线性代数

高等教育基础课教材

（修订版）

傅长根 编

北京理工大学出版社

线性代数

（修订版）

傅长根 编

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书是根据教育部关于《线性代数》函授教育的教学基本要求和自学考试大纲的内容和要求编写的，并适当增加了作为工科本科生必备的内容。主要内容有：行列式、矩阵、线性方程组、二次型、n维向量空间和线性变换等。

本书在内容安排上突出重点，力求讲透；概念的引入尽量从具体事例入手，逐步深入；对重点概念从不同角度反复阐述，对重要的计算注意总结方法、步骤，着重阐述计算的规律性。

本书在文字叙述上通俗易懂，用讲课形式书写，层次清楚，使读者在阅读本书时有接受面授之感。

本书可作为高等院校工科各专业的本科生、函授生及参加自学考试者的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/傅长根编. —修订本. —北京：北京理工大学出版社，2001.6

ISBN 7-81045-801-9

Ⅰ. 线… Ⅱ. 傅… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 022900 号

责任印制：田长新　　责任校对：陈玉梅

北京理工大学出版社出版发行
（北京市海淀区中关村南大街5号）
邮政编码 100081　电话(010)68912824
各地新华书店经售
涿州市星河印刷厂印刷

*

850毫米×1168毫米　32开本　13.5印张　343千字
2001年6月第2版　2001年6月第5次印刷
印数：1-4000册　定价：20.00元

再版前言

第一版《线性代数》在老一辈数学家、原教育部数学课程指导委员会副主任委员、原北京市数学会副理事长孙树本教授指导下于 1987 年出版。本书十多年来一直是北京理工大学成人教育学院的函授教材，也曾被有的省作为自学考试的教材使用，受到广大读者的欢迎。普遍反映本书通俗易懂，层次清楚，便于自学。正如孙树本教授在第一版前言中所评价的那样：本书具有鲜明的特色，全书内容取材适当，重视基本概念和基本理论，并保证一定的高度和深度；为了便于自学，书中叙述详尽细致，讲解深入透彻；书写简洁，通俗易懂，生动活泼，引人入胜。

随着高科技的发展和信息时代的到来，特别是教育部近几年关于《线性代数》教学基本要求和自学考试大纲的颁布，对高等教育的数学基础教学提出了更高的要求，第一版书的有些内容需要加以充实提高。在北京理工大学成人教育学院与北京理工大学出版社的支持下，修订再版本书，使其更为完善。

本次修订，对第一版编写及排印中的疏漏进行修正，增加了一些内容，如 n 阶行列式给出了精确定义，向量组的最大无关组的求法给出了证明。增加的内容有矩阵的分块、向量组的等价、合同矩阵与合同变换、相似矩阵与相似变换等。删去了二次型中的配方法，把 n 维向量空间和线性变换放到最后一章，也可作为选学内容，这样便于安排教学和保持了线性代数教学内容的完整性。本书的主要内容有：行列式、矩阵、线性方程组、二次型及其分类、n 维向量空间和线性变换。

再版后的《线性代数》仍保持原有的特点：在内容安排上抓住重点，力求讲透；概念的引入尽量从具体的事例入手，逐步深入，便于理解；对重要的计算注意总结方法、步骤，着重阐述计

算的规律性。为了便于读者深入理解内容，循序渐进地掌握知识，书中配有较多的例题与深浅程度不同，适合不同学习阶段的练习题、思考题、习题以及自我检查题。在文字叙述上通俗易懂，用讲课形式书写，层次清楚，力求使读者在阅读本书时有直接接受面授之感。为使读者能较深入地理解本书内容，每章最后有章后指导，并注意对自学者学习方法的指导，使读者能在学习过程中掌握学习方法。

本书第一版在编写过程中，教育部原数学课程指导委员会委员、北京理工大学应用数学系教授刘颖先生仔细地审阅了初稿，并提出了许多宝贵的意见，第一版出版后北京科技大学钱文侠教授详细阅读了本书，并提出了宝贵意见，对这次修订帮助很大，在此特向他们表示衷心感谢。并向曾经对本书提出宝贵意见的老师和读者表示感谢。

