中都不可能发生的事件叫做不可能事件，记作ϕ。

例如，在E_1中，"出现8点"是不可能事件。在E_3中，"落雷次数小于零"是不可能事件。

不可能事件不包含样本空间中任何一个元素，它是一个空集，也是样本空间的一个子集。

（三）事件间的关系与运算

1．事件B包含事件A　若事件A的发生必然导致事件B的发生，则称事件B包含事件A。记作$A \subset B$。

今后常用几何图形表示事件之间的关系与运算，这种图形称为文氏图。包含关系如图1—1所示。矩形表示样本空间S，事件B包含事件A，即A所包含的基本事件必然也包含在B内。用几何图形表示即B圆包含A圆。

2．事件A与B相等　若事件A包含事件B，且事件B包含事件A，则称事件A与B相等。如图1—2所示。

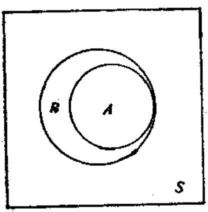

图1—1　$A \subset B$

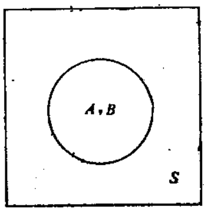

图1—2　$A = B$

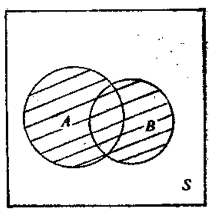

图1—3　$A \cup B$

3．事件A与B的并　事件A与B至少发生一个所构成的事件称为事件A与B的并，记作$A \cup B$，或$A + B$。如图1—3中阴影部分所示。

例 1 由两个元件串联构成的电路（如图1—4）。电路故障是一随机事件。设 A 表示元件 1 故障，B表示元件 2 故障，C为电路故障，则

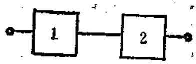

图 1—4

$$C=A\cup B$$

4．事件A与B的交 事件A与B同时发生所构成的事件称为事件A与B的交，记作$A\cap B$或AB。用几何图形表示如图1—5中阴影部分。

例 2 如图1—6所示，由两个元件并联的电路，若以A、B分别表示元件1与2的故障，C表示电路故障，则

$$C=A\cap B$$

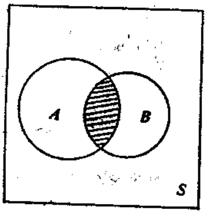

图 1—5

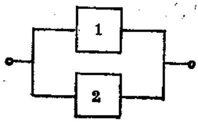

图 1—6

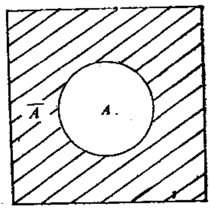

图 1—7

5．互不相容事件 若A与B不能同时发生，则称事件A与事件B互不相容，记作$AB=\phi$。

例 3 图1—6中，元件 1 的故障与元件 1 正常是两个互不相容的事件。

6．对立事件 若事件A与B满足下列条件

$$AB=\phi$$

且

$$A\cup B=S$$

则称事件A与事件B互为对立事件。一般将A的对立事件记作$\overline{A}$，即$A\overline{A}=\phi$，且$A\cup\overline{A}=S$。用几何图形表示如图 1—7 所示。

由以上事件间的关系，可得

$$A\cup A=A$$
$$A\cap A=A$$
$$A\cup AB=A$$
$$A\cap(B\cup\overline{B})=A$$

事件间的运算满足下列运算规律：

（1）交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA$$

（2）结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$
$$(AB)C=A(BC)$$

（3）分配律

$$A(B\cup C)=AB\cup AC$$

$$A\cup(CB)=(A\cup C)\cap(A\cup B)$$

（4）德·莫根定律

$$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$$

$$\overline{A_1\cap A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$$

例 4 如图1—8，是由三个元件并联而成的一个系统，若用A、B C分别表示元件1、2、3完好，用S表示系统完好，试用A、B、C及$\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$，表示S与$\overline{S}$。

解 ① 求S的表示式

解Ⅰ $S=$“三个元件都好”$\cup$“两个元件好，一个元件坏”$\cup$“两个元件坏，一个元件好” $=(ABC)\cup(AB\overline{C}\cup AC\overline{B}\cup BC\overline{A})\cup(\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{C}B\cup\overline{B}\,\overline{C}A)$

解Ⅱ $S=$“三个元件都好”$\cup$“至少两个元件好”$\cup$“至少一个元件好” $=(ABC)\cup(AB\cup AC\cup BC)\cup(A\cup B\cup C)$

解Ⅲ $S=$“三个元件中至少一个好”$=A\cup B\cup C$

以上三种解法是等价的。

② 求$\overline{S}$的表示式

$$\overline{S}=\text{“三个元件都坏”}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

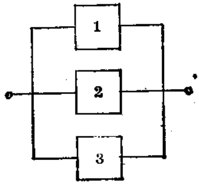

图 1—8

§ 2 事件的概率

用来描述某事件A在试验中发生的可能性大小的数量指标就是此事件的概率。记作$P(A)$。概率的具体定义有古典定义、统计定义及公理化定义。

（一）概率的古典定义

若随机试验满足以下两个条件

1．样本空间中的元素只有有限个，即$S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，其中e_i为基本事件，$i=1,2,\cdots,n$；

2．每个基本事件发生的可能性是相等的，则称此概率模型为古典模型，或古典概型。于是得到古典模型的概率定义如下：

定义 设试验E的样本空间为S，A为E中的任一事件，则事件A的概率

$$P(A)=\frac{A\text{事件包含的基本事件数}m}{\text{样本空间包含的基本事件总数}n}=\frac{m}{n}\qquad(1—2—1)$$

A事件包含的基本事件数，常称为对A事件有利的基本事件数。

例 1 在100台同一型号的设备中，已知有两台是坏的，问从中任取一台，取得坏设备的概率是多少？

解 从100台设备中任取一台，取得哪一台的机会都一样，即它们是等可能的，而取法有100个，即做一次试验，其可能结果有100个，亦即样本空间中基本事件总数为100，且试验可以重复进行，所以属于古典概型。

设 A为"取得坏设备"这一事件。样本空间S的基本事件总数$n=100$，对A事件有利的基本事件数$m=2$，所以由定义（1—2—1）得：

$$P(A)=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$$

例 2 有同一型号的低压断路器20台，其中16台是一等品，4台是二等品，现在任取三台，求：①三台都是一等品的概率；②只有一台是一等品的概率。

解 ①求三台都是一等品的概率

设 A为事件"任取三台，三台都是一等品"。解题用的公式是$P(A)=m/n$，问题在于如何求出n和m。下面我们用求组合数的方法求出n与m。

在20台断路器中任取三台，其取法共有C_{20}^3种。因此，样本空间的基本事件总数$n=C_{20}^3$。

A事件是取出的三台断路器都是一等品，而从16台一等品中任取三台的取法共有C_{16}^3种。其中每种可能取法的发生，都表示A事件的发生，即对A事件有利的基本事件数$m=C_{16}^3$。所以

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{16}^3}{C_{20}^3}=\frac{28}{57}=0.491$$

② 求只有一台是一等品的概率

设B为事件"任取三台，只有一台是一等品"，其基本事件总数$n=C_{20}^3$，有利于B事件的基本事件数$m=C_{16}^1C_4^2$，所以

$$P(B)=\frac{C_{16}^1C_4^2}{C_{20}^3}=\frac{16}{190}=0.084$$

（二）概率的统计定义

1. 频数与频率 若在n次重复试验中，事件A发生了m次，则m称为事件A发生的频数，而比值

$$f=\frac{m}{n}$$

则称为事件A发生的频率。

所谓"重复试验"，就是试验可以在相同条件下重复进行，且每次试验中事件A发生的概率和其他各次试验的结果无关，即各次试验是在相同条件下独立进行的。

试验证明，在试验次数较小时，某事件发生的频率时大时小是不稳定的。但是，当试验次数增多时，频率呈现出明显的稳定性。例如，有人抛掷抽签器，观察出现红圈的频率，得试验结果如表1.1所示。