由于编者的水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2001 年 3 月于北京

关于自学、面授时数安排建议

自学内容		自学时数	面授时数	作业内容	备　注
第一章	§1-1	3		习题 1.1	
	§1-2	4		习题 1.2	
	§1-3	4		习题 1.3	
	§1-4	4		习题 1.4	
			3	自我检查题 1	总结第一章
第二章	§2-1	2		习题 2.1	
	§2-2	6		习题 2.2	
	§2-3	6		习题 2.3	
	§2-4	6		习题 2.4	
	§2-5	6		习题 2.5	
			6	自我检查题 2	总结第二章
第三章	§3-1	14		习题 3.1	
	§3-2	2		习题 3.2	
	§3-3	4		习题 3.3	
	§3-4	4		习题 3.4	
			6	自我检查题 3	总结第三章
第四章	§4-1	2		习题 4.1	
	§4-2	6		习题 4.2	
	§4-3	6		习题 4.3	
	§4-4	6		习题 4.4	
	§4-5	4		习题 4.5	
			6	自我检查题 4	总结第四章
第五章	§5-1	2		习题 5.1	
	§5-2	4		习题 5.2	
	§5-3	4		习题 5.3	
	§5-4	6		习题 5.4	
			6	自我检查题 5	总结第五章

目　录

第一章　行 列 式

在工程技术中，一些变量之间的关系可以直接或近似地表为线性关系，线性代数主要是研究线性关系。在线性代数中线性方程组是一个基础而又重要部分，而行列式最初是为求解线性方程组而引入的，所以行列式是研究线性代数的一个工具，且在数学和其他科学分支方面都有广泛的应用。本章主要讨论以下三个问题。

（1）行列式的概念；

（2）行列式的基本性质及计算；

（3）利用行列式求解线性方程组。

§1－1　行列式的概念

为了给出 n 阶行列式的定义，首先要介绍有关排列、交换、逆序数等概念。

一、排列和逆序数

定义 1　由 1，2，3，…，n 这 n 个数有序地排成一行称为一个 n 级(元)排列。例如 4123 是由四个数，1，2，3，4 的一个四级(元)排列，4321 是另一个排列。四级排列总共有 4！个排列。由 1，2，…，n 个数构成排列的总数为 $n!$ 个，其中 $123\cdots n$ 称自然排列。自然排列的特点是后面的数总比前面的数大 1。

定义 2　一个排列相邻两个数互换位置称为该排列的一个交换，即一个排列前后两数交换一次就是作一次交换。例如 4231 $\xrightarrow{\text{交换}}$ 2431。任何一个排列经过若干次前后两数交换后(即作若干次

交换)即可化为自然排列。例如 4231 $\xrightarrow{\text{交换一次}}$ 2431 $\xrightarrow{\text{交换}}$ 2341 $\xrightarrow{\text{交换}}$ 2314 $\xrightarrow{\text{交换}}$ 2134 $\xrightarrow{\text{交换}}$ 1234，共进行 5 次交换。再如 1423 $\xrightarrow{\text{交换}}$ 1243 $\xrightarrow{\text{交换}}$ 1234，共进行 2 次交换。交换的次数也称这个排列的逆序数。

定义 3 若一个 n 级排列，经过 k 次交换后化为自然排列，称 k 为该排列的逆序数。

若一个排列的逆序数是偶数，则该排列称偶排列，若逆序数是奇数，称该排列是奇排列。自然排列是偶排列。由 1，2，…，n 个数构成的 n 级排列的总数不仅是 $n!$（可构成 $n!$ 个不同排列），而且其中有 $\frac{n!}{2}$ 个奇排列，$\frac{n!}{2}$ 个偶排列。

二、二阶行列式

考虑两个未知量 x_1，x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中 b_1，b_2 是常数项，b_1 和 b_2 可简单地记作 $b_i(i=1,2)$；$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$是未知量的系数，可简单记为 $a_{ij}(i,j=1,2)$。a_{ij}有两个下标 i，j，a_{ij}表明是第 i 个方程中 x_j 的系数。例如 a_{21}就是第二个方程中 x_1 的系数。