此表说明当n增加到足够大时，频率趋于稳定，且在0.5这个数的附近摆动。

表1-1

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	m	f	m	f	m	f
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

2．概率的统计定义

定义　设在n次重复试验中，当n充分大时，事件A发生的频率趋于稳定，且在某数p的附近摆动，则称数p为事件A的概率，记作

$$P(A)=p \tag{1—2—2}$$

实践中，当n足够大时，常用f作为P的近似值。

（三）概率的公理化定义

以上两种概率定义在实际应用中都受到一定的限制，古典定义限制于解决古典模型的问题，而统计定义只有在大量重复试验的条件下成立。为此，我们给出一个公理化定义，它适用于各种场合。

义定　设试验E的样本空间为S，E的每一事件A对应地有一实值函数$P(A)$，若$P(A)$满足

（1）$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

（2）$P(S)=1$

（3）对有限个或可列个互不相容的事件A_1，A_2，…，A_n，…有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1—2—3}$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1—2—4}$$

则称$P(A)$为事件A的概率。

定义中的（1）与（2）在概率的古典定义与统计定义中显然成立；而（3）在这两个定义中同样成立，仅以古典概型为例给出证明

设　A_1，A_2，…，A_n是n个互不相容事件，由古典定义

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\frac{m}{n}$$

其中m是有利于 $(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$ 的基本事件总数，由事件间关系知

$$m=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

其中m_i是对A_i事件有利的基本事件数。所以

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n}$$

$$=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}+\cdots+\frac{m_n}{n}$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

概率的公理化定义综合了以上两类定义所共有的性质，它摆脱了具体的随机试验而直接从事件入手，给出了事件概率的严格定义。

（四）概率的运算性质

1. *加法定理* 设A、B是任意的两个事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (1\text{—}2\text{—}5)$$

2. 设A、B是两个互不相容事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \qquad (1\text{—}2\text{—}6)$$

3. 设A与$\overline{A}$是相互对立事件，则

$$P(\overline{A})=1-P(A) \qquad (1\text{—}2\text{—}7)$$

例 3 我机去轰炸敌人仓库，已知一枚炸弹只能命中三个仓库之一，而投一枚炸弹命中第一、二、三仓库的概率分别为0.01、0.008、0.025。问投一枚炸弹命中敌人仓库的概率是多少？

解 设A为“投一枚炸弹，命中敌人仓库”，A_i为“命中第i个仓库”，$i=1$、2、3，且$A_iA_j=\phi$，$i\neq j$则

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3$$

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

$$=0.010+0.008+0.025=0.043$$

即命中敌人仓库的概率是4.3%。

（五）条件概率

在许多实际问题中常常需要知道在某事件B已经发生的条件下，事件A发生的概率如何。例如，有20台断路器，其中有16台一等品，4台次品。现从中任取两台，每次取一台（不放回），问第一次取出一台一等品后，第二次取出的仍是一等品的概率如何？题意要求的是“第二次取出的是一等品的概率”，但是有一个附加条件，即第一次已经取走一台一等品了。若记A为“第二次取出的是一等品”，B为“第一次取出的是一等品”，显然B的发

生对A的发生产生了影响，因为A事件是在总数只有19台，一等品数只有15台的情况下发生的，因此A发生的可能性为15/19。为了与前面所讨论的没有附加条件下的概率有所区别，将有附加条件下的概率记作$P(A|B)$，本例即

$$P(A|B)=15/19$$

$P(A|B)$表示事件B发生的条件下，事件A发生的概率。这一概率不同于$P(AB)$，因为它是A与B同时发生的概率，即

$$P(AB)=\frac{C_{16}^2}{C_{20}^2}=\frac{16\times 15}{20\times 19}$$

由于 $P(B)=16/20$，于是上述条件概率可以改写为：

$$P(A|B)=\frac{\frac{15}{19}\times\frac{16}{20}}{\frac{16}{20}}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

这样就将求条件概率的问题换算成求两个无附加条件的概率问题了。

定义 设A、B是E的两个事件，且$P(B)\neq 0$，则

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1—2—8}$$

为在事件B发生的条件下，事件A发生的概率。

同理

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1—2—9}$$

其中$P(A)\neq 0$。

1．乘法定理 设A、B是E的两个事件 且$P(B)\neq 0$，则

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \tag{1—2—10}$$

同理，若$P(A)\neq 0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \tag{1—2—11}$$

2．全概率公式 设B_1，B_2，…，B_n为E中n个互不相容事件，且$\sum\limits_{i=1}^{n}B_i=S$，若$P(B_i)>0$，$i=1$，2，…，$n$，则对于$E$的任意事件$A$有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i) \tag{1—2—12}$$

证明 因为 $A=AS=A\sum\limits_{i=1}^{n}B_i=\sum\limits_{i=1}^{n}AB_i$，而$B_iB_j=\phi$，$i\neq j$，则

$$(B_iA)(B_jA)=\phi,\quad i\neq j$$

从而

$$P(A)=P(\sum_{i=1}^{n}AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)$$

由公式（1—2—10）得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\ P(A|B_i)$$

3. 贝叶斯公式　设B_1，B_2，…，B_n是E中n个互不相容事件，且$\sum_{i=1}^{n}B_i=S$。若$P(B_i)>0$，$i=1$，2，…，n，A是E中任意事件，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1—2—13}$$

证明　由式（1—2—8）得

$$P(B_i|A)=P(B_iA)/P(A)$$

由式（1—2—11）及式（1—2—12）得

$$P(B_i|A)\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

（六）事件的独立性

一般情况下，$P(A|B)\neq P(A)$，即事件B的发生对事件A发生的概率会有影响。但是也存在事物B的发生与否并不影响事件A发生的概率的情况。例如，袋中放有 10 个球，其中 4 个白球，6 个红球。若从中任取两次，每次取一球，辨别颜色后放回袋中。在这种情况下若讨论第一次取出白球的情况下，第二次取出的也是白球的概率，就会得出第二次取球与第一次无关的结论。若记A_1与A_2分别为第一，第二次取出白球，则

$$P(A_2|A_1)=P(A_2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

这时我们就说事件A_1与A_2是相互独立的。

定义　设A、B是E的两个事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1—2—14}$$

则称事件A与事件B相互独立。

在实际工作中，诸事件是否独立，常常是根据实际情况来判断的。例如，甲、乙、丙三人向同一目标进行射击，假定他们是否命中目标是互不影响的，也就是认为“甲命中”，“乙命中”，“丙命中”是相互独立的。

（七）应用举例

例 4　由五个元件所组成的一个系统如图 1—9 所示，在T时间内各元件发生故障是独立的，其概率如下表所示

元　件	K_1	K_2	L_1	L_2	L_3
概　率	0.600	0.500	0.400	0.700	0.900

求在T时间内①由于K_1或K_2发生故障，系统故障的概率。②系统故障的概率。

解 ①求由于K_1或K_2故障，系统故障的概率。这时认为L_1、L_2、L_3完好，因此系统可以看作由K_1与K_2串联而成。

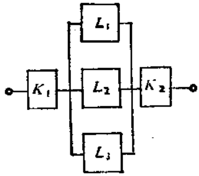

图 1—9

设 A_i为元件K_i故障，$i=1, 2$，A为系统故障。

解Ⅰ 因为$A=A_1\cup A_2$，所以

$$P(A)=P(A_1\cup A_2)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)$$
$$=0.600+0.500-0.600\times 0.500$$
$$=0.800$$