现在采用消元法求解方程组(1)。为消去 x_2，用 a_{22}乘第一个方程，a_{12}乘第二个方程，即

$$a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}$$

$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2$$

然后相减，得到只含 x_1 的方程

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \tag{2}$$

为消去 x_1，用 a_{21}乘第一个方程，a_{11}乘第二个方程，即

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21}$$

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2$$

然后相减，得到只含 x_2 的方程

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21} \tag{3}$$

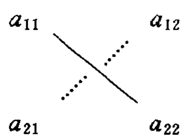
由式(2)和式(3)可知，若

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0 \tag{4}$$

则方程组(1)有惟一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}};\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{5}$$

注意到由式(5)给出的 x_1 与 x_2 的表达式，分母都是 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它只依赖于方程组(1)的四个系数，如果把这四个系数排成下列形式



(6)

那么 D 可以看作是两项乘积的代数和，第一项 $a_{11}a_{12}$是式(6)中左上角到右下角对角线上两个数(用实线连接的两个数)的乘积，并取正号;第二项是式(6)中用虚线连接的两个数的乘积,并取负号。为了便于记忆，我们给出如下的二阶行列式的定义。

定义 4 由 2^2 个数排成二行二列的方表称二阶行列式，且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{7}$$

说明 1° 二阶行列式是由四个数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}排成两行两列构成的，记为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$(横写的叫行,竖写的叫列)。其中 a_{ij} $(i,j=1,2)$称为行列式的元素，i 表示 a_{ij}所在的行数，j 表示所在的列数。a_{ij}表示位于行列式第 i 行第 j 列的元素，例如 a_{12}表示位于第一行第二列的元素。

2° 二阶行列式表示一个数，此数为 2! 项的代数和，即左上角元素 a_{11}与右下角元素 a_{22}乘积取正号和右上角的元素 a_{12}与左下

角元素 a_{21}乘积取负号这两项的代数和。显然二阶行列式的定义 4 与式(6)所示的对角线规则是一致的。

3° 二阶行列式表示的数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$的结构也可以按如下规律描述：

二阶行列式表示一个数，该数有 2! 项组成，每项数是二阶行列式中不同行不同列的两个元素的乘积，每项两数的第一个角标是自然排列 12，第二个角标构成的排列 12，21，若它们的逆序数是偶数，此项为正；若逆序数是奇数，此项为负。所以 $a_{11}a_{22}$为正，$a_{12}a_{21}$为负。$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$可记为 $\Sigma\pm a_{1j_1}a_{2j_2}$，于是二阶行列式的定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1j_1}a_{2j_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{8}$$

根据定义 4(或称对角线规则)容易计算出二阶行列式的值。例如

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - (-3) \times 3 = 19$$

其中 $a_{11}=2$，$a_{12}=-3$，$a_{21}=3$，$a_{22}=5$。再如

$$\begin{vmatrix} a+b & a \\ a & a-b \end{vmatrix} = (a+b)(a-b) - a \cdot a = -b^2$$

其中 $a_{11}=a+b$，$a_{12}=a$，$a_{21}=a$，$a_{22}=a-b$。根据二阶行列式的定义，式(5)中的两个分子可以分别表示为

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

如果我们记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \tag{9}$$

那么方程组(1)式的惟一解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{10}$$

其中 D 是由方程组的系数确定的二阶行列式，与右端常数项无关，故称 D 为方程组(1)的系数行列式。D_1 是把 D 中的第一列(x_1 的系数)a_{11}、a_{21}换成了常数项 b_1、b_2，D_2 是把 D 的第二列(x_2 的系数)a_{12}、a_{22}换成了常数项 b_1、b_2。这样求解二元一次方程组就归结为求三个二阶行列式的值了。

例 1　利用行列式解方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 5y = 4 \end{cases}$$

解　方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times (-5) - (1 \times 3) = -13 \neq 0$$

因为 $D \neq 0$，所以方程组有惟一解。用常数项分别替换 D_1，D_2 中第一列与第二列，则可得到

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times (-5) - (3 \times 4) = -22$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times 2 = 6$$

于是方程组的惟一解为

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{22}{13}, \quad y = \frac{D_2}{D} = -\frac{6}{13}$$

三、三阶行列式

对于含有三个未知量 x_1，x_2，x_3 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{11}$$