解Ⅱ $P(A)=1-P(\overline{A})$ 而$\overline{A}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}$，所以

$$P(A)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})$$
$$=1-0.400\times 0.500=0.800$$

此例说明这里用第二种方法求解是方便的。

②求系统故障的概率。这时系统可以看作由K_1与K_2串联构成的元件K和由L_1，L_2，L_3并联构成的元件L串联而成，如图 1—10所示。

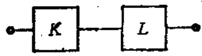

图 1—10

设A、B、C分别表示系统，元件K，元件L故障。

解Ⅰ $A=B\cup C$

$$P(A)=P(B\cup C)$$
$$=P(B)+P(C)-P(BC)$$

设 C_i为元件L_i故障，$i=1, 2, 3$，则

$$P(C)=P(C_1C_2C_3)$$
$$=P(C_1)P(C_2)P(C_3)$$
$$=0.400\times 0.700\times 0.900=0.252$$
$$P(B)=0.800 \text{（即为①中所求概率）}$$

所以

$$P(A)=0.800+0.252-0.800\times 0.252$$
$$=0.850$$

解Ⅱ $P(A)=1-P(\overline{A})$ 而$\overline{A}=\overline{B}\,\overline{C}$

$$P(A)=1-P(\overline{B})P(\overline{C})$$
$$=1-(1-0.800)(1-0.252)$$
$$=0.850$$

例 5 （1）某种型号的设备25台，其中有两台次品，甲、乙两单位各买一台，问①甲、乙两单位都买到正品的概率是多少？②只有一个单位买到正品的概率是多少？③已知甲单位买到正品的条件下，乙单位买到正品的概率是多少？

（2）有大批这种型号的设备，其次品率为2/25，甲、乙两单位各从这批设备中买了一台，重新解（1）中的问题①～③。

（3）从次品率为2/25的这种型号的设备中任取100台，甲、乙两个单位各从中买了一台，再次解（1）中的问题①～③。

解 设 A、B分别为甲、乙单位买到正品；D_1为甲、乙两单位都买到正品；D_2为只有一个单位买到正品；D_3为甲单位买到正品的条件下，乙单位买到正品。

（1）①求$P(D_1)$

解Ⅰ

$$P(D_1)=\frac{C_{23}^2}{C_{25}^2}=0.843$$

解Ⅱ 因为$D_1=AB$，所以

$$\begin{aligned}P(D_1)&=P(AB)\\&=P(A)P(B|A)\\&=\frac{23}{25}\cdot\frac{22}{24}=0.843\end{aligned}$$

②求$P(D_2)$

解Ⅰ

$$P(D_2)=\frac{C_{23}^1C_2^1}{C_{25}^2}=0.153$$

解Ⅱ 因为$D_2=A\overline{B}\cup\overline{A}B$，所以

$$\begin{aligned}P(D_2)&=P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)\\&=P(A)P(\overline{B}|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\&=\frac{23}{25}\cdot\frac{2}{24}+\frac{2}{25}\cdot\frac{23}{24}\\&=0.153\end{aligned}$$

③求$P(D_3)$

解Ⅰ $P(D_3)=P(B|A)$

$$=22/24=0.917$$

解Ⅱ $P(D_3)=P(B|A)$

$$\begin{aligned}&=P(AB)/P(A)\\&=\frac{\frac{23}{25}\cdot\frac{22}{24}}{\frac{23}{25}}=0.917\end{aligned}$$

（2）一般把批量大的产品看作包含无穷多个产品，因而从中取走一个产品后并不改变这批产品的次品率。这样就可以认为甲、乙两单位是从完全相同的两批产品中分别独立去买的。这就是说A和B是相互独立的。所以

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A|B)=P(A|\overline{B})\\&=P(B|A)=P(B|\overline{A})\\&=P(B)=1-\frac{2}{25}=0.920\end{aligned}$$

①求$P(D_1)$