也可以用消元法求解。为求得 x_1，需要消去 x_3 和 x_2。消元过程可以分两步进行：第一步从(11)式的前两个方程和后两个方程中消去 x_3，得到含有 x_1 和 x_2 的线性方程；第二步再消去 x_2。由第一步(第一个方程乘 a_{23}减去第二个方程乘 a_{13};第二个方程乘 a_{33}减去第三个方程乘 a_{23})得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_1 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})x_2 = b_1a_{23} - a_{13}b_2 \\ (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})x_1 + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})x_2 = b_2a_{33} - a_{23}b_2 \end{cases}$$

再由第二步[第一个方程乘$(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$减去第二个方程乘$(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$]得到

$$\begin{aligned}&[(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \times \\ &\quad (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})]x_1 = (b_1a_{23} - a_{13}b_2) \times \\ &\quad (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - (b_2a_{33} - a_{23}b_3)(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\end{aligned}$$

整理后得到只含 x_1 的方程

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ &\qquad a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &= b_1a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - \\ &\qquad a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3\end{aligned}$$

若 x_1 的系数

$$\begin{aligned}D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0\end{aligned}$$

时，得出 $x_1 = \frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} -$

$$b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3)$$

为了便于记忆，引入三阶行列式

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\xlongequal{\text{记为}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3$$

$$\xlongequal{\text{记为}} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{记为}} D_1$$

于是得到

$$x_1 = \frac{D_1}{D}$$

同理可以得到

$$x_2 = \frac{D_2}{D} \quad , \ x_2 = \frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_2 = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 -$$

$$a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31} \xlongequal{\text{记为}} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} -$$

$$a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31} \xlongequal{\text{记为}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

这样(11)式的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \ x_2 = \frac{D_2}{D}, \ x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{12}$$

其中 D，D_1，D_2，D_3 如上所述。

与解二元线性方程组一样，称 D 为(10)式的系数行列式，D_1，D_2，D_3 分别是用常数项来替换 D 中的第一列(x_1 的系数)，第二列(x_2 的系数)，第三列(x_3 的系数)得到。

我们把由 3^2 个元素构成的三行三列的方表

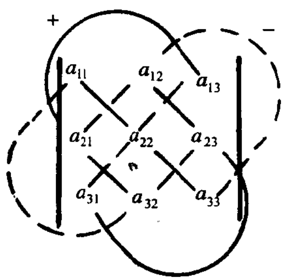
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

叫做三阶行列式

定义 5 由 3^2 个数排成三行三列的方表称为三阶行列式，且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{13}$$

它含有三行、三列，是 6 个项的代数和。这 6 个项可作如下记忆，即实线上三个元素乘积构成的三项都取正号，虚线上的三个元素的乘积构成的三项都取负号。



例如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1\times1 + 2\times(-2)\times3 + 1\times(-2)\times2 - 1\times2(-2) - 2\times(-2)\times1 - 1\times1\times3 = -10$

这种对角线运算规则只适合三阶行列式。对于四阶以上的行列式是不适用的。由上面三阶行列式的定义可知

1° 三阶行列式是由九个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排成三行三列的方表构成，横写的叫行，竖写的叫列。a_{ij} 称为行列式的元素，i 表示 a_{ij} 所在的行数，j 表示所在的列数。如 a_{32} 表示位于行列式第三行第二列的元素。

2° 三阶行列式表示一个数，该数由 3！=6 项组成，每项数是三阶行列式中不同行不同列的三个元素的乘积，每项三个数的第一个角标是自然排列，第二个角标构成的排列 123，231，312，132，213，321，若它们的逆序数是偶数，此项为正，若逆序数是奇数，此项为负。例如 231 的逆序数是 2，故 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 取正号，321 的逆序数是 3，故 $a_{13}a_{22}a_{31}$ 取负号。现把定义中等号右边 6 项的代数和记为 $\Sigma\pm a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中正负号由排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数来决定，于是三阶行列式的定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{14}$$

例 2 用行列式解方程组

$$\begin{cases} 3y + 2x = z + 1 \\ 3x + 2z = 8 - 5y \\ 3z - 1 = x - 2y \end{cases}$$

解 先把未知量按列对齐，即把方程组整理成

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2\times5\times(-3) + 3\times2\times1 +$$

$$(-1)\times3\times(-2) - 2\times2\times$$

$$(-2) - 3\times3\times(-3) -$$